

基于扰动观测器的柔性机械臂鲁棒边界控制

陈 崇, 楼旭阳[†], 崔宝同

(江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122)

摘要: 本文研究了具有未知边界扰动和分布扰动的柔性机械臂系统的边界控制。为了补偿扰动和抑制柔性臂的振动, 针对利用Hamilton原理建立的无穷维偏微分方程模型, 设计了带有扰动观测器的鲁棒边界控制器对柔性臂进行控制。利用Lyapunov方法对柔性臂系统的稳定性和一致有界性进行了证明。所提出的控制方法所需测量信息较少, 对未知扰动具有鲁棒性, 并且所提出的边界控制策略能保证对柔性臂的振动抑制, 系统状态最终是外界扰动下指数稳定的。最后, 通过数值仿真验证了所提出控制器对柔性臂振动抑制的有效性。

关键词: 柔性臂; 边界控制; 振动控制; 扰动观测器; 无穷维系统

引用格式: 陈崇, 楼旭阳, 崔宝同. 基于扰动观测器的柔性机械臂鲁棒边界控制. 控制理论与应用, 2024, 41(12): 2269–2276

DOI: 10.7641/CTA.2023.20927

Robust boundary control of flexible manipulators based on disturbance observer

CHEN Dong, LOU Xu-yang[†], CUI Bao-tong

(School of IoT Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: In this paper, the boundary control of a flexible manipulator system with unknown boundary disturbances and unknown distributed disturbances is studied. In order to suppress the vibration of the flexible manipulator, a robust boundary controller with a disturbance observer based on the infinite dimensional partial differential equation model by Hamilton principle is designed to control the flexible manipulator. The stability and uniform boundedness of the control system are proven by using the Lyapunov method. The proposed control method requires fewer measured information and possesses robustness to unknown disturbance. Besides, the proposed boundary control strategy can ensure the vibration suppression of the flexible manipulator and the closed-loop system to be uniformly ultimately bounded. Finally, the effectiveness of the proposed controller to suppress the vibration of the flexible arm is verified through numerical simulations.

Key words: flexible manipulator; boundary control; vibration control; disturbance observer; infinite dimensional system

Citation: CHEN Dong, LOU Xuyang, CUI Baotong. Robust boundary control of flexible manipulators based on disturbance observer. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(12): 2269–2276

1 引言

近年来, 随着对柔性机械臂的深入研究和工业及特殊应用领域的实际需求, 柔性臂以其重量轻、能耗低、运动速度快等优点在现代工程中得到广泛应用, 越来越多的柔性臂被应用于机器人^[1]、航空航天^[2]、海洋开发^[3]和医疗机器人^[4]等领域。对于柔性机械臂来说, 振动会影响精度操作, 甚至会导致疲劳损伤, 缩短工作寿命。如果柔性臂的振动不能得到很好的控制, 无疑会带来生产安全风险和经济损失, 因此, 对柔性臂系统进行有效的控制是非常重要的。然而, 柔性臂

系统具有复杂的机电耦合特性, 也具有非线性、时变、逆运动学不确定性等特性, 其振动控制问题目前仍存在着许多的挑战, 但同时也受到了广泛的关注^[5–12]。

为解决上述所提问题, 受实际需求和理论挑战的驱动, 柔性臂系统的建模问题及其振动抑制问题得到了广泛研究。现有的控制方法中, 关于用偏微分方程(partial differential equation, PDE)描述的柔性臂系统的边界控制已有很多研究结果。Endo等人^[6]将柔性臂系统建模为分布参数系统, 同时, 基于此研究了一种

收稿日期: 2022–10–24; 录用日期: 2023–10–26。

[†]通信作者。E-mail: Louxy@jiangnan.edu.cn; Tel.: +86 15052200790。

本文责任编辑: 方勇纯。

江苏省自然科学基金面上项目(BK20201340)资助。

Supported by the National Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20201340).

边界协同的控制方法。Kuo等人^[7]采用自适应边界控制对具有参数不确定性的柔性机械臂系统进行了分析。孟庆鑫等人^[8]提出一种基于轨迹规划的无残余振动位置控制方法，在将柔性机械臂的末端执行器从任意初始位置移动到目标位置的同时，能够确保系统没有残余振动产生。张袅娜等人^[9]提出一种终端滑模控制方法，利用混沌遗传算法优化控制器的设计参数，使零动态子系统在平衡点附近渐近稳定。杨春雨等人^[10]利用奇异摄动理论得到柔性机械臂的双时间尺度模型，并证明了闭环系统稳定。Wang和Liu^[11]针对双连杆柔性臂的事件触发边界量化控制问题进行了研究，并保证了系统状态是一致有界的。Ji和Liu^[12]针对具有输入信号量化的三维柔性梁系统，设计了一种自适应边界控制方案，以抑制梁的振动。然而，上述研究虽然对柔性臂的振动控制有着重要的作用，但在柔性臂的鲁棒振动控制方面仍有不足。

在实际柔性机械臂系统中，外部扰动是不可避免的。由于存在风力扰动和空气扰动等外部扰动，可能导致柔性臂的稳定性被破坏，影响实际工程的作业。目前，已有部分学者针对外界扰动问题提出了一些有效的处理方法，吴忻生和邓军^[13]研究了在柔性机械臂的末端具有未知扰动的边界控制，将柔性机械臂的动态特性由偏微分方程表示的分布参数模型来描述，基于Lyapunov方法进行分析及设计控制器，以调节机械臂的振动，可达到外界扰动下的指数稳定性。Guo和Jin^[14]研究了一维欧拉伯努利柔性臂方程的边界反馈镇定问题，研究中采用了自抗扰控制和滑模控制，通过扩张状态观测器对扰动进行估计，并在闭环系统中通过补偿器在线消除扰动。Ma等人^[15]针对一类输入饱和和外部扰动下的柔性机械臂系统，设计了高阶扰动观测器来补偿未知变化扰动。然而，上述研究的控制器中都需要用到状态信息的多重差分，这可能会带来噪声，影响控制器的精度，与柔性臂系统的实际需求存在矛盾。

