

线性Markov跳变随机系统的Pareto最优控制

王乐¹, 崔凯¹, 蒋秀珊^{1†}, 赵东亚¹, 张维海²

(1. 中国石油大学(华东) 新能源学院, 山东 青岛 266580; 2. 山东科技大学 电气与自动化工程学院, 山东 青岛 266590)

摘要: 目前针对多个主体、多个目标的带有Markov跳变的线性随机系统的控制问题的研究较少且较为浅显. 本文研究了具有乘性噪声的连续时间线性Markov跳变随机系统的Pareto最优控制问题. 假设多个主体、多个性能指标由状态和控制变量中的二次部分和线性部分的线性组合而形成, 证明了Pareto最优与加权和优化之间的关系, 从而将多目标优化问题转化为特殊的单目标加权和最优控制问题. 基于Pareto博弈理论与广义Itô公式, 系统的Pareto有效策略可以通过一组耦合的广义Riccati微分方程与一组耦合的线性微分方程求解, 并且可以得到每一个控制器的Pareto解. 最后, 本文通过数值仿真验证理论结果的有效性.

关键词: Markov跳变; 随机系统; Pareto控制; 最优控制系统

引用格式: 王乐, 崔凯, 蒋秀珊, 等. 线性Markov跳变随机系统的Pareto最优控制. 控制理论与应用, 2025, 42(1): 59–66

DOI: 10.7641/CTA.2024.30019

Pareto optimal control of linear Markov jump stochastic systems

WANG Le¹, CUI Kai², JIANG Xiu-shan^{1†}, ZHAO Dong-ya¹, ZHANG Wei-hai²

(1. College of New Energy, China University of Petroleum (East China), Qingdao Shandong 266580, China;

2. College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao Shandong 266590, China)

Abstract: At present, there is relatively little research on the control problem of linear stochastic systems with Markov jumps for multiple agents and objectives. This paper investigates the Pareto optimal control problem for continuous time linear Markov jump stochastic systems with multiplicative noise. Assuming that multiple entities and performance indicators are formed by a linear combination of the quadratic and linear parts of state and control variables, the relationship between Pareto optimality and weighted sum optimization is proved, thereby transforming multi-objective optimization into a special single objective weighted sum optimal control problem. Based on the Pareto game theory and the generalized Itô formula, the Pareto effective strategy of the system can be obtained by a set of coupled generalized Riccati differential equations and a set of coupled linear differential equations, and under this strategy, the Pareto solution of each controller can be obtained. Finally, the validity of the theoretical results is verified by a numerical simulation.

Key words: Markov jump; stochastic systems; Pareto control; optimal control systems

Citation: WANG Le, CUI Kai, JIANG Xiushan, et al. Pareto optimal control of linear Markov jump stochastic systems. *Control Theory & Applications*, 2025, 42(1): 59–66

1 引言

实际生产过程中, 零部件的衰老或故障、外界环境突然的干扰、子系统连接方式发生变化这类生产模式发生突然变化的系统通常被建模为Markov跳变系统, 这类系统广泛应用于金融^[1–2]、制造业^[3]、网络服务^[4–5]等领域. 学者们对该类系统已经进行了广泛的

研究, 例如: H_∞ 控制问题^[6]、滤波问题^[7]、LQ最优控制问题^[8]、 H_2/H_∞ 控制问题^[9]等. 同时, 工况变化、测量误差、元器件磨损等各种不确定因素会以噪声的形式不可避免对系统造成影响. 尤其是乘性噪声会伴随系统的状态和控制发生改变, 难以处理. 为了能够更加精确的描述实际生产过程, 提高控制精度, 带有乘

收稿日期: 2023–01–14; 录用日期: 2024–04–24.

†通信作者. E-mail: jiangxsjy@163.com; Tel.: +86 17802007613.

本文责任编辑: 阳春华.

国家自然科学基金项目(62103442, 12326343, 62373229), 山东省自然科学基金项目(ZR2021QF080), 中央高校基本科研业务费专项资金项目(23CX06024A), 山东省高校优秀青年创新团队项目(2023KJ061)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62103442, 12326343, 62373229), the Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2021QF080), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (23CX06024A) and the Outstanding Youth Innovation Team in Shandong Higher Education Institutions (2023KJ061).

性噪声的系统成为当前控制领域研究的热门^[10-11].

