

不确定非线性系统的全状态约束镇定控制

贾付金^{1,2†}, 张天良², 陆俊伟³

(1. 安徽大学 电气工程与自动化学院, 安徽 合肥 230039; 2. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094;

3. 南京师范大学 电气与自动化工程学院, 江苏 南京 210023)

摘要: 本文研究了一类具有未知函数非线性系统的全状态约束镇定控制. 与解决未知函数问题的模糊逼近方法和神经网络逼近方法不同, 本文提出的控制方法可以使系统状态渐近收敛到原点, 并解决了反步法的“微分爆炸”问题. 同时, 与解决全状态约束控制问题的障碍Lyapunov函数不同, 本文提出了一种新的全状态约束方法和引入的引理相结合设计的算法, 可使得状态是渐近稳定的. 最后, Duffing系统和单连杆机器人系统的仿真结果验证了本文算法的有效性.

关键词: 非线性系统; 全状态约束; 反步法; 障碍Lyapunov函数

引用格式: 贾付金, 张天良, 陆俊伟. 不确定非线性系统的全状态约束镇定控制. 控制理论与应用, 2024, 41(12): 2393 – 2400

DOI: 10.7641/CTA.2023.20731

Full-state constraints stabilization control for uncertain nonlinear systems

JIA Fu-jin^{1,2†}, ZHANG Tian-liang², LU Jun-wei³

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Anhui University, Hefei Anhui 230039, China;

2. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;

3. School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing Jiangsu 210023, China)

Abstract: In this paper, the full-state constraints stabilization control for a class of nonlinear systems with unknown functions is studied. Different from the fuzzy approximation method and the neural network approximation method for solving the unknown function problem, the control method in this paper can make the system state asymptotically converge to the origin, and solve the “explosion of terms” problem of the backstepping method. At the same time, different from the barrier Lyapunov functions for solving the full-state constraints control problem, a new full-state constraints method is proposed to make the state asymptotically stable. Finally, the simulation results of Duffing system and single-link robot verify the effectiveness of this algorithm.

Key words: nonlinear systems; full-state constraints; backstepping; barrier Lyapunov functions

Citation: JIA Fujin, ZHANG Tianliang, LU Junwei. Full-state constraints stabilization control for uncertain nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(12): 2393 – 2400

1 引言

近年来, 非线性系统的镇定控制一直是控制理论中的主要问题之一, 并且受到了许多学者的广泛关注^[1-5]. 更强的非线性和更多的不确定性往往使系统更具一般性, 但这也给非线性系统控制分析和设计带来困难. 早些年, 针对具有未知参数非线性系统的控制问题被广泛研究^[6-8].

从受控系统的结构来看, 非线性函数是非线性系统的主要特征之一^[9-11]. 从相关成果来看, 处理具有未知函数非线性系统镇定控制的主要方法有模糊逼近法和神经网络逼近法^[12-16]. 例如, 文献[12]中用模糊逻辑函数逼近未知函数, 使具有未知函数的非线性系统的镇定控制问题转化为未知参数的镇定控制问题, 同时, 基于自适应控制设计出控制器和自适应律.

收稿日期: 2022-08-17; 录用日期: 2023-10-24.

†通信作者. E-mail: fujinjia1234@163.com; Tel.: +86 14751716559.

本文责任编辑: 武玉强.

国家自然科学基金项目(62303001), 安徽大学引进人才科研启动经费项目(S020318002/007), 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX21-0305)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62303001), the Research Start Fund of Anhui University (S020318002/007) and the Postgraduate Research & Practice Innovation Program of Jiangsu Province (KYCX21-0305).

因此, 这些方法成功地解决了具有未知函数非线性系统的镇定控制问题. 事实上, 逼近控制方法只能得到闭环系统的半全局一致最终有界的结果. 这种结果使得系统状态可以收敛到给定的任意小的邻域内, 但很难使得系统状态收敛到零点. 随着工业的发展, 对精度的要求也越来越高, 追求使得系统状态收敛到零点的方案是非常有必要的.

目前, 已有许多控制方法可以使具有未知函数的非线性系统的状态收敛到原点^[17-20]. 这些控制方法主要通过引入未知函数的假设条件, 然后基于反步法等控制方法设计出控制器, 来完成对受控系统的控制. 在文献[21]中, 将未知函数的假设条件和所谓的指数变换应用于系统, 设计出了鲁棒控制算法, 以实现具有未知函数的非线性系统的指数跟踪. 文献[22]通过使用非奇异终端滑模控制和未知函数的假设, 获得了一类不确定非线性系统的全局有限时间镇定控制算法. 在文献[23]中, 对于一类非线性系统, 可以设计输出反馈控制器, 在适当的假设下得到了全局渐近稳定控制算法. 从上述文献中可以看出, 这些方法很好的解决了相应的控制问题. 然而, 这些假设增加了受控系统的保守性. 因此, 如何减少未知函数的假设来解决非线性系统的镇定控制问题是一个有意义的问题.

另一方面, 约束在实际系统中无处不在, 忽视这些约束可能会损坏设备并导致一些意外情况. 因此, 约束控制也成为非线性控制理论的一个重要研究方向. 目前, 基于障碍Lyapunov函数的控制方法是解决全状态约束非线性系统镇定控制问题的有效方法^[10,24-28]. 该方法利用Lyapunov稳定性理论设计出控制器和自适应律, 以保证障碍Lyapunov函数有界, 从而使系统状态满足约束条件. 从许多文献中可以看出^[10,24-28], 具有全状态约束非线性系统的镇定控制主要是半全局一致最终有界的结果, 但很难使系统状态渐近收敛到零点. 因此, 设计一种使系统状态同时满足全状态约束控制和渐近稳定的控制方案是非常重要的.