受上述研究成果的启发，本文的目的是针对具有外部扰动的柔性臂系统设计带扰动观测器的边界鲁棒控制器，以抑制具有未知有界干扰的柔性臂的振动。本文的主要贡献包括以下3点：

1) 针对具有外部扰动的柔性臂系统，提出了带扰动观测器的边界鲁棒控制器来处理边界扰动和抑制柔性臂的振动，所提控制策略只在末端施加控制，与固定端与自由端同时施加控制力的文献[11–12]相比，具有更少保守性。

2) 在设计的基于扰动观测器的边界鲁棒控制器下，基于Lyapunov稳定性理论，通过严格的理论分析证明了柔性臂系统状态的稳定性和一致有界性。

3) 所设计的控制器是基于偏微分模型而非有限维

常微分模型，模型更加准确，只需测量边界上的状态信号，且不需要使用多重有限差分，能降低扰动对系统的影响。

2 问题描述

本文以单连杆柔性机械臂为研究对象，通过在末端的边界控制器对柔性机械臂进行振动控制，采用Euler-Bernoulli梁式结构对柔性臂系统建模，建立PDE模型。图1为一个具有未知的分布时空变化的扰动 $f(x, t)$ 和未知的时变边界扰动 $d(t)$ 的典型的柔性臂系统，臂的左边界固定在原点， L 表示臂的长度， M 表示末端有效载荷的质量， $u(t)$ 是动力定位推进器的控制力， $\omega(x, t)$ 是柔性臂时间 t 时在位置 x 处的横向位移， ρ 为柔性臂单位长度的质量， x 和 t 分别表示独立的空间变量和时间变量。

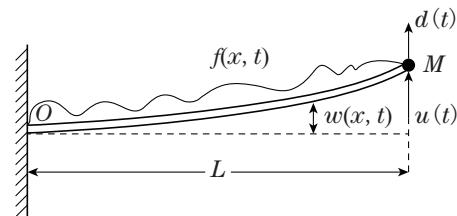


图1 一个典型的具有未知扰动的柔性臂系统

Fig. 1 A typical flexible manipulator with unknown disturbance

利用Hamilton原理来推导柔性臂模型，可得系统的动力学方程为

$$\rho\omega_{tt}(x, t) + EI\omega_{xxxx}(x, t) - T\omega_{xx}(x, t) - f(x, t) = 0, \quad (1)$$

其中 $(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$ 。

系统的边界条件为

$$\omega_x(0, t) = \omega_{xx}(L, t) = \omega(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$-EI\omega_{xxx}(L, t) + T\omega_x(L, t) = \\ u(t) - M\omega_{tt}(L, t) + d(t), \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (3)$$

其中： EI 是柔性臂的弯曲刚度， T 是柔性臂的张力，条件(3)反映了柔性机械臂系统的载荷运动。

注1 为便于描述，本文所使用的推导符号定义如下： $(\cdot)_t = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$, $(\cdot)_{tt} = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t^2}$, $(\cdot)_x = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$, $(\cdot)_{xx} = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}$, $(\cdot)_{xxx} = \frac{\partial^3(\cdot)}{\partial x^3}$, $(\cdot)_{xxxx} = \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4}$. \mathbb{R} 和 \mathbb{R}^+ 分别表示实数和正实数集合。

假设1 对于分布扰动 $f(x, t) \in \mathbb{R}^+$ ，假设存在一个常数 $\bar{f} \in \mathbb{R}^+$ 满足 $|f(x, t)| \leq \bar{f}, \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$ 。

本文所考虑的边界扰动是连续且光滑，对边界扰动 $d(t)$ 作如下假设。

假设2 对于边界扰动 $d(t) \in \mathbb{R}$ ，假设存在一个

常数 $\bar{d} \in \mathbb{R}^+$ 满足 $|d(t)| \leq \bar{d}, \forall t \in [0, \infty)$. 此外, 假设边界扰动是缓慢变化的, 存在一个常数 $\bar{\bar{d}} \in \mathbb{R}^+$ 满足 $|\dot{d}(t)| \leq \bar{\bar{d}}$.

由于 $d(t)$ 和 $f(x, t)$ 均为有限能量函数^[16-17], 故假设1和假设2是合理的.

3 控制器设计

本文的控制目的是在扰动作用下通过设计边界控制器来抑制柔性臂的振动. 为实现这一目的, 先设计扰动观测器为

$$\dot{\hat{d}}(t) = \gamma(\beta\omega_t(L, t) + \alpha L\omega_x(L, t)) - \gamma\sigma\hat{d}(t), \quad (4)$$

其中 σ, α, β 和 γ 是待定的正常数.

进而, 对具有边界条件(2)-(3)的柔性臂系统(1), 设计如下边界控制器:

$$\begin{aligned} u(t) = & -k\omega_t(L, t) + k_a L\omega_x(L, t) - \\ & k_b L M \omega_{xt}(L, t) - \hat{d}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

其中: k, k_a 和 k_b 是待定的正常数; $\hat{d}(t)$ 是时变边界扰动的估计, 由下述扰动观测器得到.