最优控制问题作为现代控制理论的重要部分,一直是研究的热门.随着对工程研究的不断深入,考虑到不确定性因素造成的影响,越来越多的研究者开始研究随机系统的最优控制问题.文献[12]首次证明有限时间随机LQ最优控制问题可以通过广义Riccati方程求解.文献[13]针对状态和控制中具有乘性噪声的Markov线性系统,通过Riccati方程组构造了近似最优控制解.文献[14]在性能指标上进一步探究,首次将性能指标考虑成由二次部分和线性部分组合组成,通过一组耦合的广义Riccati差分方程和线性微分方程给出了解决该类控制问题的充分必要条件.

对于单个决策者的经典系统,LQ控制理论是设计最优控制器重要的方法之一.但是,当考虑到多目标,多主体的系统,由于各个决策者之间关系复杂,多个性能指标的优化控制问题难以通过LQ控制策略解决,利用博弈思想解决控制问题引起了更多学者的关注.在博弈论中,当一个玩家有多个目标,或者多个决策者同时影响一个系统时,就会出现合作和非合作的微分博弈问题.文献[15]应用Nash微分博弈思想并求解对应的Riccati方程,解决了连续时间线性Markov跳变系统的非零和优化控制问题.相对于非合作博弈来说,合作博弈从整体角度出发能够给整体带来更多的利益.不同的决策者通过合作策略集来提高各自的利益.使所有决策者不能在不损害他人利益的情况下提高自身利益的策略称为Pareto最优策略^[16].Pareto博弈理论是解决多目标、多主体系统的控制问题的有效方法.文献[17]首次给出Pareto最优问题用加权和方法求解的条件,并给出了无限时域确定性系统Pareto解存在的充分必要条件.文献[18]通过随机Pontryagin最小值原理,将上述的结论推广至有限时域非线性随机系统,文献[19]针对多个主体且带有外扰的随机系统,通过加权和优化方法,将多目标合作优化问题转化为单目标加权和最优控制问题,并给出了满足 H_∞ 约束Pareto最优策略的充分条件和必要条件.虽然加权和方法是解决多目标优化问题的有效方法,但已有的简单系统的加权和不能直接应用在Markov跳变系统中,成本函数中具有跳变性质的加权参数是否影响其凸性需要进一步研究.

尽管上述文献已经取得了丰硕的成果,但是到目前为止,研究带有Markov跳变的线性随机系统的控制问题时鲜有考虑多主体、多个目标情况.Markov跳变是一个随机过程,由系统内部变化或外部环境改变而引起,每次对其观测所得的结果都不同,且都是时间的不同函数,没有确定的变化规律.当状态发生跳变时,对该问题的求解则需要一组耦合的广义微分Riccati方程组,如何寻求该方程组的解给出多目标Pareto策略存在条件是具有较大难度的研究工作,而在目标

函数中加入状态和控制变量的线性部分,目的在于将多目标问题简单化,对简化后的特殊性能指标进行最优化,实现各个目标之间的平衡,更好地应对复杂的实际工程问题.本文主要贡献有:1)针对状态和控制中带有乘性噪声和Markov跳变的连续时间线性系统,同时考虑多种标准与多个主体的性能指标,通过寻找Pareto最优与加权和优化之间的联系,将多目标优化转化为特殊的单目标加权和最优控制问题;2)通过配方法和广义Itô公式给出了该控制问题适定的充分条件,同时给出了获得所有Pareto解的方法.

符号注释: \mathbb{R}^n 表示 n 维向量空间; $\mathbb{R}^{m \times n}$ 表示所有 $m \times n$ 阶实数矩阵的线性向量空间; A' 表示 A 的转置; I_n 表示 n 阶单位矩阵; $A > 0$ (≥ 0)表示矩阵 A 为正定(半正定)矩阵; $\varepsilon[\cdot]$ 表示数学期望算子; $N_m := \{1, \dots, m\}$; $\chi_{\{\theta(t)=i\}}(t)$ 表示当 $\theta(t)=i$ 时, $\chi(t)=1$, 否则 $\chi(t)=0$; $\text{col}(A B) := (A' B)'$.