本文研究了具有未知函数非线性仿射系统的全状态约束镇定控制. 其创新点如下:

1) 综上所述, 目前处理未知函数的控制算法是逼近方法^[12-16], 不能使系统状态渐近收敛到零点. 本文设计的控制方法避免了逼近算法的缺陷, 不仅使系统状态收敛到原点, 而且避免了未知函数的假设, 这降低了控制算法的保守性;

2) 本文利用反步法设计的控制算法. 众所周知, 反步法存在“微分爆炸”问题^[29]. 本文提出的算法解决了反步法中的“微分爆炸”问题, 从而减少了算法的计算量;

3) 目前, 大部分文献采用动态表面控制和直接模糊方法来解决反步法的“微分爆炸”问题^[30-31]. 与这

两种方法相比, 本文的方法使系统状态渐近收敛到原点, 但这两类方法不能达到这一结果.

4) 在解决全状态约束问题上, 与障碍Lyapunov函数方法不同^[10,24-28], 本文提出了一种新的时变全状态约束控制算法. 与基于障碍Lyapunov函数和逼近方法设计的控制算法相比, 本文的算法不仅仅解决了全约束控制问题, 而且使得系统状态收敛到原点.

本文剩余的结构安排如下: 第2节描述了本文研究的问题; 第3节设计了本文的控制器; 第4节是本文的稳定性分析内容; 第5节是本文的仿真部分; 第6节是本文的结论部分.

2 问题描述

考虑下面不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_n = u + f_n(x_1, \dots, x_n), \\ y = x_1, \quad i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x = [x_1 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态, $u \in \mathbb{R}$ 是系统输入, $y \in \mathbb{R}$ 系统输出, 并且 $f_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$) 是满足 $f_i(0, \dots, 0) = 0$ 的未知光滑函数.

控制目标: 结合状态反馈控制和全状态约束控制, 设计出控制器 u , 使得非线性系统(1)满足下面的结论:

1) 系统状态 $x_i(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$;

2) 同时, 系统状态 $x_i(t)$ 满足时变约束条件: $A_i(t) < x_i(t) < \bar{A}_i(t)$, 其中 $A_i(t) > 0$ 是一个适当可设计的光滑函数, 并且满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} A_i(t) = a_i$, $a_i > 0$ 是一个参数;

3) 闭环系统的所有的信号是有界的.

为了解决系统(1)的全状态约束控制问题, 下面的引理被提出并证明.

引理 1 存在两个根号特征的光滑函数

$$\begin{cases} Y_1(L) = \sqrt{\delta} - \sqrt{\delta - L^2}, \\ Y_2(L) = \frac{L^2}{\sqrt{\delta - L^2}}, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $0 < \delta \leq 1$ 是一个参数, L 是一个光滑函数. 如果 $L \in (-\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta})$, 那么

$$Y_1(L) \leq Y_2(L). \quad (3)$$

证 让 $Y_2(L)$ 减去 $Y_1(L)$, 可得

$$Y_2(L) - Y_1(L) = \frac{\delta - \sqrt{\delta}\sqrt{\delta - L^2}}{\sqrt{\delta - L^2}}, \quad (4)$$

由上式可知, 如果 $L = 0$, 那么 $Y_2(L) = Y_1(L)$. 在 $-\sqrt{\delta} < L < \sqrt{\delta}$ 上, 可以得到下面的结论:

$$\sqrt{\delta - L^2} \leq \sqrt{\delta} \Rightarrow \delta - \sqrt{\delta}\sqrt{\delta - L^2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$Y_2(L) - Y_1(L) \geq 0 \Rightarrow Y_2(L) \geq Y_1(L). \quad (5)$$

证毕.

引理 2 对于一阶系统 $\dot{x} = u$, 在紧集 $\Omega := \{|L| < \sqrt{\delta}\}$ 中构造 Lyapunov 函数 $V(L) = Y_1(L)$, 其中 $L = \frac{x}{A_c}$, $A_c > 0$ 是一个光滑函数. 同时, $\lim_{t \rightarrow \infty} A_c = a_c$, 其中 a_c 是一个正参数. 如果设 $u = -A_c L + \frac{1}{A_c} \dot{A}_c x$, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$, 并且 $-A_c < x < A_c$.

证 根据上述对 L 和 V 的定义, V 的时间导数为

$$\dot{V} = \frac{L}{A_c \sqrt{\delta - L^2}} [u - \frac{1}{A_c} \dot{A}_c x], \quad (6)$$

将 u 代入式(6), 根据引理 1 可得

$$\dot{V} = -\frac{L^2}{\sqrt{\delta - L^2}} \leq \sqrt{\delta} - \sqrt{\delta - L^2} = -V. \quad (7)$$

从上式, 可以推出下面两个结论:

1) 根据 Barbalat 引理, 可知

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\delta} - \sqrt{\delta - L^2} = 0 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} L = 0 \Rightarrow \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x}{a_c} = 0 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

2) 从式(7), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq -V(t) &\Rightarrow V(t) \leq V(0)e^{-t} \Rightarrow \\ -\sqrt{\delta - (\sqrt{\delta} - V(0)e^{-t})^2} &\leq L(t) \leq \\ \sqrt{\delta - (\sqrt{\delta} - V(0)e^{-t})^2} &\Rightarrow \\ -1 \leq -\sqrt{\delta} < \frac{x(t)}{A_c(t)} < \sqrt{\delta} \leq 1 &\Rightarrow \\ A_c(t) < x(t) < A_c(t). & \quad (9) \end{aligned}$$

本文是基于反步法设计的控制算法, 为了解决具有未知函数的非线性系统(1)的渐近稳定问题, 并且避免系统中未知函数的假设条件和逼近方法的不足, 引入了以下引理. 证毕.

引理 3^[32] 如果 $f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}$ 作为一个 C^1 函数, 并且对于 $\sigma_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, n)$, 满足 $f(0, \dots, 0) = 0$. 那么, 存在一个光滑函数 $h_i(\sigma_i) \geq 0$ 使得

$$f^2(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \leq n \sum_{i=1}^n h_i^2(\sigma_i) \sigma_i^2. \quad (10)$$

3 控制器设计

在本节中, 利用反步法以设计控制律.