注意到, 控制器引入了扰动观测器来补偿未知扰动的影响. 定义扰动误差为

$$\tilde{d}(t) = d(t) - \hat{d}(t). \quad (6)$$

对式(6)求导可得

$$\dot{\tilde{d}}(t) = \dot{d}(t) - \gamma[\beta\omega_t(L, t) + \alpha L\omega_x(L, t)] + \gamma\sigma\hat{d}(t). \quad (7)$$

注 2 边界控制器中的所有信号可以由传感器直接测量或通过差分算法获得. $\omega(L, t)$ 可以通过激光位移传感器在柔性臂边界处得到. $\omega_t(L, t)$ 可由 $\omega(L, t)$ 通过差分算法求得. $\omega_x(L, t)$ 可以用测斜仪测量, $\omega_{xt}(L, t)$ 可以用有限差分算法求得. 在文献[18-19]中, 边界控制器中使用的测量值分别是 $\omega_{xxx}(L, t)$ 和 $\omega_{xxxt}(L, t)$, 它们只能通过多重有限差分算法得到, 可能会放大测量中的噪声.

考虑候选Lyapunov函数为

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t), \quad (8)$$

其中, 系统动能 E_k 和势能 E_p 的能量项 $V_1(t)$ 、稳定性分析的交叉项 $V_2(t)$ 、关于 $\omega_x(L, t)$ 和 $\omega_x(L, t)$ 的辅助项 $V_3(t)$ 、边界扰动误差项 $V_4(t)$ 分别定义为

$$\begin{aligned} V_1(t) = & \frac{\beta\rho}{2} \int_0^L (\omega_t(x, t))^2 dx + \\ & \frac{\beta EI}{2} \int_0^L (\omega_{xx}(x, t))^2 dx + \\ & \frac{\beta T}{2} \int_0^L (\omega_x(x, t))^2 dx, \end{aligned} \quad (9)$$

$$V_2(t) = \alpha\rho \int_0^L x\omega_x(x, t)\omega_t(x, t)dx, \quad (10)$$

$$V_3(t) = \beta \frac{M}{2} (\omega_t(L, t) + \frac{\alpha L}{\beta} \omega_x(L, t))^2, \quad (11)$$

$$V_4(t) = \frac{1}{2\gamma} \tilde{d}^2(t). \quad (12)$$

下述引理表明Lyapunov函数(8)具有上、下界.

引理 1 Lyapunov函数(8)满足下列不等式:

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_1 (V_1(t) + V_3(t) + V_4(t)) \leq V(t) \leq \\ \alpha_2 (V_1(t) + V_3(t) + V_4(t)), \end{aligned} \quad (13)$$

其中: $\alpha_1 = \min(1 - \mu, 1)$, $\alpha_2 = \max(1 + \mu, 1)$, $\mu = \frac{2\alpha\rho L}{\min(\beta\rho, \beta T)}$, $0 < \mu < 1$.

证 由式(10)可得

$$\begin{aligned} |V_2(t)| \leq \\ \frac{\alpha\rho L}{2} \int_0^L (|\omega_x(x, t)|^2 + |\omega_t(x, t)|^2) dx \leq \mu V_1(t), \end{aligned} \quad (14)$$

上式等价于

$$-\mu V_1(t) \leq V_2(t) \leq \mu V_1(t), \quad (15)$$

选取 $0 < \mu < 1$, 可以得到 $\alpha_3 = 1 - \mu > 0$, $\alpha_4 = 1 + \mu > 1$, 即

$$0 \leq \alpha_3 V_1(t) \leq V_1(t) + V_2(t) \leq \alpha_4 V_1(t), \quad (16)$$

结合Lyapunov函数(8), 可得

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_1 (V_1(t) + V_3(t) + V_4(t)) \leq V(t) \leq \\ \alpha_2 (V_1(t) + V_3(t) + V_4(t)), \end{aligned} \quad (17)$$

其中: $\alpha_1 = \min(\alpha_3, 1)$, $\alpha_2 = \max(\alpha_4, 1)$. 证毕.

下面引理表明 Lyapunov 函数的时间导数具有上界, 这一结论将用于证明柔性臂系统状态的一致有界性.

引理 2 Lyapunov函数(8)的时间导数具有上界

$$\dot{V}(t) \leq -\varphi V(t) + \epsilon_1, \quad (18)$$

其中 $\varphi, \epsilon_1 > 0$.

证 将式(8)对时间求导, 有

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t), \quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & (u(t) - M\omega_{tt}(L, t) + d(t)) \beta\omega_t(L, t) + \\ & \beta\delta_1 \int_0^L (\omega_t(x, t))^2 dx + \\ & \frac{\beta}{\delta_1} \int_0^L (f(x, t))^2 dx, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) \leq & -\alpha EIL\omega_x(L, t)\omega_{xxx}(L, t) + \\ & \frac{\alpha TL}{2} (\omega_x(L, t))^2 + \frac{\alpha\rho L}{2} (\omega_t(L, t))^2 + \\ & \frac{\alpha L}{\delta_2} \int_0^L (f(x, t))^2 dx + \\ & \alpha L\delta_2 \int_0^L (\omega_x(x, t))^2 dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3\alpha EI}{2} \int_0^L (\omega_{xx}(x, t))^2 dx - \\ & \frac{\alpha T}{2} \int_0^L (\omega_x(x, t))^2 dx - \\ & \frac{\alpha \rho}{2} \int_0^L (\omega_t(x, t))^2 dx, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = & \beta M(\omega_t(L, t)\omega_{tt}(L, t) + \\ & \frac{\alpha L}{\beta}\omega_t(L, t)\omega_{xt}(L, t) + \\ & \frac{\alpha L}{\beta}\omega_x(L, t)\omega_{tt}(L, t) + \\ & \frac{\alpha^2 L^2}{\beta^2}\omega_x(L, t)\omega_{xt}(L, t)), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) = & \gamma^{-1}\tilde{d}(t)\dot{\tilde{d}}(t) = \\ & \gamma^{-1}\tilde{d}(t)\dot{d}(t) + \sigma\tilde{d}(t)\hat{d}(t) - \\ & (\beta\omega_t(L, t) + \alpha L\omega_x(L, t))\tilde{d}(t), \end{aligned} \quad (23)$$

这里 δ_1 和 δ_2 为正常数.