2 预备知识

考虑状态、输入均依赖噪声的多输入Markov跳变随机系统,即

$$\begin{cases} dx = (A(t, \theta(t))x(t) + \sum_{j=1}^n B^j(t, \theta(t))u^j(t))dt + \\ (D(t, \theta(t))x(t) + \sum_{j=1}^n E^j(t, \theta(t))u^j(t))dw_t, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^l, \theta(0) = \theta_0 \in N_m, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^l$ 是系统的状态, $u^j(t) \in \mathbb{R}^{n_j}$ 是决策者 j 的输入, w_t 是一维标准维纳过程, $\{\theta(t), t \geq 0\}$ 是模态为 N_m 取值的连续时间离散状态的马尔可夫跳变过程,其转移概率为

$$P(\theta(t+h) = j | \theta(t) = i) = \begin{cases} \pi_{ij}h + o(h), & i \neq j, \\ 1 + \pi_{ii}h + o(h), & i = j, \end{cases} \quad (2)$$

其中对所有 $i \in N_m$, $\pi_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^m \pi_{ij}$.假设过程 $\theta(t)$ 和 w_t 是相互独立的,式(1)中的所有系数矩阵假定为适当维数的连续矩阵值函数. $\theta(t)$ 和 w_t 被定义在完备滤波概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上, $\mathcal{F}_t = \sigma(\theta(s), w(s) | 0 \leq s \leq t)$,给出决策者 k 各自的目标函数如下:

$$J_{k,T}(u^j; x_0, \theta_0) = \mathcal{E} \left\{ \int_0^T (x'(t)Q^k(t, \theta(t))x(t) + 2L^k(t, \theta(t))x(t) + \sum_{j=1}^n u^j(t)R^{kj}(t, \theta(t))u^j(t) + 2H^{kj}(t, \theta(t))u^j(t))dt \right\}, \quad (3)$$

式中:对于所有的 $k, j \in N_n$,矩阵 $R^{kj}(t, \theta(t))$ 是可逆正定对称的,并且 $Q^k(t, \theta(t))$ 是正定对称矩阵. $L^k(t, \theta(t)) \in \mathbb{R}^{1 \times l}$, $H^{kj}(t, \theta(t)) \in \mathbb{R}^{1 \times n_j}$ 分别是状态和控

制输入的相关矩阵, 组成了目标函数线性部分. 每个决策者都希望最小化自己的目标值来获得最大化收益. 多个决策者通过合作得到Pareto有效控制策略, 这意味着各个决策者在不损害别人利益的情况下达到整体利益最大化. 因此, 所有玩家都通过合作来提高自己的利益, 达到合作博弈的目的.

注 1 在该系统中, 考虑的目标函数由状态和控制变量的二次部分以及状态和控制变量的线性部分共同组成, 这样不仅考虑了均方差, 而且使得状态和控制变量能够更加贴近于所期望的数值或满足一些特定的要求, 如文献[14]的投资组合例子, 目标函数的二次项表示希望投资组合价值接近基准价值, 线性项是为了尽量使投资组合价值大于基准价值, 这样可以获得更多利益.

整个系统的策略控制输入是由多个决策者联合决策的, 因此可以将系统(1)简写为

$$\begin{cases} dx = (A(t, \theta(t))x(t) + B^c(t, \theta(t))u^c(t))dt + \\ \quad (D(t, \theta(t))x(t) + E^c(t, \theta(t))u^c(t))dw_t, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^l, \theta(0) = \theta_0 \in N_m, \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} B^c(t, \theta(t)) &= [B^1(t, \theta(t)) \ \cdots \ B^n(t, \theta(t))], \\ E^c(t, \theta(t)) &= [E^1(t, \theta(t)) \ \cdots \ E^n(t, \theta(t))]. \end{aligned}$$

这里定义

$u^c(t) := \text{col}(u^1(t), \dots, u^n(t)) \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T], \mathbb{R}^{n_u})$, 其中 $n_u = \sum_{k=1}^n n_k$, 容许控制集 $U^c(t)$ 定义为平方可积的向量空间, 即

$$\begin{aligned} U^c(t) &= \{u^c : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_u} \mid \\ &\quad \mathcal{E} \int_0^T u^c(t)u^c(t)dt < \infty\}, \end{aligned} \quad (5)$$

显然, 容许控制集合 $U^c(t)$ 是凸子集.

为了给出本文的主要结果, 需要下列定义和引理.