第 1 步 定义变换 $z_1 = x_1$ 和 $z_2 = x_2 - \alpha_1(z_1)$, 其中 $\alpha_1(z_1)$ 是一个虚拟控制器. 根据式(1), z_1 的导数为

$$\dot{z}_1 = x_2 + f_1(x) = z_2 + \alpha_1(z_1) + f_1(x). \quad (11)$$

定义 Lyapunov 函数

$$V_1 = \sqrt{\delta_1} - \sqrt{\delta_1 - L_1^2}, \quad (12)$$

其中: $\delta_1 \leq 1$ 是一个可设计的正参数; $L_1 = \frac{z_1}{A_1}$, A_1 是

一个适当可设计的约束函数.

根据式(11), V_1 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{L_1}{A_1 \sqrt{\delta_1 - L_1^2}} [\dot{z}_1 - \frac{1}{A_1} \dot{A}_1 z_1] = \\ &= \frac{L_1}{A_1 \sqrt{\delta_1 - L_1^2}} [z_2 + \alpha_1(z_1) + \\ &= f_1(x) - \frac{1}{A_1} \dot{A}_1 z_1]. \end{aligned} \quad (13)$$

由 Young 的不等式, 可得下面的不等式:

$$\frac{L_1}{A_1 \sqrt{\delta_1 - L_1^2}} f_1(x) \leq \frac{\kappa_1}{4} f_1^2(x) + \frac{1}{\kappa_1} \frac{L_1^2}{A_1^2 (\delta_1 - L_1^2)}, \quad (14)$$

其中 κ_1 是可设计的正参数. 那么, 设计虚拟控制器 $\alpha_1(z_1)$ 为

$$\begin{aligned} \alpha_1(z_1) &= -c_1 L_1 A_1 - c_1^*(z_1) z_1 A_1^2 \sqrt{\delta_1 - L_1^2} - \\ &= \frac{1}{\kappa_1} \frac{L_1}{A_1 \sqrt{\delta_1 - L_1^2}} + \frac{1}{A_1} \dot{A}_1 z_1, \end{aligned} \quad (15)$$

其中: $c_1 > 0$ 是一个可设计的参数, $c_1^*(z_1) \geq 0$ 是一个可设计的函数.

将式(14)-(15)代入式(13), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -c_1 \frac{L_1^2}{\sqrt{\delta_1 - L_1^2}} - c_1^*(z_1) z_1^2 + \\ &= \frac{\kappa_1}{4} F_1^2(x) + \frac{L_1}{A_1 \sqrt{\delta_1 - L_1^2}} z_2, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $F_1(x) = f_1(x)$.

第 i 步 ($2 \leq i \leq n - 1$) 这一步, 首先定义坐标变换为 $z_i = x_i - \alpha_{i-1}(\bar{z}_{i-1})$ 和 $z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i(\bar{z}_i)$, 其中, $\alpha_{i-1}(\bar{z}_{i-1})$ 和 $\alpha_i(\bar{z}_i)$ 是虚拟控制器, 并且 $\bar{z}_i = (z_1, \dots, z_i)$. 根据式(1), z_i 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= x_{i+1} + f_i(x) - \dot{\alpha}_{i-1}(\bar{z}_{i-1}) = \\ &= z_{i+1} + \alpha_i(\bar{z}_i) + F_i(x), \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} F_i(x) &= f_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}(\bar{z}_{i-1})}{z_j} \dot{z}_j - \\ &= \frac{\partial \alpha_{i-1}(\bar{z}_{i-1})}{\partial A_{i-2}} \dot{A}_{i-2} - \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \alpha_{i-1}(\bar{z}_{i-1})}{\partial A_{i-1}^{(j-1)}} \dot{A}_{i-1}^{(j)}. \end{aligned} \quad (18)$$

定义 Lyapunov 函数

$$V_i = V_{i-1} + \sqrt{\delta_i} - \sqrt{\delta_i - L_i^2}, \quad (19)$$

其中: $\delta_i \leq 1$ 是一个可设计的正参数; $L_i = \frac{z_i}{A_i}$, A_i 是一个适当可设计的约束函数.

根据式(17), V_i 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \frac{L_j^2}{\sqrt{\delta_j - L_j^2}} - \sum_{j=1}^{i-1} c_j^*(z_j) z_j^2 + \\ & \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\kappa_j}{4} F_j^2(x) + \frac{L_{i-1}}{A_{i-1} \sqrt{\delta_{i-1} - L_{i-1}^2}} z_i + \\ & \frac{L_i}{A_i \sqrt{\delta_i - L_i^2}} [z_{i+1} + \alpha_i(\bar{z}_i) + \\ & F_i(x) - \frac{1}{A_i} \dot{A}_i z_i], \end{aligned} \quad (20)$$

根据Young的不等式,可以得到下面不等式:

$$\frac{L_i}{A_i \sqrt{\delta_i - L_i^2}} F_i(x) \leq \frac{\kappa_i}{4} F_i^2(x) + \frac{1}{\kappa_i} \frac{L_i^2}{A_i^2 (\delta_i - L_i^2)}, \quad (21)$$

其中 κ_i 是可设计的正参数.

那么,虚拟控制器 $\alpha_i(\bar{z}_i)$ 可以设计为

$$\begin{aligned} \alpha_i(\bar{z}_i) = & -c_i L_i A_i - c_i^*(z_i) z_i A_i^2 \sqrt{\delta_i - L_i^2} - \\ & \frac{A_i^2 \sqrt{\delta_i - L_i^2}}{A_{i-1}^2 \sqrt{\delta_{i-1} - L_{i-1}^2}} z_{i-1} - \\ & \frac{1}{\kappa_i} \frac{L_i}{A_i \sqrt{\delta_i - L_i^2}} + \frac{1}{A_i} \dot{A}_i z_i, \end{aligned} \quad (22)$$

其中: $c_i > 0$ 是一个可设计的参数, $c_i^*(z_i) \geq 0$ 是一个可设计的函数.

