

# 一类不确定级联链式非完整系统的自适应镇定控制

于江波<sup>†</sup>, 赵彦, 田洁

(山东建筑大学 理学院, 山东 济南 250101)

**摘要:** 本文研究一类带有未建模动态及未知参数的级联链式非完整系统的自适应输出反馈镇定问题. 通过构造动态增益观测器与自适应估计器, 借助反步递推方法提出了一种新的自适应输出反馈镇定控制方案. 本文应用切换控制策略克服了非完整系统不能够通过连续反馈实现镇定控制的困难. 文中设计的控制律保证了闭环系统在原点渐近镇定且状态渐近收敛于零. 仿真结果验证了算法的有效性.

**关键词:** 非完整系统; 输出反馈; 动态不确定性; 自适应; 输入状态稳定性

**引用格式:** 于江波, 赵彦, 田洁. 一类不确定级联链式非完整系统的自适应镇定控制. 控制理论与应用, 2024, 41(8): 1495 – 1500

DOI: 10.7641/CTA.2023.20270

## Adaptive stabilizing control for a class of uncertain cascaded chained-form nonholonomic systems

YU Jiang-bo<sup>†</sup>, ZHAO Yan, TIAN Jie

(School of Science, Shandong Jianzhu University, Jinan Shandong 250101, China)

**Abstract:** In this article, we investigate the adaptive output feedback stabilizing control problem for a class of uncertain cascaded chained-form nonholonomic systems with unmodeled dynamics and unknown parameters. Using only the output information, we propose a novel adaptive output feedback stabilizing control scheme with the help of a dynamic gain observer and the adaptive estimator. The backstepping recursive method plays a key role in this procedure. Additionally, a switching adaptive control strategy is developed to get around the continuous stabilization burden associated with nonholonomic systems. The proposed control scheme guarantees the system states in closed-loop system converge to the origin. The simulation results illustrate the efficacy of the presented algorithm.

**Key words:** nonholonomic systems; output feedback; dynamic uncertainty; adaptive control; input-to-state stable (ISS)

**Citation:** YU Jiangbo, ZHAO Yan, TIAN Jie. Adaptive stabilization control for a class of uncertain cascaded chained-form nonholonomic systems. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(8): 1495 – 1500

## 1 引言

非完整控制系统能够代表一大类具有非完整约束的实际系统, 比如移动机器人、欠驱动船只、拖车系统等<sup>[1-2]</sup>. 根据Brockett条件<sup>[3]</sup>, 非完整系统不能通过静态连续控制律来实现Lyapunov意义上的镇定控制. 这一特点使得非完整系统的镇定控制问题是非线性系统控制领域的一个挑战. 为了克服这一困难, 过去的20年里, 研究者们提出了许多有意义的控制方案, 比如, 不连续反馈、时变反馈、及混杂控制等<sup>[4]</sup>. 文献[5]提出的不连续反馈镇定控制方案是实现非完整系

统渐近镇定控制的有效工具, 并且该种控制方案的一个优点是具有快速的收敛性. 在过去的几年里, 应用这一方法, 若干类非完整系统的镇定控制问题得到了解决, 得到了许多有意义的结果<sup>[6]</sup>.

在几乎所有的工程控制问题中, 不可避免地存在着扰动、模型不确定性等, 这会影响系统性能, 甚至导致系统不稳定<sup>[7]</sup>. 因此, 不确定非线性系统的鲁棒控制问题一直是控制领域的热点问题. 在文献[8]中, Jiang教授针对一类带有有界时变扰动的不确定链式非完整系统, 提出了一种鲁棒镇定控制方案. 随后, 文

收稿日期: 2022-04-13; 录用日期: 2023-09-22.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: jbyu@sdjzu.edu.cn; Tel.: +86 531-86367051.

本文责任编辑: 李少远.

国家自然科学基金项目(62303280), 山东省自然科学基金项目(ZR2021MF009, ZR2023MF055), 山东省高等学校“青年创新科技计划团队”项目(2021KJ067)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62303280), the National Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2021MF009, ZR2023MF055) and the Development Plan of Youth Innovation Team of University in Shandong Province (2021KJ067).

献[9]研究了带有参数不确定性的链式非完整系统的自适应镇定控制问题;文献[10–12]针对带有强非线性漂移项的链式非完整系统,提出了几类输出反馈自适应镇定控制方案;文献[13–14]针对带有时滞的高阶非完整系统给出了镇定控制器;文献[15–19]考虑了带有随机噪声的非完整系统的镇定控制结果;文献[20–22]提出了链式非完整系统的有限时间镇定控制方案.最近,文献[23]研究了非消失性扰动情况下链式非完整系统的镇定与跟踪控制问题.

然而,上述工作没有考虑未建模动态及未知参数不确定性.在本文中,研究了一类带有动态不确定性及未知参数的级联链式非完整系统的输出反馈鲁棒镇定控制问题.不同于最近的结果<sup>[20,23]</sup>,本文通过构造新的动态增益观测器来估计不可测状态,提出了一种新的自适应输出反馈控制方案.本文贡献如下:

1) 本文首次研究了带有动态不确定性及未知参数的一类链式非完整系统的输出反馈镇定控制问题.借助输入状态稳定性(input-to-state stability, ISS)概念<sup>[24]</sup>,提出了新的鲁棒自适应镇定控制方案,进一步改进了不确定非完整系统的镇定控制结果;

2) 不同于现有文献中动态不确定性供能函数率已知的情形,本文研究了供能函数率不确定的情形.基于不确定供能函数率的改变供能函数率技术有效处理了链式非完整系统具有的动态不确定性.