引理 1 对于系统(4), 假设所有决策者的控制集合 U^c 是凸的, 那么给定初始状态 x_0 和初始模态 θ_0 , 对任意 $\lambda \in [0, 1]$, $w_1, w_2 \in U^c$, 下面不等式恒成立:

$$\begin{aligned} \lambda J_k(w_1; x_0, \theta_0) + (1 - \lambda) J_k(w_2; x_0, \theta_0) - \\ J_k(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2; x_0, \theta_0) \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

证 上述状态与输入满足以下线性关系:

$$\begin{aligned} \lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2 \in U^c, \\ x_{\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2}(t) = \lambda x_{w_1}(t) + (1 - \lambda)x_{w_2}(t), \end{aligned}$$

所以, 给定任意初始模态 $\theta(0) = \theta_0 \in N_m$, 有

$$\begin{aligned} J_k(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2; x_0, \theta_0) = \\ \mathcal{E} \left\{ \int_0^T \{ \lambda^2 x'_{w_1}(t) Q_h^k x_{w_1}(t) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)^2 x'_{w_2}(t) Q_h^k x_{w_2}(t) + \\ 2\lambda(1 - \lambda) x'_{w_1}(t) Q_h^k x_{w_2}(t) + \\ 2L_h^k(\lambda x_{w_1}(t) + (1 - \lambda)x_{w_2}(t)) + \\ \sum_{j=1}^n \{ \lambda^2 w_1^{j'}(t) R_h^{kj} w_1^j(t) + \\ (1 - \lambda)^2 w_2^{j'}(t) R_h^{kj} w_2^j(t) + \\ 2H_h^{kj}(\lambda w_1^j(t) + (1 - \lambda)w_2^j(t)) + \\ \left. 2\lambda(1 - \lambda) w_1^{j'}(t) R_h^{kj} w_2^j(t) \mid \theta(t) = h \} dt \right\}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \lambda J_k(w_1; x_0, \theta_0) + (1 - \lambda) J_k(w_2; x_0, \theta_0) - \\ J_k(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2; x_0, \theta_0) = \\ \lambda(1 - \lambda) \mathcal{E} \left\{ \int_0^T \{ (x_{w_1}(t) - \right. \\ x_{w_2}(t))' Q_h^k (x_{w_1}(t) - x_{w_2}(t)) + \\ \sum_{j=1}^n (w_1^j(t) - w_2^j(t)) R_h^{kj} (w_1^j(t) - \\ \left. w_2^j(t)) \mid \theta(t) = h \} dt \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

证毕.

注 2 相比较于通常仅有状态和控制输入二次部分的目标函数, 本文研究的目标函数多了一次线性内容. 因此, 需要重新给出关于目标函数 $J_k(u^1, \dots, u^n; x_0, \theta_0)$ 凸性的证明.

定义 1^[18] 考虑系统(1)和目标函数(3), 对所有 $t \in [0, T]$ 和 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 对某个 $l \in \{1, 2, \dots, n\}$, 若存在策略 $u^{c^*}(t)$ 使得不等式组

$$J_i(u^{c^*}, \theta_0, x_0) \leq J_i(u^c, \theta_0, x_0), \quad (7)$$

$$J_l(u^c, \theta_0, x_0) < J_l(u^{c^*}, \theta_0, x_0) \quad (8)$$

对所有 $u^c \in U^c$ 都不成立, 则称 $u^{c^*}(t)$ 为 Pareto 有效的. 对应的

$$(J_1(u^{c^*}, \theta_0, x_0), \dots, J_n(u^{c^*}, \theta_0, x_0)),$$

为 Pareto 解, 所有的 Pareto 解的集合称为 Pareto 边界.

将多个玩家的控制考虑成玩家集体的联合控制 u^c , 目标函数(3)的表达式简化为

$$\begin{aligned} J_{k,T}(u^c; x_0, \theta_0) = \\ \mathcal{E} \left\{ \int_0^T (x'(t) Q^k(t, \theta(t)) x(t) + \right. \\ u^{c'}(t) R^k(t, \theta(t)) u^c(t) + 2L^k(t, \theta(t)) x(t) + \\ \left. 2H^k(t, \theta(t)) u^c(t) \right\} dt, \end{aligned} \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} R^k(t, \theta(t)) &= \text{diag}\{R^{k1}(t, \theta(t)), \dots, R^{kn}(t, \theta(t))\}, \\ H^k(t, \theta(t)) &= [H^{k1}(t, \theta(t)) \ \cdots \ H^{kn}(t, \theta(t))]. \end{aligned}$$