将式(21)-(22)代入到式(20),可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & - \sum_{j=1}^i c_j \frac{L_j^2}{\sqrt{\delta_j - L_j^2}} - \sum_{j=1}^i c_j^*(z_j) z_j^2 + \\ & \sum_{j=1}^i \frac{\kappa_j}{4} F_j^2(x) + \frac{L_i}{A_i \sqrt{\delta_i - L_i^2}} z_{i+1}. \end{aligned} \quad (23)$$

第 n 步 定义坐标变换 $z_n = x_n - \alpha_{n-1}(\bar{z}_{n-1})$, 其中 $\alpha_{n-1}(\bar{z}_{n-1})$ 是一个虚拟控制器. 根据式(1), z_n 的导数为

$$\dot{z}_n = \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1}(\bar{z}_{n-1}) = u + F_n(x), \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} F_n(x) = & f_n(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}(\bar{z}_{n-1})}{z_j} \dot{z}_j - \\ & \frac{\partial \alpha_{n-1}(\bar{z}_{n-1})}{\partial A_{n-2}} \dot{A}_{n-2} - \\ & \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \alpha_{n-1}(\bar{z}_{n-1})}{\partial A_{n-1}^{(j-1)}} \dot{A}_{n-1}^{(j)}. \end{aligned} \quad (25)$$

定义Lyapunov函数

$$V_n = V_{n-1} + \sqrt{\delta_n} - \sqrt{\delta_n - L_n^2}, \quad (26)$$

其中: $\delta_n \leq 1$ 是一个可设计的正参数; $L_n = \frac{z_n}{A_n}$, A_n 是一个适当可设计的约束函数.

根据式(26), V_n 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & - \sum_{j=1}^{n-1} c_j \frac{L_j^2}{\sqrt{\delta_j - L_j^2}} - \sum_{j=1}^{n-1} c_j^*(z_j) z_j^2 + \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\kappa_j}{4} F_j^2(x) + \frac{L_{n-1}}{A_{n-1} \sqrt{\delta_{n-1} - L_{n-1}^2}} z_n + \\ & \frac{L_n}{A_n \sqrt{\delta_n - L_n^2}} [u + F_n(x) - \frac{1}{A_n} \dot{A}_n z_n]. \end{aligned} \quad (27)$$

根据Young的不等式,可以得到下面不等式:

$$\frac{L_n}{A_n \sqrt{\delta_n - L_n^2}} F_n(x) \leq \frac{\kappa_n}{4} F_n^2(x) + \frac{1}{\kappa_n} \frac{L_n^2}{A_n^2 (\delta_n - L_n^2)}, \quad (28)$$

其中 κ_n 是可设计的正参数.

那么,设计控制律 u 为

$$\begin{aligned} u = & -c_n L_n A_n - c_n^*(z_n) z_n A_n^2 \sqrt{\delta_n - L_n^2} - \\ & \frac{A_n^2 \sqrt{\delta_n - L_n^2}}{A_{n-1}^2 \sqrt{\delta_{n-1} - L_{n-1}^2}} z_{n-1} - \\ & \frac{1}{\kappa_n} \frac{L_n}{A_n \sqrt{\delta_n - L_n^2}} + \frac{1}{A_n} \dot{A}_n z_n, \end{aligned} \quad (29)$$

其中: $c_n > 0$ 是一个可设计的参数, $c_n^*(z_n) \geq 0$ 是一个可设计的函数.

将式(28)-(29)代入到式(27),可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & - \sum_{j=1}^n c_j \frac{L_j^2}{\sqrt{\delta_j - L_j^2}} - \sum_{j=1}^n c_j^*(z_j) z_j^2 + \\ & \sum_{j=1}^n \frac{\kappa_j}{4} F_j^2(x). \end{aligned} \quad (30)$$

4 稳定性分析

基于上述控制律,总结了以下定理.

定理 1 考虑式(1)中描述的具有光滑未知函数的非线性系统,在满足不等式(37)的情况下,通过根号障碍Lyapunov函数(26),设计出控制器(29)、虚拟控制器(15)和(22),在 $|L_i(t)| < \sqrt{\delta_i}$ 时,则可以得到以下几个结论:

- 1) 系统所有的状态 $x_i(t) (i = 1, \dots, n)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$;
- 2) 闭环系统的所有信号是有界的;
- 3) 系统状态 $x_i(t)$ 满足时变约束条件: $-A_i(t) < x_i(t) < A_i(t)$, 其中 $A_i(t) > 0$ 是一个适当可设计的光滑函数,并且满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} A_i(t) = a_i, a_i > 0$ 是一个参数.

证 根据不等式(30),可知 $\sum_{j=1}^n \frac{\kappa_j}{4} F_j^2(x) \geq 0$, 下面的推导过程是处理 $\sum_{j=1}^n \frac{\kappa_j}{4} F_j^2(x)$.

- 1) 根据 z_1, \dots, z_n 的定义,下面的等式可以获得 $F_1(x) =$

$$f_1(z_1, z_2 + \alpha_1(z_1), \dots, z_n + \alpha_{n-1}(\bar{z}_{n-1})) = V(t) \leq V(0)e^{-\lambda t}. \quad (41)$$

$$\hat{F}_1(\bar{z}_n). \quad (31)$$

由式(15)(22)可知, 如果 $z_1 = 0, \dots, z_n = 0$, 那么 $\alpha_i(0, \dots, 0) = 0 (i = 1, \dots, n - 1)$, 可得

$$\begin{aligned} \hat{F}_1(0, \dots, 0) = \\ f_1(0, 0 + \alpha_1(0), \dots, 0 + \alpha_{n-1}(0, \dots, 0)) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

根据引理3可知, 存在已知光滑函数 $\varphi_{1j}(z_j) (j = 1, \dots, n)$, 使得

$$\hat{F}_1^2(\bar{z}_n) \leq \sum_{j=1}^n \varphi_{1j}^2(z_j) z_j^2. \quad (33)$$

2) 定义 $\hat{F}_i(\bar{z}_n) = F_i(x), i = 2, \dots, n$. 根据式(15)(22), 如果 $z_i = 0 (i = 1, \dots, n)$, 那么

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{i-1}(\bar{z}_{i-1})}{\partial A_{i-1}} = 0, & \frac{\partial \alpha_{i-1}(\bar{z}_{i-1})}{\partial \dot{A}_{i-1}} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_{i-1}(\bar{z}_{i-1})}{\partial A_{i-2}} = 0, & \frac{\partial \alpha_{i-1}(\bar{z}_{i-1})}{\partial \dot{A}_{i-2}} = 0. \end{cases} \quad (34)$$