### 2 问题描述

本文考虑如下—类不确定非完整系统:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = q(\eta, x, \sigma), \\ \dot{x}_0 = u_0 + x_0\varphi_0(x_0), \\ \dot{x}_i = x_{i+1}u_0 + \phi_i^d(u_0, x_0, x, \eta, \sigma), \\ \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_n = u + \phi_n^d(u_0, x_0, x, \eta, \sigma), \\ y = [x_0 \ x_1]^T, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $[x_0 \ x_1 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $u = (u_0, u) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$  分别是系统状态、控制输入和系统可测输出;  $\eta \in \mathbb{R}^r$  表示不可测的动态不确定性;  $\varphi_0(x_0)$  是已知光滑非负函数;  $\phi_i^d(\cdot) \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 表示(未知)非线性漂移项;  $\sigma$  表示未知参数扰动.

**注1** 拟研究系统(1)代表了一大类受非完整约束的控制系统,移动机器人、冰面上滑行的冰刀等经过坐标变换可以转化为上述系统形式.例如两轮驱动式移动机器人(如图1所示),其运动学方程表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \\ R^{-1} & -R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中:  $x_c, y_c$  分别表示机器人的位置和方向,  $r$  是驱动轮的半径,  $2R$  是小车宽度,  $P_0$  是两驱动轮轴连线的中点,  $v_1, v_2$  是机器人的角速度.选取状态

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

和输入变换

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u \end{bmatrix} = \frac{r}{2R} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ R^{-1} & R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

系统(2)可以转化为

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u_0, \\ \dot{x}_1 = x_2 u_0, \\ \dot{x}_2 = u - x_1 u_0. \end{cases} \quad (5)$$

上述系统(5)即为拟研究系统(1)在  $\eta = 0$  时的情形.

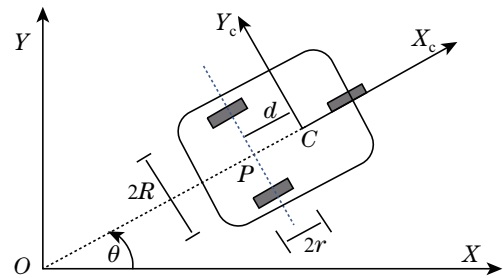


图1 两轮驱动式移动机器人  
Fig. 1 Two-wheeled mobile robot (WMR)

**注2** 在不存在不可观测的  $\eta$ -子系统的情况下,国内外学者针对该类链式非完整系统取得了许多有意义的成果.例如,文献[8]针对受扰形式的链式非完整系统提出了鲁棒镇定控制方案.随后,该类不确定链式非完整系统在参数不确定性<sup>[9]</sup>、非线性漂移项<sup>[10–12]</sup>、时滞系统<sup>[13–14]</sup>及随机噪声<sup>[15–19]</sup>等方面得到了进一步拓展研究.

**注3** 实际的非完整系统往往受到各种外部干扰,例如机器人的负载、测量噪声、建模误差等,这些因素都会使实际系统成为一个受干扰的非完整系统<sup>[8]</sup>.例如在轮式移动机器人系统中,在仅有输出信号可测的情况下,通过构造观测器及误差系统,可以得到上述级联结构的非完整系统(1).

### 3 系统假设

本文针对系统(1),作如下假设.

**假设1** 针对  $\eta$ -子系统,存在正定光滑的ISS-Lyapunov函数  $U_0(\eta)$ , 满足

$$\underline{\alpha}_\eta(\|\eta\|) \leq U_0(\eta) \leq \bar{\alpha}_\eta(\|\eta\|), \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \eta} q(\eta, x, \sigma) \leq -\alpha_0(\|\eta\|) + \delta_0 \gamma_0(|x_1|), \quad (7)$$

其中:  $\underline{\alpha}_\eta(\cdot), \bar{\alpha}_\eta(\cdot), \alpha_0(\cdot)$  及  $\gamma_0(\cdot)$  是  $\mathcal{K}_\infty$  类函数;  $\delta_0 > 0$  是未知常数,且  $\gamma_0(\cdot)$  满足

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_0(s)}{s^2} < +\infty. \quad (8)$$

**假设2** 对  $i = 1, \dots, n$ , 存在已知光滑非负函数  $\varphi_i(u_0, x_0, x_1)$  及未知光滑非负函数  $\psi_i(\eta)$ , 满足

$$|\phi_i^d(\cdot)| \leq \theta |x_1| (\varphi_i(u_0, x_0, x_1) + \psi_i(\eta)), \quad (9)$$

其中  $\theta > 0$  是未知常数.

**假设 3** 对于  $\psi_i(\cdot)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 有以下假设:

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\psi_i^2(s)}{\alpha_0(s)} < +\infty, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

**注 4** 上述关于函数  $\gamma(\cdot)$  与  $\psi_i(\cdot)$  的假设条件(8)(10)也称为局部小增益型条件<sup>[25-26]</sup>. 根据这一假设条件, 借助改变供能函数率技术能有效处理级联的动态不确定性, 相关假设见文献[8-9, 25-26].