引理 2^[19] 设 $\mathcal{A} := \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_k \geq 0\}$;

$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1\}$, 对于所有 $\alpha \in \mathcal{A}$, 假设 $u^c \in U^c$, 若

$$u^c \in \arg \min_{u^c \in U^c} \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k J_k(u^c, x_0) \right\}, \quad (10)$$

那么, u^c 就是Pareto有效控制策略. 反之若策略集合 U^c 是凸集合, 并且目标函数(9)是关于 $u^c \in U^c$ 的凸函数, 如果 u^c 是Pareto有效控制策略, 那么存在 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{A}$ 使式(10)成立.

对于有限时域Pareto最优控制问题, 本文的思路为通过权重方法先将多目标优化问题转变为单目标的最优问题研究, 来获取联合最优控制策略, 然后通过改变权重数值的改变进一步求出所有的Pareto解. 目标函数(9)加权求和后的表达式为

$$\begin{aligned} J_{\alpha, T}(u^c; x_0, \theta_0) = & \mathcal{E} \left\{ \int_0^T (x'(t)Q_{\alpha}(t, \theta(t))x(t) + \right. \\ & u^c(t)R_{\alpha}(t, \theta(t))u^c(t) + 2L_{\alpha}(t, \theta(t))x(t) + \\ & \left. 2H_{\alpha}(t, \theta(t))u^c(t) \right\} dt, \end{aligned} \quad (11)$$

式中:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha}(t, \theta(t)) &= \sum_{k=1}^n \alpha_k Q^k(t, \theta(t)), \\ L_{\alpha}(t, \theta(t)) &= \sum_{k=1}^n \alpha_k L^k(t, \theta(t)), \\ H_{\alpha}(t, \theta(t)) &= \sum_{k=1}^n \alpha_k H^k(t, \theta(t)), \\ R_{\alpha}(t, \theta(t)) &= \sum_{k=1}^n \alpha_k R^k(t, \theta(t)). \end{aligned}$$

引理 3^[19](广义Itô公式) 假设对于 $i \in N_m$, $\alpha(t, x, i)$ 和 $\beta(t, x, i)$ 是 \mathbb{R}^l 值和 \mathcal{F}_t 适应的. 令 $dx(t) = \alpha(t, x(t), \theta(t))dt + \beta(t, x(t), \theta(t))dw(t)$, 那么给定关于 $t \in [0, T]$ 一次连续可微, 关于 $x \in \mathbb{R}^l$ 二次连续可微的函数 $\phi(t, x, i)$, 下列等式成立:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \phi(T, x(T), \theta(T)) - \phi(s, x(s), \theta(s)) \mid \theta(s) = i \} = \\ \mathcal{E} \left\{ \int_s^T \Gamma \phi(t, x(t), \theta(t)) dt \mid \theta(s) = i \right\}, \end{aligned}$$

其中 $\Gamma \phi(t, x, i) = \phi_t(t, x, i) + \alpha^T(t, x, i) \phi_x(t, x, i) + \frac{1}{2} \beta^T(t, x, i) \phi_{x,x}(t, x, i) \beta(t, x, i) + \sum_{j=1}^m \pi_{ij} \phi(t, x, j)$. 这里的符号 $\phi_t(t, x, i)$, $\phi_x(t, x, i)$ 和 $\phi_{x,x}(t, x, i)$ 分别表示为 $\phi_t(t, x, i) = \frac{\partial \phi(t, x, i)}{\partial t}$, $\phi_x(t, x, i) = \frac{\partial \phi(t, x, i)}{\partial x}$, $\phi_{x,x}(t, x, i) = \frac{\partial^2 \phi(t, x, i)}{\partial x^2}$.

3 主要结论

本节主要给出一组耦合广义微分Riccati方程与线性微分方程来求解Pareto最优控制策略, 并给出求解Pareto边界的方法.

