

高阶非线性不确定系统的复合有限时间控制

王芳^{1†}, 杜雨欣¹, 周超²

(1. 燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 河北农业大学 海洋学院, 河北 秦皇岛 066003)

摘要: 本文针对一类带有外界干扰的高阶非线性不确定系统, 提出基于有限时间干扰观测器的复合有限时间控制策略, 为了解决终端滑模的奇异性问题, 设计改进的非奇异终端滑模面. 同时, 双曲正切函数和指数型函数相结合, 构造新型复合趋近律. 为了处理外界干扰, 设计非奇异终端滑模观测器, 将观测到的干扰值前馈到滑模控制中, 进一步提高系统的抗干扰性. 最后, 将设计的复合趋近律与其他5种趋近律进行仿真对比, 验证复合趋近律的收敛速度和削弱抖振能力, 并通过非线性系统的数值仿真验证所提出控制策略的有效性和优越性.

关键词: 非线性系统; 有限时间干扰观测器; 复合趋近律; 非奇异终端滑模控制; 有限时间稳定

引用格式: 王芳, 杜雨欣, 周超. 高阶非线性不确定系统的复合有限时间控制. 控制理论与应用, 2025, 42(1): 209 – 215

DOI: 10.7641/CTA.2023.20904

Composite finite-time control for a high order nonlinear uncertain system

WANG Fang^{1†}, DU Yu-xin¹, ZHOU Chao²

(1. School of Science, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China;

2. Ocean College, Hebei Agricultural University, Qinhuangdao Hebei 066003, China)

Abstract: A composite finite-time control strategy based on finite time disturbance observer is proposed for a class of high-order nonlinear uncertain systems with external disturbances. In order to solve the singularity problem of terminal sliding mode, an improved non-singular terminal sliding mode (NSTSM) surface is designed. Meanwhile, the hyperbolic tangent function and the exponential function are combined to construct a new hybrid reaching law. A NSTSM observer is designed to deal with external disturbances, and the observed disturbance value is fed forward into the sliding mode control to further improve the anti-disturbance performance of the control system. Finally, the proposed reaching law is simulated and compared with other five reaching laws to verify the convergence speed and free-chattering ability of the hybrid reaching law. The effectiveness and superiority of the proposed control strategy are verified by numerical simulation of nonlinear system.

Key words: nonlinear system; finite time disturbance observer; hybrid reaching law; non-singular terminal sliding mode control; finite time stability

Citation: WANG Fang, DU Yuxin, ZHOU Chao. Composite finite-time control for a high order nonlinear uncertain systems. *Control Theory & Applications*, 2025, 42(1): 209 – 215

1 引言

滑模控制最早由Utkin^[1]提出, 它对存在不确定性和外界干扰的非线性系统具有较好的鲁棒性和抗干扰能力, 被广泛应用于飞行器、电机等实际工程系统. 如何减小滑模控制在趋近阶段的抖振是目前的研究热点之一. 相比准滑模控制^[2]、高阶滑模控制^[3]、动态滑模控制^[4]等方法, 趋近律方法能更好地削减抖振.

高为炳教授^[5]提出了趋近律的概念. 文献[6]提出的双幂次趋近律克服了传统幂次趋近律收敛速度慢的问题, 但未解决系统受扰动时产生的抖振问题. 文献[7]提出了分段式的双幂次组合趋近律, 减弱了抖振. 文献[8]在指数趋近律的基础上加入比例项提高收敛速度, 但符号函数会引起抖振. 文献[9]提出了改进的指数趋近律, 提高了趋近速度, 但是在接近滑动面时, 抖

收稿日期: 2022-10-17; 录用日期: 2023-11-27.

[†]通信作者. E-mail: wangfang@ysu.edu.cn; Tel.: +86 335-8057027.

本文责任编辑: 武玉强.

河北省高等学校科学技术研究项目(ZD2022012), 河北省自然科学基金项目(F2020203105, F2022203085), 国家自然科学基金项目(62073234)资助.

Supported by the Science and Technology Project of Hebei Education Department (ZD2022012), the Natural Science Foundation of Hebei Province (F2020203105, F2022203085) and the National Natural Science Foundation of China (62073234).

振较大. 文献[10-11]设计了双曲正切趋近律和指数趋近律, 削弱了趋近阶段的抖振, 但是未考虑提高收敛速度问题.

滑模控制中, 二阶滑模面^[12]、高阶滑模面^[3]、积分滑模面^[13]、终端滑模面^[14]等非线性滑模面被提出, 取代了传统的线性滑模面, 尤其是基于终端滑模面的滑模控制, 状态在有限时间内收敛. 文献[15]为了减少传感器错误数据注入引起的抖振, 设计了自适应积分终端滑模控制器. 文献[16]提出的双环积分型终端滑模控制策略, 提高了飞行器的姿态跟踪性能. 虽然终端滑模控制具有有限时间收敛特性, 但存在奇异性问题. 文献[17]提出基于神经网络的非奇异终端滑模控制, 与传统终端滑模控制相比, 具有更快的收敛速度和更高的跟踪精度, 且解决了奇异性问题.