以下引理应用于输出反馈控制器设计.

**引理 1**<sup>[27]</sup> 对任意的  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 任意实数  $\epsilon > 0$ , 任意正定矩阵  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 有以下不等式成立:

$$2x^T y \leq \epsilon^{-1} x^T Q x + \epsilon y^T Q^{-1} y. \quad (11)$$

## 4 控制设计与结论

首先考虑  $x_0(t_0) \neq 0$  时的情形, 再考虑  $x_0(t_0) = 0$  的情形.

### 4.1 不连续输入-状态缩放变换

当  $x_0(t_0) \neq 0$  时, 选取以下形式的控制律  $u_0$ :

$$u_0 = -\lambda_0 x_0 - x_0 \varphi_0(x_0), \quad (12)$$

其中  $\lambda_0 > 0$  是设计参数. 应用形如式(12)中的控制律  $u_0$ , 可以得到在  $x_0(t_0) \neq 0$  时, 状态  $x_0(t)$  在  $t$  趋于无穷大时, 渐近收敛到零并且在任何时刻  $t \geq t_0$ ,  $x_0(t)$  都不等于零<sup>[8]</sup>.

考虑到当  $t \geq t_0$  时,  $x_0(t) \neq 0$ , 进行以下变换:

$$z_i = \frac{x_i}{u_0^{n-i}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (13)$$

定义  $\bar{\phi}_i^d(\cdot) = \frac{\phi_i^d(u_0, x_0, x, \eta, \sigma)}{u_0^{n-i}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 得到

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1} - (n-i) \frac{\dot{u}_0}{u_0} z_i + \bar{\phi}_i^d(u_0, x_0, x, \eta, \sigma), \\ 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{z}_n = u + \bar{\phi}_n^d(u_0, x_0, x, \eta, \sigma). \end{cases} \quad (14)$$

对于  $z$ -系统(14)中的非线性漂移项  $\bar{\phi}_i^d(\cdot)$ 's 有以下引理, 其证明由假设2可简单证明.

**引理 2** 未知函数  $\bar{\phi}_i^d(u_0, x_0, x, \eta, \sigma)$  有上界

$$|\bar{\phi}_i^d(\cdot)| \leq |u_0^{i-1}| |z_1| (\varphi_i(u_0, x_0, x_1) + \psi_i(\eta)) \theta. \quad (15)$$

为处理不可测状态  $\eta$ , 有以下引理3.

**引理 3**<sup>[28-29]</sup> 根据假设1和假设3中条件(8)(10), 存在ISS-Lyapunov函数  $\bar{U}_0(\eta) = \int_0^{U_0(\eta)} \rho(s) ds$ , 使得

$$\dot{\bar{U}}_0(\eta) \leq -\Omega(\eta) + \delta z_1^2 \hat{\gamma}_0(u_0, z_1), \quad (16)$$

其中:  $\Omega(\eta) = \frac{1}{2} \rho \circ \alpha_\eta(\|\eta\|) \alpha_0(\|\eta\|)$ ,  $\rho(\cdot)$  是光滑非减函数,  $\delta > 0$  是未知常数,  $\hat{\gamma}_0(\cdot)$  是光滑非负函数.

记符号  $\bar{\Phi}^d(u_0, x_0, x, \eta, \sigma) = [\bar{\phi}_1^d(\cdot) \dots \bar{\phi}_n^d(\cdot)]^T$ , 及  $L = \text{diag}\{n-1, \dots, 1, 0\}$ , 则系统(14)可以写成

$$\dot{z} = (A - \frac{\dot{u}_0}{u_0} L)z + b u + \bar{\Phi}^d(u_0, x_0, x, \eta, \sigma). \quad (17)$$

构造如下形式的全阶观测器:

$$\dot{\hat{z}} = (A - \frac{\dot{u}_0}{u_0} L)\hat{z} + b u - P C C^T \hat{z}, \quad (18)$$

其中  $C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  和动态增益  $P = (p_{ij}(t))_{n \times n}$  来自以下里卡蒂方程<sup>[11]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{P} = P(A - \frac{\dot{u}_0}{u_0} L)^T + (A - \frac{\dot{u}_0}{u_0} L)P - P C C^T P + I_n, \\ P(0) = P_0 > 0. \end{cases} \quad (19)$$

定义观测误差  $\epsilon = z - \hat{z}$ , 根据式(17)-(18), 可得

$$\dot{\epsilon} = (A - \frac{\dot{u}_0}{u_0} L - P C C^T)\epsilon + z_1 P C + \bar{\Phi}^d(\cdot). \quad (20)$$

对误差系统(20), 有以下引理, 其证明见文献[29].

**引理 4** 考虑系统(20), 选取  $V_\epsilon = \epsilon^T P^{-1}(t)\epsilon$ , 则

$$\dot{V}_\epsilon \leq -\frac{1}{2} \epsilon^T P^{-2} \epsilon + \Theta z_1^2 \varphi_{z_1}(\cdot) + 2 \sum_{i=1}^n \psi_i^4(\eta), \quad (21)$$

其中:  $\varphi_{z_1}(x_0, x_1)$  是依赖于  $(x_0, x_1)$  的已知光滑函数,  $\Theta > 0$  是未知常数.