因此, $\hat{F}_i(0, \dots, 0) = 0$. 那么, 根据引理3, 存在已知光滑函数 $\varphi_{ij}(z_j) (j = 1, \dots, n)$, 使得

$$\hat{F}_i^2(\bar{z}_n) \leq \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}^2(z_j) z_j^2. \quad (35)$$

结合式(33)(35), 不等式(30)可以重写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & - \sum_{j=1}^n c_j \frac{L_j^2}{\sqrt{\delta_j - L_j^2}} - \sum_{j=1}^n c_j^*(z_j) z_j^2 + \\ & \sum_{j=1}^n \frac{\kappa_j}{4} \hat{F}_j^2(\bar{z}_n) \leq \\ & - \sum_{i=1}^n [c_i^*(z_i) - \sum_{j=1}^n \frac{\kappa_j}{4} \varphi_{ji}^2(z_j)] z_i^2 - \\ & \sum_{i=1}^n c_i \frac{L_i^2}{\sqrt{\delta_i - L_i^2}}. \end{aligned} \quad (36)$$

定义

$$c_i^*(z_i) \geq \sum_{j=1}^n \frac{\kappa_j}{4} \varphi_{ji}^2(z_j). \quad (37)$$

根据引理1, 可得下面的不等式:

$$\dot{V}_n \leq - \sum_{i=1}^n c_i (\sqrt{\delta_i} - \sqrt{\delta_i - L_i^2}). \quad (38)$$

这就产生了

$$\dot{V}_n \leq -\lambda V, \quad (39)$$

其中常数 $\lambda > 0$ 被定义为

$$\lambda = \min\{2c_1, 2c_2, \dots, 2c_n\}. \quad (40)$$

可得

根据式(41)和引理2, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_i = 0, i = 1, \dots, n. \quad (42)$$

如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1 = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0$, 那么, $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_1(z_1) = 0$. 因此, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$. 根据 $x_2 = z_2 + \alpha_1(z_1)$, 可以获得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$. 类似的可以获得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 (i = 3, \dots, n)$.

从Lyapunov函数 $V(t)$ 的定义, 可以得到

$$\sqrt{\delta_i} - \sqrt{\delta_i - L_i^2} \leq V(0)e^{-\lambda t}, i = 1, \dots, n. \quad (43)$$

根据引理2和上述推导过程可知, 本文的算法没有违反全状态约束控制, 可得 $|x_1| < A_1$ 和 $|z_i| < A_i (i = 2, \dots, n)$. 假设 $\alpha_i(\bar{z}_i)$ 的界为 $|\alpha_i(\bar{z}_i)| < A_{\alpha_i}$. 再根据 z_i 的定义 $z_i = x_i - \alpha_{i-1}(\bar{z}_{i-1})$, 可以知道 $|x_i| < |z_i| + |\alpha_{i-1}(\bar{z}_{i-1})| < A_i + A_{\alpha(i-1)}$. 定义 $A_i \leq A_{c_i} - A_{\alpha(i-1)}$, 那么, 可得 $|x_i| < A_{c_i}$. 因此, 受控系统(1)的所有状态 x_1, \dots, x_n 都满足时变全状态约束控制.

注 1 根据上述控制器设计过程, 方程(22)(29)中的虚拟控制器不存在偏导数, 因此本文的控制方法不仅得到了系统状态渐近稳定的控制方案, 而且解决了反步法的“微分爆炸”问题^[29].

注 2 目前, 主要有两种方法可以解决反步法的“微分爆炸”问题: 动态面控制和直接模糊控制^[29-30]. 与这两种方法相比, 本文提出的算法是一种系统状态收敛到零的算法. 因此, 显示了本文算法的优越性.

注 3 为了解决具有未知函数的非线性系统的渐近稳定控制问题, 文献[17-23]首先引入了未知函数的假设. 然后, 采用反步法等方法来设计控制器, 使闭环系统得到全局渐近稳定控制. 例如, 文献[22]解决了具有未知函数的非线性系统的全局输出反馈问题, 它假设系统中的未知函数 $g_i(\eta(t), y(t))$ 满足 $|g_i(\eta(t), y(t))| \leq \mu_{i1} g_{i1}(|\eta|) + \mu_{i2} g_{i2}(|y|)$, 其中 $g_{i1}(|\eta|)$ 和 $g_{i2}(|y|)$ 是已知的光滑函数. 从以上描述可以看出, 尽管这些假设用于解决非线性系统的稳定控制问题, 但它们也增加了控制算法的保守性. 从本文算法的设计过程可知, 没有引入对未知函数的假设条件, 因此减少了保守性.

注 4 本文提出引理3来解决未知函数问题. 实际上引理3不仅解决了非线性系统的镇定问题, 而且文献[33]中的引理(类似于本文的引理3)解决了非线性系统的输出调节问题. 这一结果表明, 本文的算法是有效的, 并且是可行的. 与未知函数的假设相比, 引理3的贡献在于它将假设存在函数 $h_i(\cdot) (i = 1, \dots, n)$ 转化为必然存在函数 $h_i(\cdot)$, 同时也即是式(37)中的 $\varphi_{ij}(\cdot)$. 因此, 本文的算法降低了保守性. 类似于文献[34], 函数 $c_i^*(\cdot)$ 可以在仿真时通过调试参数得到, 那么根据式(37)也可得到 $\varphi_{ji}(\cdot)$.

5 仿真实例

在本节中, 为了说明所提出方案的有效性, 将提出的控制算法应用于下面的系统中.