干扰观测器是处理外界干扰的一种有效方法. 文献[18]设计了非线性干扰观测器, 解决了永磁同步电机的参数不确定性问题, 提高了控制系统的抗干扰性. 文献[19]基于超螺旋算法, 设计了扩张状态观测器, 处理由模型不确定性和外界干扰组成的综合不确定. 文献[20]提出了混合扩展状态观测器, 解决了多通道的干扰. 由于传统的扩张状态观测器是非导数结构形式, 不能补偿未知非线性函数, 导致其观测精度低, 文献[21]针对二阶系统, 引入滤波补偿器, 构造线性补偿函数观测器解决了此问题. 文献[22]构造了固定时间滑模干扰观测器, 处理高超声速飞行器受到的外界干扰, 提高了控制系统的抗干扰能力. 文献[23]设计了自适应滑模干扰观测器, 使非线性不确定系统的干扰估计误差有限时间稳定. 文献[24]提出了基于滑模干扰观测器的二阶滑模控制方法, 提高了滤波器的鲁棒性, 但未考虑切换函数不连续引起的抖振.

本文考虑带有外界干扰的高阶非线性不确定系统, 提出基于有限时间干扰观测器的有限时间控制策略. 首先, 为了解决传统终端滑模控制的奇异问题, 构造新型的非奇异终端滑模面, 结合双曲正切函数和指数函数, 设计复合趋近律. 其次, 为了消除外界干扰的影响, 设计有限时间滑模干扰观测器. 然后, 在滑模面、复合趋近律和干扰观测器基础上, 设计有限时间控制器. 基于Lyapunov理论, 证明输出误差实际有限时间稳定, 最后, 通过对比仿真验证控制策略的有效性.

2 问题描述和预备知识

考虑如下形式的非线性不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, \\ \dot{x}_n = f(\bar{x}_n) + g(\bar{x}_n)u + d(t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中: 系统状态 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ 是可测的, $\bar{x}_n = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$; $u \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}$ 分别是状态变量、控制输入和输出; $f(\bar{x}_n)$ 和 $g(\bar{x}_n) \neq 0$ 是已知的光滑非

线性函数; $d(t) \in \mathbb{R}$ 为外界干扰.

设计控制器之前, 给出下列假设和引理:

假设 1^[18] 未知干扰 d 和一阶导数 \dot{d} 是连续有界的, 即存在正常数 μ , 满足 $|d^{(j)}| \leq \mu, j = (0, 1)$.

引理 1^[25-26] 考虑系统 $\dot{x} = f(x)$, 若存在正定函数 $V(x)$ 以及 $\alpha, \beta > 0, 0 < p < 1, 0 < c^* < \infty$ 使得 $\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x) - \beta V^p(x) + c^*$ 成立, 则系统的状态轨迹实际有限时间稳定, 收敛时间满足 $t \leq \frac{1}{\alpha(1-p)} \times \ln \frac{\alpha V^{1-p}(x_0) + \lambda\beta}{\lambda\beta}, 0 < \lambda < 1$. 当 $c^* = 0$ 时, 系统的状态轨迹有限时间稳定, 收敛时间满足 $t \leq \frac{1}{\alpha(1-p)} \times \ln \frac{\alpha V^{1-p}(x_0) + \beta}{\beta}$.

3 复合趋近律设计

本节将首先设计复合趋近律, 并分析其稳定性; 然后, 与其他趋近律进行对比分析, 验证提出的复合趋近律具有较好的收敛特性和削弱抖振能力.

3.1 复合趋近律设计

结合双曲正切函数光滑连续的优点和指数函数收敛速度快的优点, 设计如下新型复合趋近律 (reaching law, RL)RL0:

$$\dot{s} = -k_1(\tanh(|s|) + |s|)\text{sgns} - \frac{k_2|s|^\alpha \text{sgns}}{b_1 + \tanh(|s|)e^{-b_2|s|}}, \quad (2)$$

其中 $k_1, k_2, b_1, b_2 > 0, 0 < \alpha < 1$ 为待设计的参数.

注 1 趋近律直接影响控制输入, 如果趋近律中有不连续的符号函数, 会引起抖振问题. 式(2)中, 分别将 $\tanh(|s|)$, $|s|^\alpha$ 和符号函数结合, 满足连续的条件, 可以削弱抖振; 第2项的分母不可能为0, 所以式(2)是非奇异的. 综上, 趋近律RL0避免奇异性问题的同时能够削弱抖振.

构造Lyapunov函数 $V_2 = \frac{1}{2}s^2$, 求得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -k_1s^2 - \frac{k_2}{b_1 + 1}|s|^{\alpha+1} \leq \\ &- \alpha_2V_2 - \beta_2V_2^{\frac{\alpha+1}{2}}, \end{aligned}$$

其中: $\alpha_2 = 2k_1, \beta_2 = 2^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{k_2}{b_1 + 1} > 0, k_1, k_2, b_1 > 0, 0 < \alpha < 1$. 由引理1可知, RL0是有限时间稳定的.