### 4.2 控制器设计

应用反步法设计控制器. 考虑以下系统:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \hat{z}_2 + \epsilon_2 - (n-1) \frac{\dot{u}_0}{u_0} z_1 + \bar{\phi}_1^d(\cdot), \\ \dot{\hat{z}}_i = \hat{z}_{i+1} - (n-i) \frac{\dot{u}_0}{u_0} \hat{z}_i - C_i^T P C C^T \hat{z}, \\ 2 \leq i \leq n-1, \\ \dot{\hat{z}}_n = u - C_n^T P C C^T \hat{z}. \end{cases} \quad (22)$$

**第1步** 定义  $\xi_1 = z_1$  及  $\xi_2 = \hat{z}_2 - \alpha_1$ , 其中  $\alpha_1$  是第1个虚拟控制律,  $\xi_2$  是误差变量. 记  $\hat{\Theta}$  为  $\Theta$  的估计,  $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$  为估计误差. 选取Lyapunov函数

$$V_1 = \bar{U}_0(\eta) + V_\epsilon + \frac{1}{2} \xi_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2. \quad (23)$$

考虑到引理3和引理4,  $V_1$  沿式(22)的时间导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\Omega(\eta) - \frac{1}{2} \epsilon^T P^{-2} \epsilon - \tilde{\Theta} \dot{\Theta} + \delta z_1^2 \hat{\gamma}_0(u_0, z_1) + \\ & \Theta z_1^2 \varphi_{z_1}(x_0, x_1) + 2 \sum_{i=1}^n \psi_i^4(\eta) + \\ & \xi_1 (\hat{z}_2 + \epsilon_2 - (n-1) \frac{\dot{u}_0}{u_0} z_1 + \bar{\phi}_1^d(\cdot)). \end{aligned} \quad (24)$$

根据引理1和引理2, 有

$$\xi_1 \epsilon_2 \leq \nu \epsilon^T P^{-2} \epsilon + \frac{1}{4\nu} p_{\max}^2 \xi_1^2, \quad \nu > 0, \quad (25)$$

$$\xi_1 \bar{\phi}_1^d(\cdot) \leq \xi_1^2 \varphi_1(u_0, x_0, x_1) \Theta + \frac{1}{4} \xi_1^4 \Theta + \psi_1^2(\eta). \quad (26)$$

考虑到  $\xi_1 = z_1$ , 选取以下形式的虚拟控制律:

$$\alpha_1 = -l_1 \xi_1 - \bar{\varphi}_1(x_0, x_1) - \xi_1 \hat{\varphi}_1(x_0, x_1) \hat{\Theta}, \quad (27)$$

其中  $\bar{\varphi}_1(x_0, x_1) = \frac{1}{4\nu} p_{\max}^2 \xi_1 - (n-1) \frac{\dot{u}_0}{u_0} z_1$ ,  $\hat{\varphi}_1(x_0, x_1) = \hat{\gamma}_0(u_0, z_1) + \varphi_{z_1}(\cdot) + \varphi_1(\cdot) + \frac{1}{4} \xi_1^2$ ,  $\tau_1 = \hat{\varphi}_1(x_0, x_1) \xi_1^2$ .

把式(27)代入式(24), 得到

$$\dot{V}_1 \leq -\Omega(\eta) - \frac{1}{2} \varepsilon^T P^{-2} \varepsilon + \xi_1 \xi_2 + \psi_1^2(\eta) + 2 \sum_{i=1}^n \psi_i^4(\eta) + \tilde{\Theta}(\tau_1 - \dot{\Theta}). \quad (28)$$

**第*i* ( $2 \leq i \leq n$ )步** 假设在第*i*-1步, 已设计虚拟控制律 $\alpha_j$ , 其中 $\xi_j = \hat{z}_j - \alpha_{j-1}$  ( $2 \leq j \leq i$ ), 使 $V_{i-1} = \bar{U}_0(\eta) + V_\varepsilon + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} \xi_j^2 + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2$  导数满足

$$\dot{V}_{i-1} \leq -\Omega(\eta) + \Pi_{i-1}(\varepsilon, \xi, \eta) + 2 \sum_{i=1}^n \psi_i^4(\eta) + \xi_{i-1} \xi_i, \quad (29)$$

其中  $\Pi_i(\varepsilon, \xi, \eta) = -(\frac{1}{2} - i\nu) \varepsilon^T P^{-2} \varepsilon - (l_1 - i) \xi_1^2 - \sum_{j=2}^{i-1} l_j \xi_j^2 + i \psi_1^2(\eta) + (\tilde{\Theta} + \sum_{j=2}^i \xi_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\Theta}})(\tau_i - \dot{\Theta})$ .