结合边界条件(2)–(3), 不等式(21)右端第1项可替换为

$$\begin{aligned} & -\alpha EIL\omega_x(L, t)\omega_{xxx}(L, t) = \\ & \alpha L\omega_x(L, t)(u(t) - M\omega_{tt}(L, t) - \\ & T\omega_x(L, t) + d(t)), \end{aligned} \quad (24)$$

进一步结合边界控制器(5), 取 $k_a = \frac{\alpha k}{\beta}$, $k_b = \frac{\alpha}{\beta}$, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & (\beta\omega_t(L, t) + \alpha L\omega_x(L, t))(-k\omega_t(L, t) + \\ & \frac{\alpha L}{\beta}k\omega_x(L, t) - \frac{\alpha L}{\beta}M\omega_{xt}(L, t) + d(t) - \\ & \hat{d}(t)) + \alpha LM\omega_t(L, t)\omega_{xt}(L, t) + \\ & \frac{\alpha^2 L^2}{\beta}M\omega_x(L, t)\omega_{xt}(L, t) - \\ & \frac{\alpha TL}{2}(\omega_x(L, t))^2 + \frac{\alpha \rho L}{2}(\omega_t(L, t))^2 + \\ & v(x, t) + \gamma^{-1}\tilde{d}(t)\dot{d}(t) + \sigma\tilde{d}(t)\hat{d}(t) - \\ & (\beta\omega_t(L, t) + \alpha L\omega_x(L, t))\tilde{d}(t) = \\ & (-\beta k + \frac{\alpha \rho L}{2})(\omega_t(L, t))^2 + \\ & (\frac{\alpha^2 L^2}{\beta}k - \frac{\alpha TL}{2})(\omega_x(L, t))^2 + v(x, t) + \\ & \gamma^{-1}\tilde{d}(t)\dot{d}(t) + \sigma\tilde{d}(t)\hat{d}(t) - \\ & (\beta\omega_t(L, t) + \alpha L\omega_x(L, t))\tilde{d}(t), \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \beta\delta_1 \int_0^L (\omega_t(x, t))^2 dx + \\ & \frac{\beta}{\delta_1} \int_0^L (f(x, t))^2 dx + \\ & \frac{\alpha L}{\delta_2} \int_0^L (f(x, t))^2 dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha L\delta_2 \int_0^L (\omega_x(x, t))^2 dx - \\ & \frac{3\alpha EI}{2} \int_0^L (\omega_{xx}(x, t))^2 dx - \\ & \frac{\alpha T}{2} \int_0^L (\omega_x(x, t))^2 dx - \\ & \frac{\alpha \rho}{2} \int_0^L (\omega_t(x, t))^2 dx. \end{aligned} \quad (26)$$

结合Young不等式可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -(\beta k - \frac{\alpha \rho L}{2})(\omega_t(L, t))^2 - \\ & (\frac{\alpha TL}{2} - \frac{\alpha^2 L^2}{\beta}k)(\omega_x(L, t))^2 - \\ & (\frac{\alpha \rho}{2} - \delta_1 \beta) \int_0^L (\omega_t(x, t))^2 dx - \\ & (\frac{\alpha T}{2} - \alpha L\delta_2) \int_0^L (\omega_x(x, t))^2 dx - \\ & \frac{3\alpha EI}{2} \int_0^L (\omega_{xx}(L, t))^2 dx + \\ & (\frac{\beta}{\delta_1} + \frac{\alpha L}{\delta_2}) \int_0^L (f(x, t))^2 dx - \\ & (\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2\gamma})\tilde{d}^2(t) + \\ & \frac{\sigma}{2}\bar{d}^2(t) + \frac{1}{2\gamma}\bar{\bar{d}}^2(t), \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$.

当参数满足 $\frac{2\alpha \rho L}{\min\{\rho, T\}} \leq \beta \leq \frac{\alpha \rho}{2\delta_1}, \frac{\alpha \rho L}{2\beta} < k < \frac{\beta T}{2\alpha L}$, $0 < \delta_2 < \frac{T}{2L}, \frac{1}{\gamma} < \sigma$ 时, 以下不等式成立:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 := \beta k - \frac{\alpha \rho L}{2} > 0, \\ \lambda_2 := \frac{\alpha TL}{2} - \frac{\alpha^2 L^2}{\beta}k > 0, \\ \lambda_3 := \frac{\alpha \rho}{2} - \delta_1 \beta > 0, \\ \lambda_4 := \frac{\alpha T}{2} - \alpha L\delta_2 > 0, \\ \lambda_5 := \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2\gamma} > 0. \end{array} \right. \quad (28)$$

通过式(28)进行参数替换, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\lambda_1(\omega_t(L, t))^2 - \lambda_2(\omega_x(L, t))^2 - \\ & \lambda_3 \int_0^L (\omega_t(x, t))^2 dx - \\ & \lambda_4 \int_0^L (\omega_x(x, t))^2 dx - \lambda_5 \tilde{d}^2(t) - \\ & \frac{3\alpha EI}{2} \int_0^L (\omega_{xx}(L, t))^2 dx + \\ & (\frac{\beta}{\delta_1} + \frac{\alpha L}{\delta_2}) \int_0^L (f(x, t))^2 dx + \\ & \frac{\sigma}{2}\bar{d}^2(t) + \frac{1}{2\gamma}\bar{\bar{d}}^2(t) \leq \end{aligned}$$

$$-\varphi_1 V_1(t) - \varphi_2 V_3(t) - \varphi_3 V_4(t) + \epsilon_1, \quad (29)$$

其中:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \min\left\{\frac{2\lambda_3}{\beta\rho}, \frac{2\lambda_4}{\beta T}, \frac{3\alpha}{\beta}\right\}, \quad \varphi_2 = \frac{2\min\{\lambda_1, \lambda_2\}}{\beta M + \alpha LM}, \\ \varphi_3 &= 2\gamma\lambda_5, \quad \epsilon_1 = \left(\frac{\beta}{\delta_1} + \frac{\alpha L}{\delta_2}\right)L\bar{f}^2 + \frac{\sigma}{2}\bar{d}^2 + \frac{1}{2\gamma}\bar{d}^2. \end{aligned}$$

结合式(13)(29), 得到

$$\dot{V}(t) \leq -\varphi V(t) + \epsilon_1, \quad (30)$$

其中 $\varphi = \frac{\min\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}}{\alpha_3}$. 证毕.