3.2 趋近律的对比分析

将RL0与如下几种趋近律进行对比:

RL1^[6]:

$$\dot{s} = -k_3|s|^\alpha \text{sgns} - k_4|s|^\beta \text{sgns}; \quad (3)$$

RL2^[7]:

$$\dot{s} = -k_3|s|^\alpha \text{sgns} - k_4\text{fal}, \quad (4)$$

$$\text{其中 fal} = \begin{cases} |s|^\beta \text{sgns}, & |s| > \iota, \\ \frac{s}{\iota^{1-\beta}}, & |s| \leq \iota; \end{cases}$$

$$\text{RL3}^{[8]}: \dot{s} = -ks - \frac{k_2 \text{sgns}}{\delta + (1-\delta)e^{-b_2|s|}}; \quad (5)$$

$$\text{RL4}^{[9]}: \dot{s} = -k|z|^\gamma s - k_3 |s|^\Lambda \text{sgns}, \quad (6)$$

其中 $\Lambda = \chi + (\lambda - \chi)e^{-b_2|z|}$;

$$\text{RL5}^{[10]}: \dot{s} = -k_1 \tanh(b|s|)\text{sgns} - ks, \quad (7)$$

其中: $k_1, k_2, k_3, k_4, k, b, b_1, b_2 > 0, 0 < \alpha < 1, 0 < \lambda < 1, \iota > 0, \beta > 1, \gamma > 1, \chi > 1$ 为待设计的参数, $z = x_{1d} - x_1, x_{1d} = \sin(2t)$.

RL1和RL2是幂次型趋近律, RL3和RL4是指数型趋近律, RL5是双曲正切趋近律. 虽然RL1和RL2在有限时间内到达滑模面, 但收敛速度慢且易发生抖振. RL3中, 当s远离滑模面时, 第2项收敛于 $-k_2\delta$, 可以通过增大 k_2 提高收敛速度; 当s靠近滑模面时, 第2项收敛于 $-k_2$, 可以削弱抖振, 但由于符号函数的存在, 对削弱抖振的影响不大. RL4在RL3的基础上引入状态的误差z控制收敛速度, 但在靠近滑模面时会引起抖振. RL5中, 光滑连续的tanh函数可以削弱抖振.

RL0和RL3的分母均大于0, 但RL3分母中的 δ 对滑模变量的趋近过程影响甚微, 在RL0分母中引入tanh函数, 当滑模变量远离或靠近滑模面时, 可以削弱抖振; 对比RL4, 指数函数分别发挥不同的作用, RL3中引入状态变量, 增加了趋近律的复杂度和参数数量.

对比RL5, 加入指数项, 当滑模变量远离滑模面时, 可以通过调整RL0中的参数 k_2 和 b_1 调节趋近速度, 相比RL5中的 k_3 , 调整范围更大; 当滑模变量靠近滑模面时, 由于 $\tanh(b|s|) \in [0, 1)$, 调整RL5中的 b , 以加快趋近速度的效果不明显, 而RL0可以通过调整 k_2 和 b_1 加快趋近速度. 因此, RL0保留上述趋近律优势的同时, 具有更快的收敛速度和削弱抖振的能力.

4 有限时间滑模干扰观测器

本节将设计滑模干扰观测器, 估计外界干扰. 设计滑模干扰观测器的形式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_n = f(\bar{x}_n) + g(\bar{x}_n)u + a_2 \text{sig}^\kappa e_{x_n} + a_1 a_2 \text{sig}^{\frac{1}{\alpha_1}}(\text{sig}^{\alpha_1} e_{x_n}) + \omega, \\ s_d = \hat{e}_{x_n} + a_2 \text{sig}^\kappa e_{x_n} + a_1 a_2 \text{sig}^{\frac{1}{\alpha_1}}(\text{sig}^{\alpha_1} e_{x_n}), \\ \dot{\omega} = a_1 s_d \tanh(|s_d|) + \frac{3}{2} |s_d| \text{sgns}_d + \frac{k_d |s_d|^\alpha \text{sgns}_d}{b_{1d} + \tanh(|s_d|)e^{-b_{2d}|s_d|}}, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\text{sig}^\kappa e_{x_n} = |e_{x_n}|^\kappa \text{sgn} e_{x_n}, \hat{e}_{x_n}$ 由文献[27]的滤波器估计, $\kappa = \frac{3-2a_2}{2-a_2}, 0 < \kappa < 1, e_{x_n} = x_n - \hat{x}_n,$

$\omega = \hat{d}, a_1, k_d, b_{1d}, b_{2d} > 0, 1 < a_2 < \frac{3}{2}, 0 < \alpha < 1.$

注 2 符号函数的不连续性可能会导致抖振问题, 在式(8)中引入连续函数: sig函数、双曲正切函数及指数函数, 可以有效削弱抖振, 且分式中的分母大于0, 不会导致奇异问题, 所以干扰观测器(8)避免奇异问题的同时可以有效削弱抖振.

定理 1 系统外界干扰在满足假设1的条件下, 干扰观测器(8)保证干扰估计误差实际有限时间稳定, 即干扰估计误差在有限时间内收敛到零附近的任意小邻域.