接下来, 证明性质(29)在第*i*步也成立. 假设 $\xi_{i+1} = \hat{z}_{i+1} - \alpha_i$ , 考虑函数 $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} \xi_i^2$ . 首先, 根据引理1和引理2, 类似式(25)-(26)的计算, 存在函数

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_i(\cdot) &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_1} \right)^2 (\varphi_1^2(\cdot) + z_1^2), \\ \bar{\varphi}_i(x_0, z_1, \hat{z}_{[i-1]}, \hat{\Theta}, P) &= \left( \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_1} \right)^2 \frac{1}{4\nu} p_{\max}^2 \xi_i - (n-i) \frac{\dot{u}_0}{u_0} \hat{z}_i - C_i^T P C \hat{z}_1 - \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial p_{kl}} \dot{p}_{kl} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_0} \dot{x}_0 - \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{z}_j} \dot{\hat{z}}_j - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_1} \dot{z}_2 + (n-1) \times \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial z_1} \frac{\dot{u}_0}{u_0} z_1 - \xi_i \hat{\varphi}_i(\cdot) \sum_{j=2}^{i-1} \xi_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\Theta}} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\Theta}} \tau_i \end{aligned}$$

和符号 $\tau_i = \tau_{i-1} + \xi_i^2 \hat{\varphi}_i(\cdot)$ , 选取虚拟控制律

$$\alpha_i = -l_i \xi_i - \xi_{i-1} - \bar{\varphi}_i(\cdot) - \xi_i \hat{\varphi}_i(\cdot) \hat{\Theta}, \quad (30)$$

可以得到

$$\dot{V}_i \leq -\Omega(\eta) + \Pi_i(\cdot) + 2 \sum_{i=1}^n \psi_i^4(\eta) + \xi_i \xi_{i+1}. \quad (31)$$

**注5** 考虑到该种情况下,  $u_0(t) \neq 0, t \geq t_0$ , 设计的虚拟控制律 $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )是光滑的. 此外, 根据文献[11]中引理2, 里卡蒂矩阵微分方程(19)的解 $P = (p_{kl}(t))_{n \times n}$ 是连续可微的, 因此 $\dot{p}_{kl}(t)$ 存在.

特别地, 当 $i = n$ 时, 选取控制律及参数自适应律

$$u = \alpha_n(x_0, z_1, \hat{z}, \hat{\Theta}, P), \quad \dot{\hat{\Theta}} = \tau_n, \quad (32)$$

使得 $V_n = \bar{U}_0(\eta) + V_\varepsilon + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^2$  满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -\Omega(\eta) + n \psi_1^2(\eta) - \left( \frac{1}{2} - n\nu \right) \varepsilon^T P^{-2} \varepsilon - (l_1 - n) \xi_1^2 - \sum_{i=2}^n l_i \xi_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \psi_i^4(\eta). \quad (33) \end{aligned}$$

考虑假设3, 存在一恰当的函数 $\rho(\cdot)$ 使得

$$\frac{1}{8} \Omega(\eta) \geq \max \left\{ 2 \sum_{i=1}^n \psi_i^4(\eta), n \psi_1^2(\eta) \right\}. \quad (34)$$

选取  $0 < \nu \leq \frac{1}{4n}, l_1 \geq n+1, l_i \geq 1 (i = 2, \dots, n)$ , 有

$$\dot{V}_n \leq -\frac{1}{4} \Omega(\eta) - \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \frac{1}{4} \varepsilon^T P^{-2} \varepsilon. \quad (35)$$

接下来, 应用切换策略来避免 $x_0(t_0) = 0$ 时系统不可控导致的非奇异问题.

### 4.3 切换控制策略

在 $x_0(t_0) = 0$ 的情形, 在切换前, 选取常控制律

$$u_0 = \bar{u}_0, \quad \bar{u}_0 > 0. \quad (36)$$

根据 $x_0(t_0) = 0$ , 可以得到 $\dot{x}_0(t_0) = \bar{u}_0$ . 由 $x_0(t_0) \times \varphi_0(x_0(t_0)) = 0 < \bar{u}_0$ 和函数 $\varphi_0(x_0)$ 的光滑性, 存在 $x_0(t_0) = 0$ 的一个小邻域 $\Omega$ , 使得

$$x_0 \varphi_0(x_0) < \bar{u}_0. \quad (37)$$

假设 $x_0^*$ 满足 $x_0^* \varphi_0(x_0^*) = \bar{u}_0$ , 从而在邻域 $\Omega$ 内 $x_0(t)$ 增长直到在 $t^* > t_0$ 时刻 $x_0^* \varphi_0(x_0^*) = \bar{u}_0$ . 进一步地, 有 $0 < x_0(t) < x_0^*$ . 在时间区间 $[t_0, t^*]$ 内, 基于反步法设计输出反馈控制律 $u_{[t_0, t^*]}$ , 即

$$u_{[t_0, t^*]} = -l_n \xi_n - \xi_{n-1} - \bar{\varphi}_n^*(\cdot) - \xi_n \hat{\varphi}_n(\cdot) \hat{\Theta}, \quad (38)$$

其中 $\bar{\varphi}_n^*(x_0, z_1, \hat{z}, \hat{\Theta}, P)$ 为光滑函数.

### 4.4 主要结论

综合上述分析, 给出本文主要结论.

**定理1** 若系统(1)满足假设1-3, 通过选取设计参数  $0 < \nu \leq \frac{1}{4n}, l_1 \geq n+1, l_i \geq 1 (i = 2, \dots, n)$ , 借助上述切换控制策略, 则文中提出的控制方案可以实现闭环系统的全局一致渐近稳定性.