例1 考虑下面的Duffing系统^[34]:

$$\ddot{y}_1 = u - \gamma_1 y_1 - \gamma_2 y_1^3 - \gamma_3 \dot{y}_1, \quad (44)$$

其中: y_1 是系统输出, γ_1, γ_2 和 γ_3 是系统参数, u 是控制输入. 让 $x_1 = y_1$ 和 $x_2 = \dot{y}_1 + \gamma_3 y_1$. 那么, 重新写系统(44)为

$$\dot{x}_1 = x_2 + f_1(\bar{x}_2), \quad \dot{x}_2 = u + f_2(\bar{x}_2), \quad (45)$$

其中: $f_1(\bar{x}_2) = -\gamma_3 x_1, f_2(\bar{x}_2) = -\gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_1^3$, 并且 $f_1(0, 0) = 0$ 和 $f_2(0, 0) = 0$. 因此, 本文提出的算法可以应用到Duffing系统中, 来解决具有时变全状态约束Duffing系统的镇定控制问题.

定义 $z_1 = x_1$ 和 $z_2 = x_2 - \alpha_1(z_1)$, 那么根据本文的算法设计出虚拟控制器和控制器. 在本例中, 要求系统状态满足 $|x_1(t)| < 1$ 和 $|x_2(t)| < 1$. 在MATLAB仿真上, 系统参数选择为 $\gamma_1 = -1.1, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 0.4$; 控制器参数选择为 $c_1 = 0.5, c_2 = 0.5, c_1^*(z_1) = 0.5z_1^2, c_2^*(z_2) = 0.5z_2^2, A_1 = e^{-t} + 0.05, A_2 = e^{-t} + 0.05$. 如果系统状态的初始值选择为 $x_1(0) = 0.3, x_2(0) = 0.1$, 那么, 仿真的结果如图1-4所示.

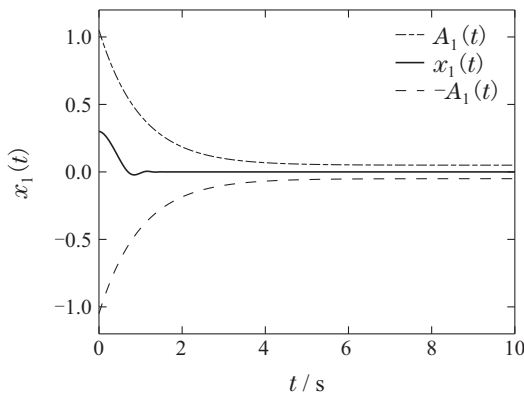


图1 系统状态 $x_1(t)$ 的约束轨迹

Fig. 1 Responses of system state $x_1(t)$

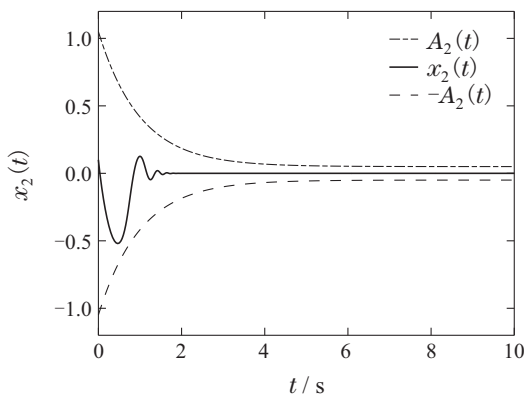


图2 系统状态 $x_2(t)$ 的约束轨迹

Fig. 2 Responses of system state $x_2(t)$

图1和图2分别表示了系统状态 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的约束镇定轨迹; 图3表示在系统开环时的状态 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的轨迹; 图4表示系统控制输入 $u(t)$ 的响应曲线.

仿真结果表明, 在本节的算法可以使得系统(44)的状态 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 不仅仅是渐近稳定的, 而且受了约束. 对比于图3, 表明本文提出的控制算法是有效的.

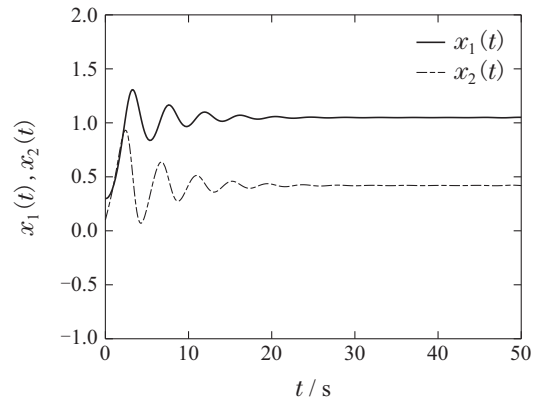


图3 开环系统状态 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的轨迹

Fig. 3 Responses of system states $x_1(t)$ and $x_2(t)$ at open-loop systems

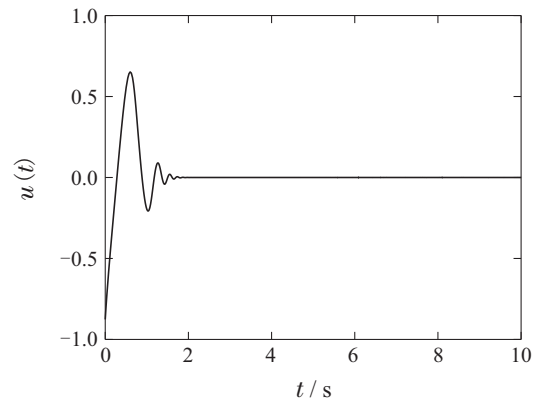


图4 系统的控制信号 $u(t)$

Fig. 4 Control input $u(t)$

例2 考虑下面的单连杆机器人系统^[33], 其动态方程为

$$M_0 \ddot{q} + \frac{1}{2} mgl \sin q = u, \quad y = q, \quad (46)$$

其中: y 是系统输出; u 是输入扭矩; M_0 是惯性矩; q 是角度; g 是重力引起的加速度; m 和 l 分别是连杆的质量和长度. 机器人的参数为 $m = 1, l = 1, M = 0.5$ 和 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

当 $x_1 = q, x_2 = \dot{q}$ 时, 系统(46)可表达为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{u - \frac{mgl \sin x_1}{2}}{M_0}. \quad (47)$$

定义 $z_1 = x_1$ 和 $z_2 = x_2 - \alpha_1(z_1)$, 那么根据本文的算法设计出虚拟控制器和控制器. 在本例中, 要求系统状态满足 $|x_1(t)| < 1$ 和 $|x_2(t)| < 1$. 在MATLAB仿真上, 控制器参数可以选择为 $c_1 = 0.5, c_2 = 0.5$,

$c_1^*(z_1) = 0.5z_1^2, c_2^*(z_2) = 0.5z_2^2, A_1 = 0.9e^{-t} + 0.05, A_2 = 0.9e^{-t} + 0.05$. 如果系统状态的初始值选择为 $x_1(0) = 0.41, x_2(0) = 0.21$, 那么, 仿真的结果如图 5-8 所示.