证 滤波误差为: $z_f = \hat{e}_{x_n} - e_{x_n}, \hat{e}_{x_n}$ 是利用文献[27]的观测器估计 e_{x_n} 得到. 由式(8)可得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_{x_n} &= \dot{z}_f - a_1 a_2 \text{sig}^{\frac{1}{\alpha_1}}(\text{sig}^{\alpha_1} e_{x_n}) - a_2 \text{sig}^\kappa e_{x_n} + d - \omega. \end{aligned} \quad (9)$$

由文献[27]可知, 当 $t > T_{z_f}$ 时, $z_f = 0$, 进而 $\dot{z}_f = 0$, 将式(9)代入式(8)的 s_d 中, 可得

$$s_d = d - \omega = d - \hat{d}. \quad (10)$$

构造Lyapunov函数 $V_{31} = \frac{1}{2} s_d^2$, 对 V_{31} 求导, 根据假设1和杨氏不等式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{31} &\leq s_d \dot{d} - a_1 s_d^2 \tanh(|s_d|) - \frac{3}{2} s_d^2 - \frac{k_d |s_d|^{\alpha+1}}{b_{1d} + \tanh(|s_d|)e^{-b_{2d}|s_d|}} \leq \\ &- s_d^2 - \frac{k_d}{b_{1d} + 1} |s_d|^{\alpha+1} + \frac{\mu^2}{2} \leq \\ &- \alpha_{31} V_{31} - \beta_{31} V_{31}^{\frac{\alpha+1}{2}} + c_{31}^*, \end{aligned} \quad (11)$$

其中: $\alpha_{31} = 2, \beta_{31} = 2 \frac{\alpha+1}{2} \frac{k_d}{b_{1d} + 1} > 0, c_{31}^* = \frac{\mu^2}{2} > 0, k_d, b_{1d}, 0 < \alpha < 1.$ 根据引理1, s_d 是实际有限时间稳定的. 由式(11)可知, s_d 的收敛域为: $R_{s_d} = \{s_d \mid |s_d| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{\mu^2 (b_{1d} + 1)}{k_d (1 - \lambda)})^{\frac{1}{\alpha+1}}\}$. 可以看出, 通过恰当调整参数的值, R_{s_d} 变为零附近的任意小邻域. 另外, 收敛时间满足

$$T_d \leq \frac{2}{\alpha_{31}(1-\alpha)} \ln \frac{\alpha_{31} V_{31}^{(1-\alpha)/2}(0) + \lambda \beta_{31}}{\lambda \beta_{31}} + T_{z_f}, 0 < \lambda < 1.$$

注 3 若干扰d为慢变干扰, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{d} = 0$, 则式(11)将变成 $\dot{V}_{31} \leq -\alpha_{31} V_{31} - \beta_{31} V_{31}^{\frac{\alpha+1}{2}}$, 根据引理1, s_d 在有限时间内收敛到零. d满足假设1的条件, 非线性干扰观测器^[18]和混合扩张状态观测器^[20]使干扰估计误差实现渐近稳定. 文献[23]设计的高阶滑模干扰观测器, 估计了系统的综合干扰. 但

是,随着观测器的阶数增大,综合干扰高阶导的计算将会变复杂.本文设计的终端滑模控制干扰观测器,提高了控制系统的抗干扰能力.

证毕.

5 非奇异终端滑模控制器设计

定义 $s_1 = x_1 - x_{1d}$, 设计如下终端滑模面:

$$s_i = \dot{s}_{i-1} + l_{i-1}s_{i-1} + \text{sig}^{m_i-1}s_{i-1}, \quad (12)$$

其中: $\text{sig}^{m_i-1}s_{i-1} = |s_{i-1}|^{m_i-1}\text{sgn}s_{i-1}$, $l_{i-1} > 0$, $0 < m_{i-1} < 1$, ($i = 2, \dots, n$). 对式(12)求导, 可得

$$\dot{s}_n = \dot{x}_n - x_{1d}^{(n)} + \Gamma, \quad (13)$$

其中 $\Gamma = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d^{(n-i)}}{d^{(n-i)}t} (l_i s_i + \text{sig}^{m_i} s_i)$.

注4 对比文献[28-29]中的非奇异终端滑模面 $s_n = \dot{s}_{n-1} + \alpha_{n-1}s_{n-1} + \beta_{n-1}s_{n-1}^{p_{n-1}k_{n-1}}$, 本文选择 $\text{sig}^{m_i-1}s_{i-1}$ 代替 $\beta_{n-1}s_{n-1}^{p_{n-1}k_{n-1}}$, 其中

$$\text{sig}^{m_i-1}s_{i-1} = |s_{i-1}|^{m_i-1}\text{sgn}(s_{i-1}),$$

利用sgn函数分段的特性, 保证了稳定性证明时, 实现实际有限时间稳定.

由式(1)-(2)(13), 设计控制律为

$$u = \frac{1}{g(\bar{x}_n)} [-\hat{d} - k_1(\tanh(|s_n|) + |s_n|)\text{sgn}s_n - \frac{k_2|s_n|^\alpha \text{sgn}s_n}{b_1 + \tanh(|s_n|)e^{-b_2|s_n|}} - f(\bar{x}_n) + x_{1d}^{(n)} - \Gamma]. \quad (14)$$

注5 由第2.1节可知, RLO连续且不存在奇异性, 所以基于RLO的控制器式(14)可以削弱抖振且不存在奇异性.

6 闭环系统稳定性分析

定理2 考虑高阶非线性不确定系统式(1), 满足假设1, 在RLO式(2)、滑模干扰观测器式(8)、控制律式(14)的作用下, 输出误差实际有限时间稳定.