定理 1 考虑系统(4)与目标函数(11), 对于所有

$t \in [0, T]$, 有

$$\begin{cases} \dot{P}(t, i) + A'(t, i)P(t, i) + \sum_{j=1}^m \pi_{ij} P(\cdot, j) + \\ P(t, i)A(t, i) + D'(t, i)P(t, i)D(t, i) + \\ Q_{\alpha}(t, i) - \Psi'_{\alpha}(t, i)\eta_{\alpha}(t, i)^{-1}\Psi_{\alpha}(t, i) = 0, \\ R_{\alpha}(t, i) + E^{c'}(t, i)P(t, i)E^c(t, i) > 0, \\ P(T, i) = 0, t \in [0, T], i \in N_m, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \dot{V}(t, i) + V(t, i)A(t, i) + \sum_{j=1}^m \pi_{ij} V(\cdot, j) + \\ L_{\alpha}(t, i) - \mu'_{\alpha}(t, i)\eta_{\alpha}(t, i)^{-1}\Psi_{\alpha}(t, i) = 0, \\ \dot{V}(T, i) = 0, t \in [0, T], i \in N_m, \end{cases} \quad (13)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha}(t, i) &= B^{c'}(t, i)P(t, i) + \\ & E^{c'}(t, i)P(t, i)D(t, i), \\ \eta_{\alpha}(t, i) &= E^{c'}(t, i)P(t, i)E^c(t, i) + R_{\alpha}(t, i), \\ \mu_{\alpha}(t, i) &= (H_{\alpha}(t, i) + V(t, i)B^{c'}(t, i)), \end{aligned}$$

若以下广义微分Riccati方程(12)与线性微分方程(13), 存在一对解集 $(P(t, 1), \dots, P(t, m))$, $(V(t, 1), \dots, V(t, m))$, 并且 $\text{diag}\{P(t, 1), \dots, P(t, m)\} \geq 0$, 那么, 在系统(4)的约束下, 通过设计控制输入使得目标函数(11)达到最小. 特别地, 最优的目标函数为

$$\begin{aligned} \min_{u^c \in \mathcal{L}_{\mathbb{F}}^2([0, T], \mathbb{R}^{n_u})} J_{\alpha, T}(x_0, \theta(t) = i; u^c) = \\ 2V(0, \theta(0))x_0 + x'_0 P(0, \theta(0))x_0 - \\ \mathcal{E} \int_0^T \mu'_{\alpha}(t, i)\eta_{\alpha}(t, i)^{-1}\mu_{\alpha}(t, i) dt, \end{aligned}$$

另外, Pareto最优策略可以表示为

$$u^c(t) = \sum_{i=1}^m (K_{\alpha}(t, i)x(t) + O_{\alpha}(t, i))\chi_{\{\theta(t)=i\}}(t),$$

其中:

$$\begin{aligned} K_{\alpha}(t, i) &= -\eta_{\alpha}(t, i)^{-1}\Psi_{\alpha}(t, i), \\ O_{\alpha}(t, i) &= -\eta_{\alpha}(t, i)^{-1}\mu_{\alpha}(t, i). \end{aligned}$$

证 对于系统(4), 对函数 $x'(t)P(t, \theta(t))x(t)$ 应用广义Itô公式得

$$\begin{aligned} \mathcal{E} (x'(T)P(T, \theta(T))x(T) - \\ x'_0 P(0, \theta(0))x_0 \mid \theta(0) = i) = \\ \mathcal{E} \left\{ \int_0^T [x'(t)\dot{P}(t, \theta(t))x(t) - (A(t, \theta(t))x(t) + \right. \\ B^{c'}(t, \theta(t))u^c(t))P(t, \theta(t))x(t) + \\ x'(t)P(t, \theta(t))(A(t, \theta(t))x(t) + \\ B^c(t, \theta(t))u^c(t) + (D(t, \theta(t))x(t) + \\ E^{c'}(t, \theta(t))u^c(t))P(t, \theta(t))(D(t, \theta(t))x(t) + \\ E^c(t, \theta(t))u^c(t) + \\ \left. x'(t)\sum_{j=1}^m \pi_{ij} P(\cdot, j)x(t)] dt \mid \theta(0) = i \right\}, \end{aligned}$$

相应地,

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(V(T, \theta(T))x(T) - V(0, \theta(0))x_0 \mid \theta(0) = i) = \\ & \mathcal{E}\left\{\int_0^T (\dot{V}(t, \theta(t))x(t) + \right. \\ & V(t, \theta(t))(A(t, \theta(t))x(t) + B^c(t, \theta(t))u^c(t)) + \\ & \left. \sum_{j=1}^m \pi_{ij} V(\cdot, j)x(t))dt \mid \theta(0) = i\right\}, \end{aligned}$$