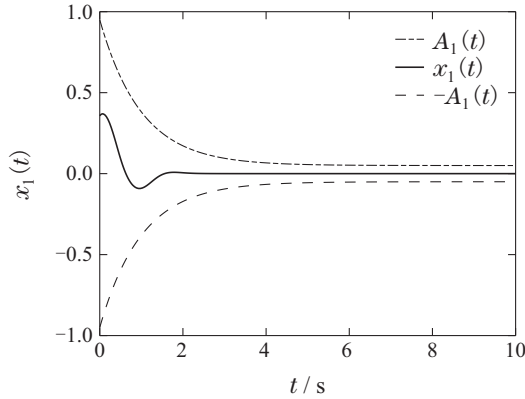


图 5 系统状态 $x_1(t)$ 的约束轨迹

Fig. 5 Responses of system state $x_1(t)$

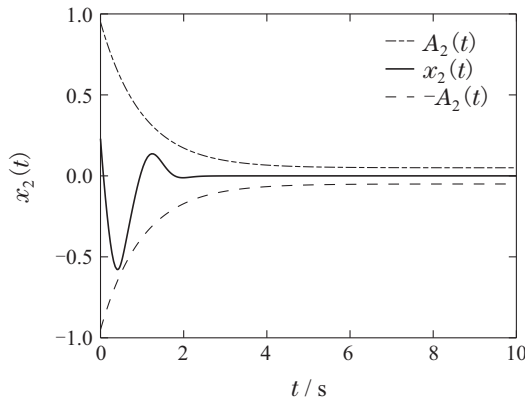


图 6 系统状态 $x_2(t)$ 的约束轨迹

Fig. 6 Responses of system state $x_2(t)$

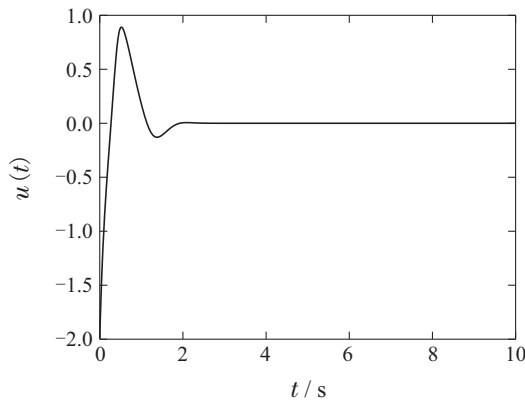


图 7 系统的控制信号 $u(t)$

Fig. 7 Control input $u(t)$

图5和图6分别表示了系统状态 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的约束镇定轨迹; 图7表示系统控制输入 $u(t)$ 的响应曲线. 本文为了说明本文算法的有效性和优越性, 将文献 [32] 的算法应用到单连杆机器人系统(46), 仿真结果如图8所示. 文献[32]提供的是一种全局渐近稳定算

法. 然而, 从仿真结果中不难发现, 在相同的参数环境下, 本文的算法可使得单连杆机器人系统(46)有更好的性能效果: 对比于图8, 图6和图7显示系统状态的超调量更小, 震荡次数更少, 收敛速度更快. 这些表明本文提出的控制算法是具有有效性和优越性的.

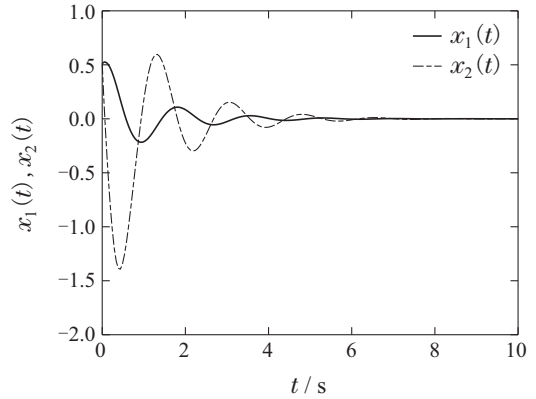


图 8 应用文献[32]的算法得到状态 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的轨迹

Fig. 8 Responses of system states $x_1(t)$ and $x_2(t)$ from [32]

6 结论

本文研究了具有未知函数和时变全状态约束的非线性系统的镇定控制问题. 引理2表明, 本文提出的根号障碍Lyapunov约束函数, 它不同于传统的障碍Lyapunov来解决全状态约束问题. 引理3的提出不仅解决了具有未知函数的非线性系统的渐近稳定控制问题, 而且避免了反步法的“微分爆炸”问题. 同时, 引理3的利用也避免了未知函数的假设条件, 降低了受控系统的保守性. 最后, 通过仿真验证了该算法的有效性.

参考文献:

- [1] AEYELS D. Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control. *Systems & Control Letters*, 1985, 5(5): 289 – 294.
- [2] CHEN G, DE FIGUEIREDO RJP. On robust stabilization of nonlinear control systems. *Systems & Control Letters*, 1989, 12(4): 373 – 379.
- [3] LIU Yonghua, HUANG Liangpei, XIAO Dongming, et al. Dynamic state feedback stabilization for a class of nonaffine nonlinear systems with unknown time delays. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(7): 923 – 928.
(刘勇华, 黄良沛, 肖冬明, 等. 一类非仿射非线性时滞系统的动态状态反馈镇定. *控制理论与应用*, 2016, 33(7): 923 – 928.)
- [4] HUO X, MA L, ZHAO X D, et al. Observer-based fuzzy adaptive stabilization of uncertain switched stochastic nonlinear systems with input quantization. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(4): 1789 – 1809.
- [5] MIN H F, XU S Y, YU X, et al. Adaptive tracking control for stochastic nonlinear systems with full-state constraints and unknown covariance noise. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, DOI: 10.1016/j.amc.2020.125397.
- [6] YE X D, JIANG J P. Adaptive nonlinear design without a priori knowledge of control directions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(11): 1617 – 1621.