基于上述分析, 给出如下主要结论.

定理1 考虑由运动方程(1)和边界条件(2)–(3)所描述的柔性臂系统, 若假设1和假设2成立, 系统在控制器(5)作用下, 正常数 $k, \delta_1, \delta_2, \sigma, \alpha, \beta, \gamma$ 满足如下条件时:

$$\begin{cases} \frac{2\alpha\rho L}{\min\{\rho, T\}} \leq \beta \leq \frac{\alpha\rho}{2\delta_1}, \\ \frac{\alpha\rho L}{2\beta} < k < \frac{\beta T}{2\alpha L}, \\ 0 < \delta_2 < \frac{T}{2L}, \\ \sigma\gamma > 1, \end{cases}$$

有以下结论:

1) 柔性臂系统的振动偏移状态量 $\omega(x, t)$ 一致有界, 对于 $\forall(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$, 有

$$|\omega(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2L}{\alpha_1\beta T}}\left(\frac{\epsilon_1}{\varphi} + V(0)e^{-\varphi t}\right). \quad (31)$$

2) 柔性臂系统的振动偏移状态量 $\omega(x, t)$ 一致最终有界, 对于 $\forall(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\omega(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2L\epsilon_1}{\alpha_1\beta T\varphi}}, \quad (32)$$

其中:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \min(1 - \mu, 1), \quad \mu = \frac{2\alpha\rho L}{\min\{\beta\rho, \beta T\}}, \\ \epsilon_1 &= \left(\frac{\beta}{\delta_1} + \frac{\alpha L}{\delta_2}\right)L\bar{f}^2 + \frac{\sigma}{2}\bar{d}^2 + \frac{1}{2\gamma}\bar{d}^2, \quad \varphi > 0. \end{aligned}$$

证 由引理2, 式(18)等式两边分别乘以 $e^{\varphi t}$ 得到

$$\dot{V}(t)e^{\varphi t} + \varphi V(t)e^{\varphi t} \leq \epsilon_1 e^{\varphi t}, \quad (33)$$

对上式进行从0到 t 积分可得

$$V(t)e^{\varphi t} - V(0) \leq \frac{\epsilon_1}{\varphi}e^{\varphi t}, \quad (34)$$

即

$$V(t) \leq \frac{\epsilon_1}{\varphi} + V(0)e^{-\varphi t}, \quad (35)$$

利用引理1和Poincaré不等式有 $\forall(x, t) \in [0, L] \times [0,$

$\infty)$,

$$\begin{aligned} \frac{\beta T}{2L}(\omega(x, t))^2 &\leq \frac{\beta T}{2} \int_0^L (\omega_x(x, t))^2 dx \leq \\ V_1(t) &\leq \frac{V(t)}{\alpha_1} \leq \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\epsilon_1}{\varphi} + V(0)e^{-\varphi t}\right), \end{aligned} \quad (36)$$

进而可得 $\forall(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$,

$$|\omega(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2L}{\alpha_1\beta T}}\left(\frac{\epsilon_1}{\varphi} + V(0)e^{-\varphi t}\right), \quad (37)$$

上式表明系统状态指数收敛于集合

$$\Omega = \{\omega(x, t) \in R : |\omega(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2L_1}{\alpha_1\beta T\varphi}}, \forall(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)\}, \quad (38)$$

柔性臂系统的振动偏移状态量 $\omega(x, t)$ 一致有界. 进一步地, 对式(37)两边取极限可得 $\forall x \in [0, \infty)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\omega(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2L\epsilon_1}{\alpha_1\beta T\varphi}}, \quad (39)$$

柔性臂系统的振动偏移状态量 $\omega(x, t)$ 一致最终有界.

证毕.

注3 值得一提的是, 系统在所提出的边界控制器(5)作用下是一致最终有界的, 柔性臂系统的振动偏移状态量 $\omega(x, t)$ 指数收敛于集合(38). 当不考虑分布扰动 $f(x, t)$ 和边界扰动 $d(t)$ 时, 边界控制器可简化设计为

$$u(t) = -k\omega_t(L, t) + k_a L \omega_x(L, t) - k_b L M \omega_{xt}(L, t),$$

通过定理1的类似证明, 可以得到在上述边界控制器作用下柔性臂系统的振动偏移状态量 $\omega(x, t)$ 满足 $\forall(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$, 有

$$|\omega(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2L}{\alpha_1\beta T}}V(0)e^{-\varphi t},$$

从而, 系统是指数稳定的.

4 仿真实例

下面给出数值例子, 利用有限差分法仿真验证柔性臂系统的动态行为和所提出的边界控制效果. 最初处于静止状态的柔性臂被扰动激发, 柔性臂的相应初始条件为 $w(x, 0) = \frac{x}{5}, \dot{w}(x, 0) = 0$.