证 将式(14)代入到式(13)中可得

$$\dot{s}_n = s_d - k_1(\tanh(|s_n|) + |s_n|)\text{sgn}(s_n) - \frac{k_2|s_n|^\alpha \text{sgn}(s_n)}{b_1 + \tanh(|s_n|)e^{-b_2|s_n|}}. \quad (15)$$

构造Lyapunov函数 $V_{41} = \frac{1}{2}s_n^2 + \frac{1}{2}s_d^2$, 将式(11)和式(15)代入 \dot{V}_{41} , 可得

$$\dot{V}_{41} \leq s_n s_d - k_1 s_n^2 - \frac{k_2}{b_1 + 1} |s_n|^{\alpha+1} - s_d^2 - \frac{k_d}{b_{1d} + 1} |s_n|^{\alpha+1} + \frac{\mu^2}{2}. \quad (16)$$

根据杨氏不等式, 代入式(16)可得

$$\dot{V}_{41} \leq -\frac{2k_1 - 1}{2} s_n^2 - \frac{1}{2} s_d^2 - \frac{k_2}{b_1 + 1} |s_n|^{\alpha+1} -$$

$$\frac{k_d}{b_{1d} + 1} |s_d|^{\alpha+1} + \frac{\mu^2}{2} \leq -\alpha_{41} V_{41} - \beta_{41} V_{41}^{\frac{\alpha+1}{2}} + c_{41}^*, \quad (17)$$

其中: $\alpha_{41} = \min\{2k_1 - 1, 1\}$, $\beta_{41} = \min\{\frac{2^{\frac{\alpha+1}{2}} k_2}{b_1 + 1}, \frac{2^{\frac{\alpha+1}{2}} k_d}{b_{1d} + 1}\}$, $c^* = \frac{\mu^2}{2}$, $k_1 > \frac{1}{2}$, $k_2, b_1, k_d, b_{1d} > 0$, $0 < \alpha < 1$. 根据引理1, s_n 是实际有限时间稳定的. 收敛时间满足 $T_{s_n} \leq \frac{2}{\alpha_{41}(1-\alpha)} \ln(\frac{\alpha_{41}}{\lambda_1 \beta_{41}} V_{41}^{\frac{1-\alpha}{2}}(0) + 1)$, $0 < \lambda_1 < 1$.

由式(12)可得

$$\dot{s}_{n-1} = -l_{n-1}s_{n-1} - \text{sig}^{m_{n-1}-1}s_{n-1} + s_n. \quad (18)$$

构造Lyapunov函数 $V_{42} = \frac{1}{2}s_{n-1}^2$, 将式(18)代入 \dot{V}_{42} 中, 可得

$$\dot{V}_{42} \leq -l_{n-1}s_{n-1}^2 - |s_{n-1}|^{m_{n-1}+1} + s_n s_{n-1}. \quad (19)$$

根据杨氏不等式和 s_n 实际有限时间稳定, 可得

$$\dot{V}_{42} \leq -(l_{n-1} - \frac{1}{2})s_{n-1}^2 - |s_{n-1}|^{m_{n-1}+1} + \frac{s_n^2}{2} \leq -\alpha_{42} V_{42} - \beta_{42} V_{42}^{\frac{m_{n-1}+1}{2}} + c_{42}^*, \quad (20)$$

其中: $\alpha_{42} = 2l_{n-1} - 1$, $\beta_{42} = 2^{\frac{m_{n-1}+1}{2}}$, $c_{42}^* = \frac{|s_n|^2}{2} > 0$, $l_{n-1} > 0$, $0 < m_{n-1} < 1$. 根据引理1, s_{n-1} 是实际有限时间稳定的. 收敛时间满足 $T_{s_{n-1}} \leq \frac{2}{\alpha_{42}(1-m_{n-1})} \times \ln(\frac{\alpha_{42}}{\lambda_2 \beta_{42}} V_{42}^{(1-m_{n-1})/2}(0) + 1)$, $0 < \lambda_2 < 1$.

依次类推, $s_{n-2}, s_{n-3}, \dots, s_2, s_1$ 是实现有限时间稳定的, 收敛时间满足 $T = T_{s_n} + T_{s_{n-1}} + \dots + T_{s_2} + T_{s_1}$.

7 仿真实验与分析

为了验证所提控制策略的有效性, 选择范德堡尔电路系统^[30]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(\bar{x}_2) + g(\bar{x}_2)u + d, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (21)$$

其中: $\bar{x}_2 = [x_1 \ x_2]^T$, $f(\bar{x}_2) = -2x_1 + 3(1-x_1^2)x_2$, $g(\bar{x}_2) = 1$. 仿真中, 系统状态的初值为 $x_1(0) = 0.1$, $x_2(0) = 0.2$, 外界干扰为

$$d = 2 \sin(0.1\pi t) + 3 \sin(0.2\sqrt{t+1}),$$

参考指令为 $x_{1d} = \sin(2t)$.

7.1 趋近律的对比分析

考虑无外界干扰, 即 $d = 0$ 时, 将RLO和RL1-RL5进行仿真对比, 选取滑模面 $s = x_1 + x_2$, 对其求导得

$$\dot{s} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2. \quad (22)$$

结合式(21), 将式(3)–(7)依次代入式(22)中, 可得不同趋近律下的系统输入分别为

$$u_i = \text{RL}_i - f(\bar{x}_2), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (23)$$

通过观察不同趋近律作用下的系统状态响应曲线, 验证本文提出的RL0的优势. 各趋近律参数取值选取为: $k_1 = 10, k_2 = b = 0.01, k_3 = k_4 = k = \iota = 1, \beta = \gamma = \chi = 2, \alpha = \delta = b_1 = \lambda = 0.6, b_2 = 0.1$, 仿真结果如图1–2所示.