**证** 首先, 考虑 $x_0(t_0) \neq 0$ 的情形. 根据式(35), 可以得到 $(x_0(t), \varepsilon(t), \eta(t), \xi(t), \hat{\Theta}(t))$ 是有界的. 由 $(\varepsilon_1, \xi_1)$ 的有界性, 得到 $\hat{z}_1$ 是有界的. 由式(27), 得到 $\alpha_1$ 是有界的. 根据 $(\xi_2, \xi_2)$ 的有界性, 可以得到 $\hat{z}_2$ 是有界的. 应用递推的方式, 可以得到 $\hat{z}_i (i = 3, \dots, n)$ 是有界的. 考虑到 $x_i = z_i u_0^{n-i}$ 和 $u_0$ 有界, 得到 $x_i$ 有界,  $i = 1, \dots, n$ . 这证明了有限逃逸时间不会发生. 因此,  $[0, \infty)$ 是保证解的存在唯一性的最大区间.

进一步, 由LaSalle不变原理<sup>[30]</sup>, 得到 $\varepsilon(t), \eta(t), \xi(t)$ 收敛到原点. 由 $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_1(t) = 0$ , 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{z}_1(t) = 0$ . 考虑到式(27), 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_1(t) = 0$ , 从

而有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{z}_2(t) = 0$ . 类似可证,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{z}_i(t) = 0 (i = 3, \dots, n)$ . 由  $\varepsilon = z - \hat{z}$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t) = 0$ , 得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) = 0 (i = 1, \dots, n)$ . 考虑到  $x_i = z_i u_0^{n-i} (i = 1, \dots, n)$  和  $u_0$  有界, 得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, i = 1, \dots, n. \quad (39)$$

其次, 当  $x_0(t_0) = 0$  时, 应用常数控制律(36)使得在时间区间  $[t_0, t^*)$  内, 有  $0 < x_0(t) < x_0^*$ . 同时, 在区间  $[t_0, t^*)$  内, 基于反步法设计输出反馈控制律  $u_{[t_0, t^*)}$ , 保证闭环系统信号有界. 考虑到  $x_0(t^*) \neq 0$ , 在  $t \geq t^*$  时, 控制律  $u_0$  和  $u$  分别切换到式(12)(32). 即, 当  $x_0(t_0) = 0$  时, 选取以下切换控制律:

$$u_0 = \begin{cases} \text{式(36)}, & t_0 < t < t^*, \\ \text{式(12)}, & t^* < t < +\infty, \end{cases} \quad (40)$$

$$u = \begin{cases} \text{式(38)}, & t_0 < t < t^*, \\ \text{式(32)}, & t^* < t < +\infty, \end{cases} \quad (41)$$

根据上述分析, 使得系统(1)渐近调节到原点. 证毕.

### 5 仿真例子

考虑以下带有动态不确定性的三维非完整系统:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -k\eta + \sigma x_1, k > 0, \\ \dot{x}_0 = u_0 + x_0, \\ \dot{x}_1 = x_2 u_0 + d(t)x_1 + \eta x_1^2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (42)$$

其中:  $\eta$  是动态不确定性, 满足输入状态稳定性条件;  $\sigma$  是未知参数;  $d(t)$  是有界外部扰动, 满足  $|d(t)| \leq d_{\max}, t \geq 0$ , 其中  $d_{\max} > 0$  是未知常数.

假设  $t_0 = 0$ . 首先考虑  $x_0(0) \neq 0$  的情形. 选取  $u_0 = -\lambda_0 x_0 - x_0$  其中  $\lambda_0 > 0$ , 则  $\dot{x}_0 = -\lambda_0 x_0, x_0(t) = x_0(0)e^{-\lambda_0 t}, u_0(t) = -(\lambda_0 + 1)x_0(0)e^{-\lambda_0 t}$ . 定义  $z_1 = \frac{x_1}{u_0}, z_2 = x_2$ , 得到  $z$ -系统(14).

设计如同形式(18)的观测器, 应用文中提出的自适应镇定控制方案, 可以得到以下形式的控制律:

$$u = -l_2 \xi_2 - \xi_1 - \bar{\varphi}_2(\cdot) - \xi_2 \hat{\varphi}_2(\cdot) \hat{\Theta}, \quad (43)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = \tau_2 = \hat{\varphi}_1(\cdot) \xi_1^2 + \hat{\varphi}_2(\cdot) \xi_2^2, \quad (44)$$

其中:  $\alpha_1 = -l_1 \xi_1 - \bar{\varphi}_1(\cdot) - \xi_1 \hat{\varphi}_1(\cdot) \hat{\Theta}, \bar{\varphi}_1(x_0, x_1) = \frac{1}{4\nu} p_{\max}^2 \xi_1 - \frac{\dot{u}_0}{u_0} z_1, \hat{\varphi}_1(x_0, x_1) = 1 + 2u_0^2 + \sqrt{1 + x_1^2} + \frac{1}{4} \xi_1^2, \hat{\varphi}_2(x_0, z_1, \hat{z}_1, \hat{\Theta}, P) = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} \right)^2 (1 + x_1^2 + z_1^2), \bar{\varphi}_2(x_0, z_1, \hat{z}_1) = \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} \right)^2 \frac{1}{4\nu} p_{\max}^2 \xi_2 - C_2^T P C \hat{z}_1 - \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_{kl}} \dot{p}_{kl} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0} \dot{x}_0 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} \hat{z}_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1} \frac{\dot{u}_0}{u_0} z_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\Theta}} \tau_2,$  及  $C^T = [1 \ 0], C_2^T = [0 \ 1]$ .