柔性臂系统的结构参数见表1. 类似于文献[20], 考虑与正弦函数相关的边界扰动 $d(t)$ 和分布扰动 $f(x, t)$, 即

$$d(t) = 0.1 \sin(\pi t) + 0.2 \sin(2\pi t), \quad (40)$$

$$f(x, t) = \frac{x(1 + \sin(0.1\pi xt) + 2 \sin(0.2\pi xt))}{10L}. \quad (41)$$

图2给出了在无控制输入时, 柔性臂的自由振动 ($u(t) = 0$), 由于扰动的存在, 呈现出周期性振动的形式. 为了抑制这种振动, 采用所设计的带有扰动观测器的边界控制器(5), 参数取为 $k = 5, \gamma = 50, \sigma = 1$,

$\alpha=3, \beta=10, k_a=1.5, k_b=0.3$. 图3给出了控制器(5)作用下柔性臂的偏移量, 图4给出了控制器(5)作用下柔性臂边界处的偏移量($L=1\text{ m}$).

表 1 柔性臂系统参数

Table 1 Parameters of flexible manipulator system

参数	说明	值	单位
L	长度	1	m
M	末端载荷质量	0.1	kg
EI	弯曲刚度	7	$\text{N} \cdot \text{m}^2$
ρ	单位长度质量	0.1	kg/m
T	张力	10	N

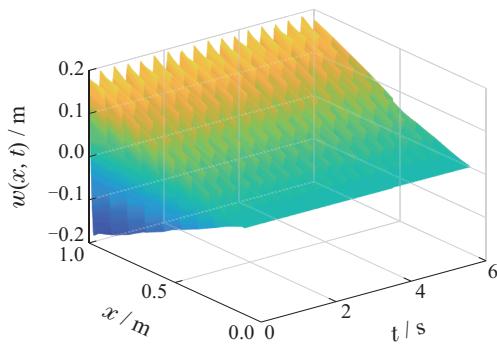


图 2 无控制作用下柔性臂的偏移量

Fig. 2 Displacement of manipulator without control

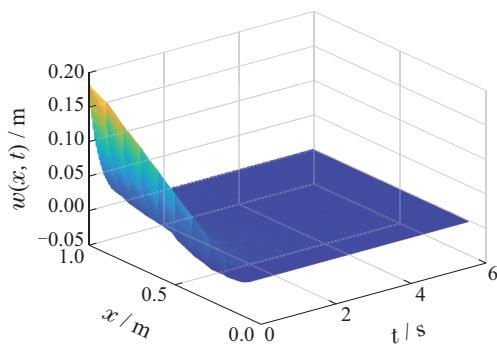


图 3 控制器(5)作用下柔性臂的偏移量

Fig. 3 Displacement of manipulator under controller (5)

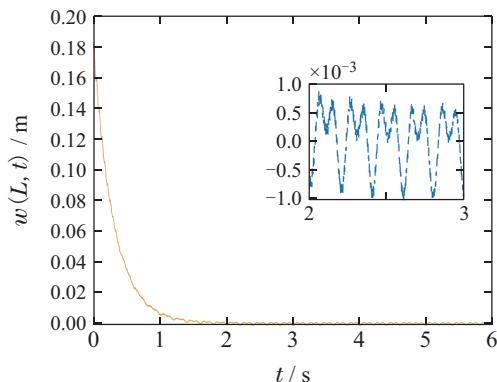


图 4 控制器(5)作用下边界处的偏移量

Fig. 4 Boundary displacement under controller (5)

为了验证所提出的边界控制器的性能以及不同情况下的比较, 文章分为以下情况进行比较.

a) 不考虑扰动观测器, 边界鲁棒控制器设计为

$$\begin{aligned} u(t) = & -k\omega_t(L, t) + k_a L \omega_x(L, t) - \\ & k_b L M \omega_{xt}(L, t), \end{aligned} \quad (42)$$

图5给出了控制器(42)作用下柔性臂边界处偏移量.

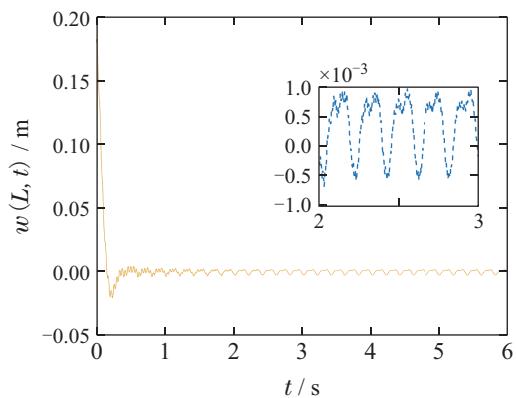


图 5 控制器(42)作用下边界处的偏移量

Fig. 5 Boundary displacement under controller (42)

b) 与文献[13]中边界控制方法进行对比, 其控制器为

$$\begin{cases} u(t) = -EI\omega_{xxx}(L, t) + T\omega_x(L, t) - \\ \text{sgn } \eta \bar{d} + M\omega_{xxxt}(L, t) - k_s \eta, \\ \eta = \omega_t(L, t) - \omega_{xxx}(L, t). \end{cases} \quad (43)$$

取 $k_s=0.1, \bar{d}=1$, 图6给出了控制器(43)作用下柔性臂的偏移量, 图7给出了控制器(43)作用下柔性臂边界处的偏移量($L=1\text{ m}$).

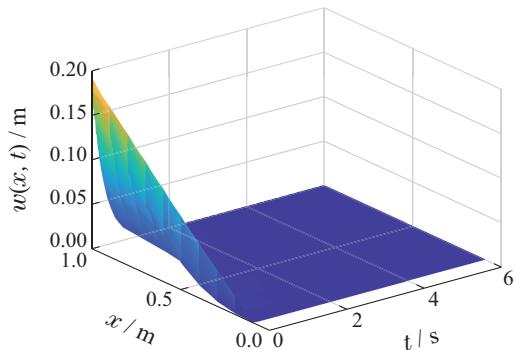


图 6 边界控制器(43)作用下柔性臂的位置

Fig. 6 Displacement of the manipulator under boundary controller (43)

c) 与文献[21]中扰动观测器方法进行对比, 不考虑载荷阻尼时, 其扰动观测器为

$$\begin{cases} \hat{d} = \varphi(t) + M\omega_t(L, t), \\ \dot{\varphi}(t) = v - M\omega_t(L, t) - \varphi(t) - u(t) - \\ EI\omega_{xxx}(L, t) + T\omega_x(L, t), \\ v = \omega_t(L, t) + \omega_x(L, t) - \omega_{xxx}(L, t). \end{cases} \quad (44)$$

图8–9分别给出了控制器(5)和控制器(44)的边界扰动跟踪图,虚线为实际扰动 $d(t)$,实线为估计扰动 $\hat{d}(t)$.