- [7] JIA F J, WANG X H, ZHOU X Y. Robust adaptive prescribed performance control for a class of nonlinear pure-feedback systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(12): 3971 – 3987.
- [8] LIU Yonghua. Adaptive control for a class of uncertain nonlinear systems with prescribed performance. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(8): 1123 – 1127.
(刘勇华. 一类不确定非线性系统的预定性能自适应控制. 控制理论与应用, 2014, 31(8): 1123 – 1127.)
- [9] PARK J H, KIM S M, MOON C J. Adaptive neural control for strict feedback nonlinear systems without backstepping. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2009, 20(7): 1204 – 1029.
- [10] LIU W K, WEI Y Y, DUAN G R. Adaptive control for second order multi-input multi-output nonlinear systems with state and input constraints. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 533 – 541.
(刘旺魁, 魏毅寅, 段广仁. 状态与输入受限的二阶多输入多输出非线性系统自适应控制. 控制理论与应用, 2019, 36(4): 533 – 541.)
- [11] MIN H F, XU S Y, ZHANG B Y, et al. Output-feedback control for stochastic nonlinear systems subject to input saturation and time-varying delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(1): 359 – 364.
- [12] ZHAO X D, WANG X Y, ZONG G D, et al. Fuzzy-approximation based adaptive output-feedback control for uncertain nonsmooth nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(6): 3847 – 3859.
- [13] MA Z Y, MA H J. Improved adaptive fuzzy output-feedback dynamic surface control of nonlinear systems with unknown dead zone output. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2021, 29(8): 2122 – 2131.
- [14] FUNAHASHI K I. On the approximate realization of continuous mappings by neural networks. *Neural Networks*, 1989, 2(3): 183 – 192.
- [15] GE S S, LI G Y, ZHANG J, et al. Direct adaptive control for a class of MIMO nonlinear systems using neural networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(11): 2001 – 2006.
- [16] LU Y. Adaptive-fuzzy control compensation design for direct adaptive fuzzy control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(6): 3222 – 3231.
- [17] WANG X H. Global finite-time stabilization of a class of nonlinear system based on a dynamic gain approach. *Mathematical Methods in The Applied Sciences*, 2020, 43(1): 269 – 280.
- [18] LI J, QIAN C J, DING S H. Global finite-time stabilisation by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Control*, 2010, 83(11): 2241 – 2252.
- [19] HUANG X Q, LIN W, YANG B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2005, 41(5): 881 – 888.
- [20] DU H B, QIAN C J, LI S H, et al. Global sampled-data output feedback stabilization for a class of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2019, 99: 403 – 411.
- [21] GAO R Z, WANG H Q, ZHAO L, et al. Exponential tracking control of MIMO nonlinear systems with actuator failures and nonparametric uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, 32(3): 1604 – 1617.
- [22] ABOOEE A, MORAVEJ-KHORASANI M, HAERI M. Global finite time stabilization of a class of uncertain mimo nonlinear systems. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The ASME*, 2016, 138(2): 021007.
- [23] WANG L, ISIDORI A, MARCONI L, et al. Stabilization by output feedback of multivariable invertible nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(5): 2419 – 2433.
- [24] YANG Y L, DING D W, XIONG H Y, et al. Online barrier-actor-critic learning for Hinfinity control with full-state constraints and input saturation. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(6): 3316 – 3344.
- [25] JING Y H, YANG G H. Adaptive fuzzy output feedback fault tolerant compensation for uncertain nonlinear systems with infinite number of time-varying actuator failures and full-state constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(2): 568 – 578.
- [26] ZHANG J X, LI K W, LI Y M. Output-feedback based simplified optimized backstepping control for strict-feedback systems with input and state constraints. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2021, 8(6): 1119 – 1132.
- [27] ZHANG J J, SUN Q M. Prescribed performance adaptive neural output feedback dynamic surface control for a class of strict-feedback uncertain nonlinear systems with full state constraints and unmodeled dynamics. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(2): 459 – 483.
- [28] ZHU Q D, LIU Y C, WEN G X. Adaptive neural network output feedback control for stochastic nonlinear systems with full state constraints. *ISA Transactions*, 2020, 101: 60 – 68.
- [29] SWAROOP D, HEDRICK J K, YIP P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 25(10): 1893 – 1899.
- [30] CHEN B, CHEN X P, LIU K F, et al. Direct adaptive fuzzy control of nonlinear strict-feedback systems. *Automatica*, 2009, 45(6): 1530 – 1535.
- [31] JIA F J, YAN X, WANG X H, et al. Robust adaptive prescribed performance dynamic surface control for uncertain nonlinear pure-feedback systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(5): 2752 – 2772.
- [32] JIA Fujin, ZHANG Tianliang. Global asymptotic stability control for nonlinear systems with unknown functions. *Control Theory & Applications*, 2022, 40(2): 196 – 203.
(贾付金, 张天良. 具有未知函数非线性系统的全局渐近稳定控制. 控制理论与应用, 2022, 40(2): 196 – 203.)
- [33] LIU Y J, TONG S C. Barrier Lyapunov functions-based adaptive control for a class of nonlinear pure-feedback systems with full state constraints. *Automatica*, 2016, 64: 70 – 75.
- [34] LIU L, HAUNG J. Asymptotic disturbance rejection of the duffing's system by adaptive output feedback control. *IEEE Transactions on Circuit and Systems-II: Express Briefs*, 2008, 55(10): 1066 – 1070.

作者简介:

贾付金 博士, 讲师, 目前研究方向为非线性系统控制、自适应控制与输出调节问题, E-mail: fujinjia1234@163.com;

张天良 博士, 目前研究方向为非线性系统控制、自适应控制, E-mail: t.lzhang@163.com;

陆俊伟 博士, 研究员, 目前研究方向为非线性系统控制、自适应控制、状态约束控制, E-mail: we889@aliyun.com.