当  $x(0) = 0$  时, 应用切换控制设计控制律  $u_0$  和  $u$ . 在仿真中, 选取干扰  $d(t) = d_{\max} \sin(10t)$ , 参数及

初始条件:  $\bar{u}_0 = 0.5, \lambda_0 = 1, l_1 = 2, l_2 = 1, k = 1.5, \sigma = 1, \nu = \frac{1}{4}, d_{\max} = 1$ , 及  $x_0(0) = 0, x_1(0) = 0.1, x_2(0) = -0.5, \eta(0) = 0, \hat{\Theta}(0) = 0.5, P(0) = I_2$ .

仿真结果如图 2-4 所示. 在初始状态  $x_0(0) = 0$  时, 根据文中切换控制策略, 闭环系统在时刻  $t^* = 1.069$  s 发生了切换. 图 2 表示了系统(42)存在动态扰动  $\eta(t)$  及静态干扰  $d(t) = d_{\max} \sin(10t)$  的情况下, 闭环系统(42)-(44)状态在  $t = 10$  s 时收敛到了零, 图 3 显示了自适应估计  $\hat{\Theta}(t)$  是有界的, 图 4 表明了控制律  $u_0$  和  $u$  在时刻  $t^* = 1.069$  s 发生了切换, 并在  $t = 10$  s 时收敛到零. 从图中可以看出, 本文提出的不连续控制方案能够有效处理带有 ISS 动态不确定性及未知参数的链式非完整系统的镇定控制问题.

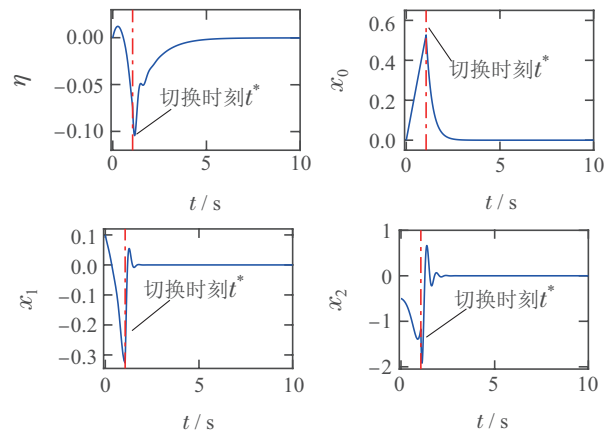


图 2 闭环系统(42)–(44)的状态

Fig. 2 The states in closed-loop system (42)–(44)

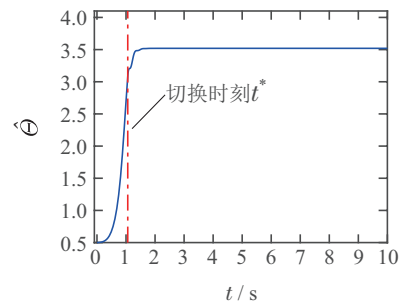


图 3 闭环系统(42)–(44)的自适应估计

Fig. 3 The adaptive estimate in closed-loop system (42)–(44)

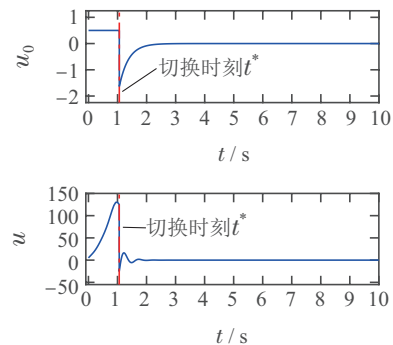


图 4 闭环系统(42)–(44)的控制输入

Fig. 4 The control inputs in closed-loop system (42)–(44)

## 6 结束语

本文研究了一类具有动态不确定性及未知参数的不确定非完整系统的自适应输出反馈镇定问题. 应用输入-状态缩放技术, 通过构造动态观测器估计不可测状态, 提出了一新的自适应镇定控制方案. 所设计的不连续控制器能够使得闭环系统状态收敛到原点, 并保证系统所有信号有界. 在将来的研究中, 可以考虑具有非线性参数化的非完整系统的镇定控制问题.