对所有 $i \in N_m$, 令

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(t, i) &= B^{c'}(t, i)P(t, i) + E^{c'}(t, i)P(t, i)D(t, i), \\ \eta_\alpha(t, i) &= E^{c'}(t, i)P(t, i)E^c(t, i) + R_\alpha(t, i), \\ \mu_\alpha(t, i) &= (H_\alpha(t, i) + V(t, i)B^c(t, i))', \end{aligned}$$

应用配方法, 则

$$\begin{aligned} & J_{\alpha, T}(u^c; x_0, \theta_0 = i) = \\ & \mathcal{E}\left\{\int_0^T \{x'(t)\Theta(t, \theta(t))x(t) - \right. \\ & \mu'_\alpha(t, \theta(t))\eta_\alpha(t, \theta(t))^{-1}\mu_\alpha(t, \theta(t)) + \\ & (u^c(t) + \eta_\alpha(t, \theta(t))^{-1}\Psi_\alpha(t, \theta(t))x(t) + \\ & \eta_\alpha(t, \theta(t))^{-1}\mu_\alpha(t, \theta(t)))'\eta_\alpha(t, \theta(t))(u^c(t) + \\ & \eta_\alpha(t, \theta(t))^{-1}\Psi_\alpha(t, \theta(t))x(t) + \\ & \eta_\alpha(t, \theta(t))^{-1}\mu_\alpha(t, \theta(t))) + \\ & \left. 2\Lambda(t, \theta(t))x(t)\}dt \mid \theta(0) = i\right\} + \\ & 2V(0, \theta(0))x_0 + x'_0 P(0, \theta(0))x_0, \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \Lambda(t, \theta(t)) &= \dot{V}(t, \theta(t)) + L_\alpha(t, \theta(t)) + \\ & V(t, \theta(t))A(t, \theta(t)) + \sum_{j=1}^m \pi_{ij} V(\cdot, j) - \\ & \mu'_\alpha(t, \theta(t))\eta_\alpha(t, \theta(t))^{-1}\Psi_\alpha(t, \theta(t)), \\ \Theta(t, \theta(t)) &= Q_\alpha(t, \theta(t)) + \dot{P}(t, \theta(t)) + \\ & A'(t, \theta(t))P(t, \theta(t)) + \\ & P(t, \theta(t))A(t, \theta(t)) + \sum_{j=1}^m \pi_{ij} P(\cdot, j) + \\ & D'(t, \theta(t))P(t, \theta(t))D(t, \theta(t)) - \\ & \Psi'_\alpha(t, \theta(t))\eta_\alpha(t, \theta(t))^{-1}\Psi_\alpha(t, \theta(t)). \end{aligned}$$

若对所有的 $i \in N_m$ 存在解 $P(t, i)$, $V(t, i)$ 使得式 (12)–(13) 成立, 则 $J_{\alpha, T}(u^c; x_0, \theta_0 = i)$ 有最小值, 并且最优控制

$$u^c(t) = \sum_{i=1}^m (K_\alpha(t, i)x(t) + O_\alpha(t, i))\chi_{\{\theta(t)=i\}}(t).$$

证毕.

注 3 考虑的目标函数具有状态和控制变量的线性部分, 因此, 相比已有的 Pareto 最优控制求解方法^[19], 本文定理 1 运用配方法将线性部分内容进行处理, 得到的 Pareto 最优控制求解需满足线性微分方程 (13) 存在解的条件.

此时, 所有玩家的联合最优控制策略已经可以通

过定理 1 求得, 相应地, 每个玩家自己的控制可以通过定义 $u^c(t) := \text{col}(u^1(t), \dots, u^n(t))$ 来获得. 为了方便, 令玩家 k 的最优控制表示为

$$u^{k*}(t) = -K_k(t, i) - O_k(t, i).$$

由引理 2 可知, 当策略集合是凸集合时, 考虑到各个玩家的目标函数是凸函数, 因此所有的 Pareto 解可以通过改变权重取值来给出. 下面给出所有 Pareto 解的求解方法.