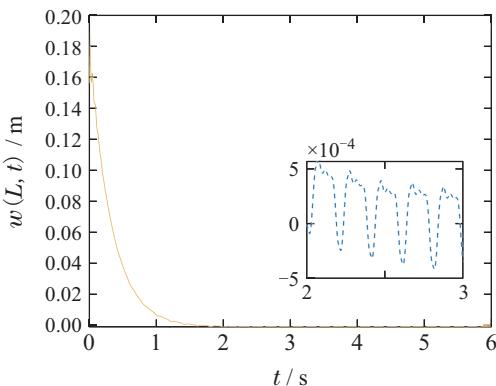


图 7 边界控制器(43)作用下边界处的偏移量

Fig. 7 Boundary displacement under boundary controller (43)

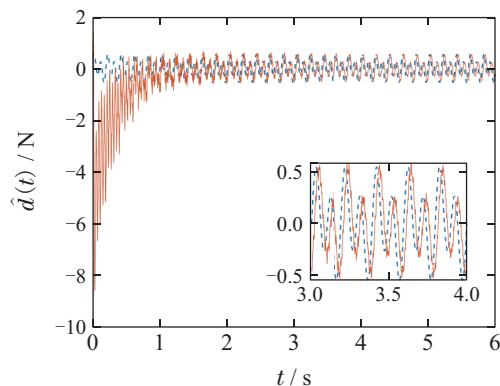


图 8 控制器(5)的边界未知扰动跟踪

Fig. 8 Tracking of unknown boundary disturbance under controller (5)

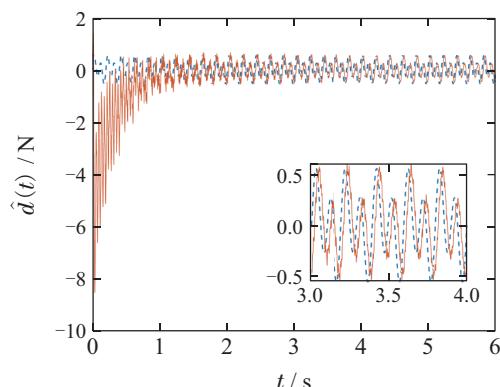


图 9 控制器(44)的边界未知扰动跟踪

Fig. 9 Tracking of unknown boundary disturbance under controller (44)

根据仿真结果可得:

1) 对比图2–3, 当控制器作用于柔性臂系统后, 其振动偏移量有显著减少, 仿真结果与稳定性分析相一致, 验证了所提出的鲁棒边界控制器(5)的有效性, 能够充分抑制柔性臂系统的振动偏移量.

2) 由图3可知, 虽然仅在柔性臂边界处施加控制, 但整个柔性臂系统的振动都得到了显著抑制, 体现了本文所采取边界控制策略的优势.

3) 对比图4–5, 无扰动观测器时, 柔性臂在扰动作用下存在着明显的振动, 而有扰动观测器时振动得到了明显的抑制, 较好体现了所设计的扰动观测器对边界扰动的补偿作用. 由图4可知, 控制作用2 s后, 柔性臂系统的振动偏移量已基本趋向于零, 进一步验证了所设计的边界控制的优越性.

4) 由图3和图6可知, 无论是本文所设计的基于扰动观测器的鲁棒边界控制器(5)还是控制器(43), 它们都能有效的抑制柔性臂系统振动偏移量. 对比图4和图7, 控制器(43)控制效果相对较好, 但其代价是控制器(43)相比鲁棒边界控制器(5)需要额外测量信号 $\omega_{xxx}(L, t)$ 和 $\omega_{xxxt}(L, t)$. 值得注意的是, 信号 $\omega_{xxx}(L, t)$ 和 $\omega_{xxxt}(L, t)$ 需要通过对应变片弯曲传感器采集的反馈信号 $\omega_x(L, t)$ 进行多次差分得到, 会带来测量噪声, 导致获取的数据不准确, 这在实际应用中是十分不利的.

5) 由图8可知, 控制作用约1 s后, 扰动观测器基本跟踪上未知扰动, 补偿了扰动对系统的控制效果的影响, 体现了控制算法的鲁棒性. 对比图8–9, 在控制器(44)作用下扰动估计状态也能跟踪上未知扰动, 跟踪效果基本一致, 然而控制器(44)中设计的扰动观测器需要使用状态信号 $\omega_{xxx}(L, t)$. 注意到, $\omega_{xxx}(L, t)$ 需要通过对应变片弯曲传感器采集的反馈信号进行多次差分得到, 会带来测量噪声, 导致获取的数据不准确. 综上, 说明了所设计的基于扰动观测器的鲁棒控制器(5)的优势.

5 结论

本文研究了未知时变扰动及未知边界扰动下柔性臂系统的振动控制问题. 基于偏微分方程描述的分布参数模型设计了一个带扰动观测器的鲁棒边界控制器. 考虑到未知边界扰动, 设计了扰动观测器补偿扰动不确定性对系统的控制效果的影响, 并能有效实现对边界未知扰动的跟踪、抑制和补偿. 所提出控制算法不需要边界扰动完整信息, 具有鲁棒性. 通过Lyapunov方法对柔性臂系统状态的一致有界性进行了证明. 最后通过仿真结果进一步验证了该控制器对柔性臂振动抑制的有效性. 未来研究中, 将进一步考虑具有饱和约束的鲁棒边界控制、减少外界扰动的限制条件以及在柔性海洋立管中应用研究等相关问题.