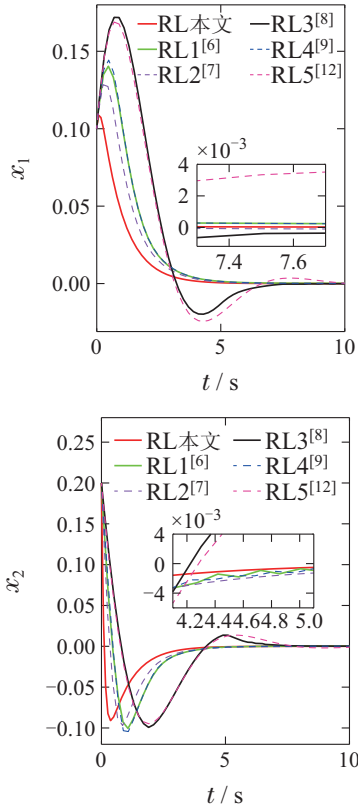


图 1 不同趋近律下的状态变量 x_1, x_2

Fig. 1 State variables x_1, x_2 under different reaching laws

从仿真结果可知, 本文的复合趋近律RL0具有更好的收敛特性和削弱抖振的能力. 由图1可知, 在RL0的作用下, 系统状态轨迹能够快速且最早进入滑模面, 滑模变量能够在滑模面上快速稳定至平衡点且可以有效削弱抖振. 由图2可知, 滑模变量和控制输入具有更快的收敛速度和削弱抖振的能力. 当滑模变量远离滑模面时, 在RL0的作用下, 滑模变量的运动速度明显快于其他趋近律; 当滑模变量靠近滑模面时, RL0促使滑模变量的运动速度变缓, 保证了滑模变量从滑模面之外光滑过渡到滑模面上, 有效削弱了滑模变量刚进入滑动阶段的抖振. 总之, RL0使得滑模变量具有更好的运动品质.

7.2 控制性能的对比分析

考虑外界干扰, 由式(2)和式(8), 设计控制器为

$$u = -k_1 (\tanh(|s_2|) + |s_2|) \text{sgns}_2 -$$

$$\frac{k_2 |s_2|^\alpha \text{sgns}_2}{b_1 + \tanh(|s_2|) e^{-b_2 |s_2|}} + f(\bar{x}_2) - \hat{d} + \ddot{x}_{1d} - l_1 \dot{s}_1 - m_1 \text{sig}^{m_1-1} s_1. \quad (24)$$

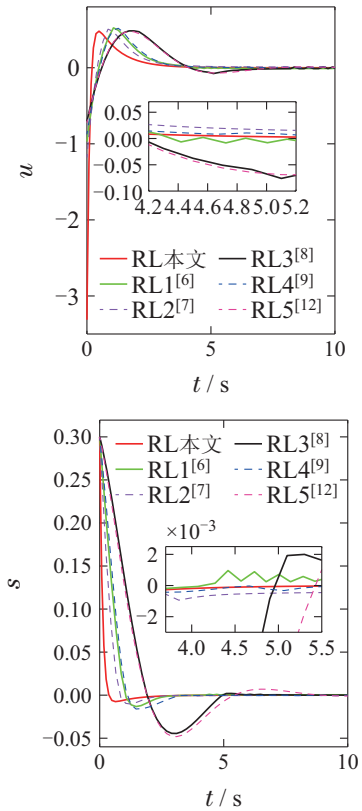
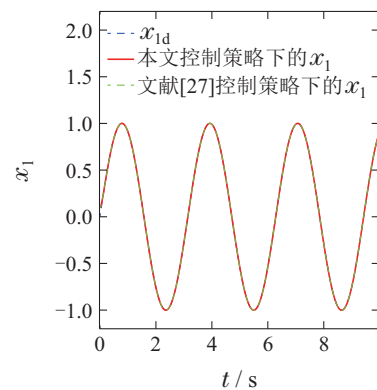


图 2 不同趋近律下的控制输入 u 和滑模面 s

Fig. 2 Control inputs u and sliding mode surfaces s under different reaching laws

在相同仿真条件下, 将本文提出的控制方法与文献[23]的基于自适应滑模观测器的非奇异终端滑模控制方法进行仿真对比, 控制系统的参数取值选取为: $l_1 = 20, m_1 = 0.999, k_1 = 100, k_2 = 0.1, b_1 = b_2 = 1; a_1 = 200, a_2 = 1.499, c_{1d} = 10, p_{2d} = 2, p_d = 0.9, r_{0d} = 0.01, k_d = b_{1d} = p_{1d} = \varepsilon_d = 0.1, b_{2d} = 50, c_{2d} = \eta_d = \tau_d = \delta_{0d} = \gamma_d = 1, \alpha = 0.02$. 仿真结果如图3–5所示.