## 参考文献:

- [1] MEI Fengxiang. *Fundamentals of Mechanics for Nonholonomic Systems*. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1985. (梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985.)
- [2] DONG Wenjie, HUO Wei. Exponential stabilization of the dynamic nonholonomic control systems and its application to wheeled mobile robot. *Robot*, 1998, 20(2): 88 – 92. (董文杰, 霍伟. 动态非完整控制系统的指数镇定及其在一类车式机器人中的应用. 机器人, 1998, 20(2): 88 – 92.)
- [3] BROCKETT R W. Asymptotic stability and feedback stabilization. *Differential Geometric Control Theory*, 1983, 27(1): 181 – 191.
- [4] FENG Wenli, ZHANG Dongkai, WANG Chaoli, et al. Review and prospect of stochastic nonholonomic control systems. *Journal of Nanjing University of Information Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2017, 9(3): 314 – 318. (冯文莉, 张东凯, 王朝立, 等. 随机非完整系统控制问题综述与展望. 南京信息工程大学学报(自然科学版), 2017, 9(3): 314 – 318.)
- [5] ASTOLFI A. Discontinuous control of nonholonomic systems. *Systems & Control Letters*, 1996, 27(1): 37 – 45.
- [6] HUANG J, CHEN J, FANG H, et al. An overview of recent progress in high-order nonholonomic chained system control and distributed coordination. *Journal of Control and Decision*, 2015, 2(1): 64 – 85.
- [7] AJORLOU A, ASADI M M, AGHDAM A G, et al. Distributed consensus control of unicycle agents in the presence of external disturbances. *Systems & Control Letters*, 2015, 82(8): 86 – 90.
- [8] JIANG Z P. Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties. *Automatica*, 2000, 36(2): 189 – 209.
- [9] GE S S, WANG Z P, LEE T H. Adaptive stabilization of uncertain nonholonomic systems by state and output feedback. *Automatica*, 2003, 39(8): 1451 – 1460.
- [10] LIU Y G, ZHANG J F. Output feedback adaptive stabilization control design for nonholonomic systems with strong nonlinear drifts. *International Journal of Control*, 2005, 78(7): 474 – 490.
- [11] XI Z R, FENG G, JIANG Z P, et al. Output feedback exponential stabilization of uncertain chained systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2007, 344(1): 36 – 57.
- [12] WU Y Q, ZHAO Y, YU J B. Global asymptotic stability controller of uncertain nonholonomic systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, 350(5): 1248 – 1263.
- [13] WU Y Y, WU Y G. Robust stabilization of delayed nonholonomic systems with strong nonlinear drifts. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11(5): 3620 – 3627.
- [14] LIU Z G, WU Y Q, SUN Z Y. Output feedback control for a class of high-order nonholonomic systems with complicated nonlinearity and time-varying delay. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(11): 4289 – 4310.
- [15] ZHAO Y, YU J B, WU Y Q. State-feedback stabilization for a class of more general high order stochastic nonholonomic systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2011, 25(8): 687 – 706.
- [16] GAO F Z, YUAN F S. Adaptive stabilization of stochastic nonholonomic systems with nonlinear parameterization. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(16): 8676 – 8686.
- [17] ZHANG Dongkai, WANG Chaoli, CHEN Hua. Adaptive state-feedback stabilization for stochastic nonholonomic chained systems. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(11): 1479 – 1487. (张东凯, 王朝立, 陈华. 随机非完整链式系统的自适应状态反馈镇定. 控制理论与应用, 2012, 29(11): 1479 – 1487.)
- [18] DO K D. Global inverse optimal stabilization of stochastic nonholonomic systems. *Systems & Control Letters*, 2015, 75(1): 41 – 55.
- [19] WANG H, ZHU Q X. Adaptive output feedback control of stochastic nonholonomic systems with nonlinear parameterization. *Automatica*, 2018, 98(12): 247 – 255.
- [20] GAO F Z, WU Y Q. Finite-time output feedback stabilisation of chained-form systems with inputs saturation. *International Journal of Control*, 2017, 90(7): 1466 – 1477.
- [21] SHI S, XU S Y, FENG H Y. Robust fixed-time consensus tracking control of high-order multiple nonholonomic systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(3): 1869 – 1880.
- [22] SANCHEZ-TORRES J, DEFOORT M, MUNOZ-VAZQUEZ A. Predefined-time stabilisation of a class of nonholonomic systems. *International Journal of Control*, 2020, 93(12): 2941 – 2948.
- [23] WU K, SUN C Y. Output feedback control for nonholonomic systems with non-vanishing disturbances. *International Journal of Control*, 2020, 93(10): 2480 – 2489.
- [24] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(4): 435 – 443.
- [25] JIANG Z P, MAREELS I. Robust nonlinear integral control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(8): 1336 – 1342.
- [26] JIANG Z P, MAREELS I, HILL D J, et al. A unifying framework for global regulation via nonlinear output feedback: From ISS to iISS. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(4): 549 – 562.
- [27] LIU K, SEURET A. Comparison of bounding methods for stability analysis of systems with time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(7): 2979 – 2993.
- [28] YU J B, LV H L, WU Y Q. Global adaptive regulation control for a class of nonlinear systems with unknown control coefficients. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2016, 30(6): 843 – 863.
- [29] YU J B, ZHAO Y. Global robust stabilization for nonholonomic systems with dynamic uncertainties. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(3): 1357 – 1377.
- [30] HONG Yiguang, CHENG Daizhan. *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Beijing: Science Press, 2005. (洪奕光, 程代展. 非线性系统的分析与控制. 北京: 科学出版社, 2005.)

## 作者简介:

于江波 副教授, 项目研究员, 博士, 目前研究方向为自适应控制、非线性系统及非完整系统控制, E-mail: jbyu@sdjzu.edu.cn;

赵彦 副教授, 博士, 目前研究方向为非完整系统控制, E-mail: zhaoyan@sdjzu.edu.cn;

田洁 副教授, 博士, 目前研究方向为随机非线性系统控制等, E-mail: tjie9801@163.com.