参考文献:

- [1] DONG K, LIU H, ZHU X, et al. Force-free control for the flexible joint robot in human-robot interaction. *Computers & Electrical Engineering*, 2019, 73: 9–22.
- [2] WANG X, ZHOU W, MU R, et al. Modeling and simulation of mass-actuated flexible aircraft for roll control. *Aerospace Science and Technology*, 2020, 107: 106254.
- [3] HE W, GE S S, HOW B V E, et al. Robust adaptive boundary control of a flexible marine riser with vessel dynamics. *Automatica*, 2011, 47(4): 722–732.
- [4] SU H, HU Y, KARIMI H R, et al. Improved recurrent neural network-based manipulator control with remote center of motion constraints: Experimental results. *Neural Networks*, 2020, 131: 291–299.
- [5] QIU Zhicheng. Review on research progress in vibration measurement and control of flexible manipulators. *Information and Control*, 2021, 50(2): 141–161.
(邱志成. 柔性机械臂的振动测量和控制研究进展综述. 信息与控制, 2021, 50(2): 141–161.)
- [6] ENDO T, MATSUNO F, JIA Y. Boundary cooperative control by flexible Timoshenko arms. *Automatica*, 2017, 81: 377–389.
- [7] KUO P, HOSEIN A, FARMANBORDA M S. Nonlinear output feedback control of a flexible link using adaptive neural network: controller design. *Journal of Vibration and Control*, 2013, 19(11): 1690–1708.
- [8] MENG Qingxin, LAI Xuzhi, YAN Ze, et al. Position control without residual for a two-link rigid-flexible manipulator. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(3): 620–628.
(孟庆鑫, 赖旭芝, 袁泽, 等. 双连杆刚柔机械臂无残余振动位置控制. 控制理论与应用, 2020, 37(3): 620–628.)
- [9] ZHANG Niaona, ZHANG Dejiang, FENG Yong. The optimal design of terminal sliding controller for flexible manipulators based on chaotic genetic algorithm. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 451–455.
(张袅娜, 张德江, 冯勇. 基于混沌遗传算法的柔性机械手滑模控制器优化设计. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 451–455.)
- [10] YANG Chunyu, XU Yiming, DAI Wei, et al. Two-time-scale composite control of flexible manipulators. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 659–665.
(杨春雨, 许一鸣, 代伟, 等. 柔性机械臂的双时间尺度组合控制. 控制理论与应用, 2019, 36(4): 659–665.)
- [11] WANG J, LIU J. Event-triggered boundary quantization control for flexible manipulator based on partial differential equations dynamic model. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2021, 43(9): 2111–2123.
- [12] JI N, LIU J. Adaptive boundary control for flexible three dimensional Euler-Bernoulli beam with input signal quantization. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2018, 32(8): 1162–1181.
- [13] WU Xinsheng, DENG Jun. Robust boundary control of a distributed-parameter flexible manipulator with tip unknown disturbance. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(4): 511–518.
(吴忻生, 邓军. 末端有未知扰动的分布参数柔性机械臂的鲁棒边界控制. 控制理论与应用, 2011, 28(4): 511–518.)
- [14] GUO B Z, JIN F F. The active disturbance rejection and sliding mode control approach to the stabilization of the Euler-Bernoulli beam equation with boundary input disturbance. *Automatica*, 2013, 49(9): 2911–2918.
- [15] MA J, JIN D, WEI Z, et al. Boundary control of a flexible manipulator based on a high order disturbance observer with input saturation. *Shock and Vibration*, 2018, DOI: 10.1155/2018/2086424.
- [16] LIU Yu, HUANG Haowei, WU Yilin, et al. Vibration control of flexible beam based on Lyapunov direct method. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2013, 41(2): 24–29.
(刘屿, 黄浩维, 吴依林, 等. 基于Lyapunov直接法的柔性梁振动控制. 华南理工大学学报(自然科学版), 2013, 41(2): 24–29.)
- [17] ZHAO Z, HE X, AHN C. Boundary disturbance observer-based control of a vibrating single-link flexible manipulator. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2021, 51(4): 2382–2390.
- [18] HE W, HE X, GE S S. Vibration control of flexible marine riser systems with input saturation. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, 21(1): 254–265.
- [19] ZHAO Z, HE X, REN Z, et al. Boundary adaptive robust control of a flexible riser system with input nonlinearities. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 49(10): 1971–1980.
- [20] LIU Yu, FU Yun, LIU Weidong, et al. Adaptive vibration boundary control for a flexible satellite systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(7): 973–980.
(刘屿, 付云, 刘伟东, 等. 柔性卫星系统的振动自适应边界控制. 控制理论与应用, 2018, 35(7): 973–980.)
- [21] WENG Xuan, YANG Longgang, LIU Yu, et al. Robust adaptive boundary control of a flexible manipulator with unknown boundary disturbance. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2015, 54(3): 44–50.
(翁轩, 杨龙刚, 刘屿, 等. 具有边界扰动柔性机械臂的鲁棒自适应边界控制. 中山大学学报(自然科学版), 2015, 54(3): 44–50.)

作者简介:

- 陈 崇 硕士研究生, 研究方向为柔性机械臂系统边界控制, E-mail: chendong@stu.jiangnan.edu.cn;
- 楼旭阳 教授, 研究方向为混杂系统的分析与控制, E-mail: Louxy@jiangnan.edu.cn;
- 崔宝同 教授, 研究方向为分布参数系统控制, E-mail: btcui@jiangnan.edu.cn.