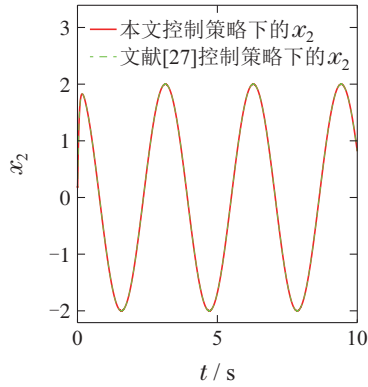
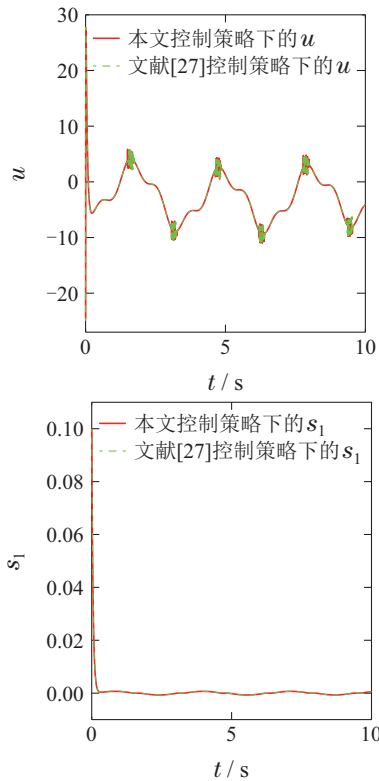
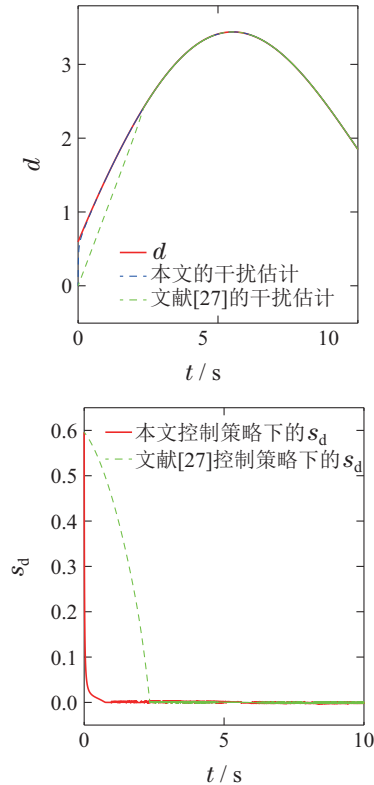
图3 状态变量 x_1, x_2 Fig. 3 State variables x_1, x_2 图4 控制输入 u 和跟踪误差 s_1 Fig. 4 Control inputs u and tracking errors s_1

图3为状态变量 x_1, x_2 的曲线图,从图中可以看出, x_1, x_2 在有限时间内收敛.从图4可以看出,控制输入 u 是有界且收敛的,跟踪误差 s_1 在有限时间内迅速收敛到零附近的任意小邻域.图5为外界干扰 d 、估计值 \hat{d} 和估计误差 s_d 的曲线图,从图中可以看出,本文提出的有限时间滑模干扰观测器具有更好的估计效果.

8 结论

考虑高阶非线性不确定系统的跟踪控制问题,提出基于有限时间干扰观测器、非奇异终端滑模面和复合趋近律的有限时间控制策略.提出基于 \tanh 函数和指数函数的复合趋近律,实现了系统的快速收敛且无抖振.非奇异终端滑模面避免奇异性的同时提高了滑

模变量趋近滑模面的速度,滑模干扰观测器减少了外界干扰对控制系统的影响.仿真结果表明,本文提出的复合趋近律和有限时间干扰观测器具有更好的性能.本文考虑了外界干扰的影响,但未考虑未知非线性函数问题,未来研究中,将同时考虑外界干扰和未知非线性函数影响下的高阶非线性系统的控制问题,并将其应用于高阶工程系统.

图5 估计误差 s_d Fig. 5 Estimation errors s_d

参考文献:

- [1] UTKIN V I. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(2): 212 – 222.
- [2] ZHOU Y, WANG B L. PWM-quasi-sliding mode control for APFC converters. *Electrical Engineering*, 2010, 92(2): 43 – 48.
- [3] LI J X, LIU X J, XU M, et al. Continuous higher-order sliding mode control for a class of n-th order perturbed systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs*, 2022, 69(7): 3179 – 3183.
- [4] ZHU Qinghua, DONG Ruiqi, MA Guangfu. Dynamical sliding mode for flexiblespace craft attitude control. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(10): 1430 – 1435.
(朱庆华, 董瑞琦, 马广富. 基于动态滑模控制的挠性航天器姿态控制. *控制理论与应用*, 2018, 35(10): 1430 – 1435.)
- [5] GAO Weibing. *Theory and Design Method for Variable Sliding Mode Control*. Beijing: Science Press, 1996: 241 – 254.
(高为炳. 变结构控制的理论及设计方法. 北京: 科学出版社, 1996: 241 – 254.)
- [6] LI Huijie, CAI Yuanli. Sliding mode control with double power reaching law. *Control and Decision*, 2016, 31(3): 498 – 502.
(李慧洁, 蔡远利. 基于双幂次趋近律的滑模控制方法. *控制与决策*, 2016, 31(3): 498 – 502.)

- [7] LIAO Ying, YANG Yajun, WANG Yong. Novel double power combination function reaching law for sliding mode control. *Journal of National University of Defense Technology*, 2017, 39(3): 105 – 110. (廖瑛, 杨雅君, 王勇. 滑模控制的新型双幂次组合函数趋近律. 国防科技大学学报, 2017, 39(3): 105 – 110.)
- [8] CHE X, TIAN D P, JIA P, et al. Terminal sliding mode control with a novel reaching law and sliding mode disturbance observer for inertial stabilization imaging sensor. *Sensors*, 2020, 20(11): 3107.
- [9] WANG Y Q, ZHU Y C, ZHANG X G, et al. Anti-disturbance sliding mode based deadbeat direct torque control for PMSM speed regulation system. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 2021, 7(4): 2705 – 2714.
- [10] ZHU Q X, HUANG D H, YU B, et al. An improved method combined SMC and MLESO for impedance control of legged robots' electro-hydraulic servo system. *ISA Transactions*, 2022, 130: 598 – 609.
- [11] NARIN J, SUKSUN N. Sliding mode control of three-phase AC/DC converters using exponential rate reaching law. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2022, 33(1): 210 – 221.
- [12] MEI Keqi, MA Li, DING Shihong, et al. Second-order sliding mode control design subject to sliding variable constraints. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(3): 414 – 420. (梅珂琪, 马莉, 丁世宏, 等. 滑动变量受限情况下的二阶滑模控制设计. 控制理论与应用, 2018, 35(3): 414 – 420.)
- [13] WU Jinchun, LIU Jun, YE Huawen. Design and application of finite time integral sliding mode of double integrator. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(7): 1578 – 1582. (吴金尘, 刘俊, 叶华文. 双积分器的有限时间积分滑模设计及应用. 控制理论与应用, 2020, 37(7): 1578 – 1582.)
- [14] XU Chi, ZHAO Ximei. Intelligent recursive nonsingular terminal sliding mode control of permanent magnet linear synchronous motor. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(7): 1242 – 1250. (徐驰, 赵希梅. 永磁直线同步电动机智能递归非奇异终端滑模控制. 控制理论与应用, 2022, 39(7): 1242 – 1250.)
- [15] LI M, CHEN Y, ZHANG Y Y, et al. Adaptive sliding-mode tracking control of networked control systems with false data injection attacks. *Information Sciences*, 2022, 585: 194 – 208.
- [16] ZHANG L, NAN H J, ZHAO Z Q, et al. Adaptive disturbance observer-based dual-loop integral-type fast terminal sliding mode control for micro spacecraft and its gimbal tracking device. *ISA Transactions*, 2022, 130: 121 – 135.
- [17] TRUONG T N, VO A T, KANG H J. An adaptive terminal sliding mode control scheme via neural network approach for path-following control of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2022, 20(6): 2081 – 2096.
- [18] WANG Y, YU H T, LIU Y L. Speed-current single-loop control with overcurrent protection for PMSM based on time-varying nonlinear disturbance observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(1): 179 – 189.
- [19] KHANKALANTARY S, SHEIKHOESLAM F. Robust extended state observer-based three dimensional integrated guidance and control design for interceptors with impact angle and input saturation constraints. *ISA Transactions*, 2020, 104: 299 – 309.
- [20] GANDHI R V, ADHYARU D M. Hybrid extended state observer based control for systems with matched and mismatched disturbances. *ISA Transactions*, 2020, 106: 61 – 73.
- [21] QI G Y, LI X, CHEN Z Q. Problems of extended state observer and proposal of compensation function observer for unknown model and application in UAV. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(5): 2899 – 2910.
- [22] SUN J L, YI J Q, PU Z Q, et al. Fixed-time sliding mode disturbance observer-based nonsmooth backstepping control for hypersonic vehicle. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(11): 4377 – 4386.
- [23] RABIEE H, ATAIE M, EKRAMIAN M. Continuous nonsingular terminal sliding mode control based on adaptive sliding mode disturbance observer for uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2019, 109: 108515.
- [24] GUO B, SU M, WANG H, et al. Observer-based second-order sliding mode control for grid-connected VSI with LCL-type filter under weak grid. *Electric Power Systems Research*, 2020, 183: 106270.
- [25] YU S H, YU X H, SHIRINZADEH B J, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 2005, 41(11): 1957 – 1964.
- [26] LI Y X. Finite time command filtered adaptive fault tolerant control for a class of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2019, 106: 117 – 123.
- [27] ARIE L. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 1998, 34(3): 379 – 384.
- [28] YU X H, MAN Z H. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(2): 261 – 264.
- [29] CHEN M, WU Q X, CUI R X. Terminal sliding mode tracking control for a class of SISO uncertain nonlinear systems. *ISA Transactions*, 2013, 52(2): 198 – 206.
- [30] XU J X, PAN Y J, LEE T H. Sliding mode control with closed-loop filtering architecture for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2004, 51(4): 168 – 173.

作者简介:

王芳 博士, 副教授, 目前研究方向为复杂非线性系统控制、鲁棒控制、自适应控制等, E-mail: wangfang@ysu.edu.cn;

杜雨欣 硕士研究生, 目前研究方向为高超声速飞行器控制, E-mail: 2972966626@qq.com;

周超 博士, 讲师, 目前研究方向为工业系统控制、冶金设备设计及仿真, E-mail: zhouchao@hebau.edu.cn.