定理 2 对于系统 (1), 给定 Pareto 最优控制输入 $u^c(t)$, 所有 Pareto 解的集合表示为

$$\{J_1(u^c; x_0), \dots, J_n(u^c; x_0) \mid \alpha \in \mathcal{A}, \theta_0 = \xi\},$$

任意给定 $\theta(t) = h \in N_m$, 则玩家 k 的最优性能指标表示为

$$\begin{aligned} & J_k(u^c; x_0, \theta_0 = \xi) = \\ & \mathcal{E}\left\{\int_0^T \left(\sum_{j=1}^n O_j'(t, h)R^{kj}(t, \theta(t))O_j(t, h) - \right. \right. \\ & 2\sum_{j=1}^n H^{kj}(t, h)O_j(t, h) + \\ & \left. \left(\sum_{j=1}^n E^{j'}(t, h)O_j(t, h)\right)W^k(t, h) \times \right. \\ & \left. \left(\sum_{j=1}^n E^j(t, h)O_j(t, h)\right) - \right. \\ & \left. 2F^k(t, h)\left(\sum_{j=1}^n B^j(t, h)O_j(t, h)\right)\right\}dt + \\ & x'_0 W^k(0, \xi)x_0 + 2F^k(0, \xi)x_0, \end{aligned} \quad (14)$$

并且 $W^k(0, \xi)$, $F^k(0, \xi)$ 通过求解以下方程给出:

$$\begin{aligned} & Q^k(t, h) + \sum_{j=1}^n K_j'(t, h)R^{kj}(t, h)K_j(t, h) + \\ & \dot{W}^k(t, h) + \sum_{j=1}^m \pi_{ij} W^k(\cdot, j) + \\ & (A(t, h) - \sum_{j=1}^n B^j(t, h)K_j(t, h))'W^k(t, h) + \\ & W^k(t, h)(A(t, h) - \sum_{j=1}^n B^j(t, h)K_j(t, h)) + \\ & (D(t, h) - \sum_{j=1}^n E^j(t, h)K_j(t, h))'W^k(t, h) \times \\ & (D(t, h) - \sum_{j=1}^n E^j(t, h)K_j(t, h)) = 0, \quad (15) \\ & L^k(t, h) - \left(\sum_{j=1}^n B^j(t, h)O_j(t, h)\right)'W^k(t, h) - \\ & 2\sum_{j=1}^n H^{kj}(t, h)K_j(t, h) + \sum_{j=1}^m \pi_{ij} F^k(\cdot, j) - \\ & \left(\sum_{j=1}^n E^j(t, h)O_j(t, h)\right)'W^k(t, h)(D(t, h) - \\ & \sum_{j=1}^n E^j(t, h)K_j(t, h)) + \dot{F}^k(t, h) + \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n O'_j(t, h)R^{kj}(t, \theta(t))K_j(t, h) + F^k(t, h)(A(t, h) - \sum_{j=1}^n B^j(t, h)K_j(t, h)) = 0. \quad (16)$$

证 将玩家k的最优控制 $u^{i^*}(t)$ 带入系统(1)和目标函数(3)中,可以得到

$$\begin{aligned} & J_{k,T}(u^{j^*}; x_0, \theta_0) = \\ & \mathcal{E}\left\{ \int_0^T (x'(t)(Q^k(t, h) + \sum_{j=1}^n K'_j(t, h)R^{kj}(t, h)K_j(t, h))x(t) + \right. \\ & 2L^k(t, h)x(t) + \sum_{j=1}^n O'_j(t, h)R^{kj}(t, \theta(t))O_j(t, h)) + \\ & 2(\sum_{j=1}^n O'_j(t, h)R^{kj}(t, \theta(t))K_j(t, h))x(t) - \\ & 2(\sum_{j=1}^n H^{kj}(t, h)K_j(t, h))x(t) - \\ & \left. 2\sum_{j=1}^n H^{kj}(t, h)O_j(t, h)dt \right\}, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} dx = (A(t, h) - \sum_{j=1}^n B^j(t, h)K_j(t, h))x(t)dt - \\ \quad \sum_{j=1}^n B^j(t, h)O_j(t, h)dt + (D(t, h) - \\ \quad \sum_{j=1}^n E^j(t, h)K_j(t, h))x(t)dw_t - \\ \quad \sum_{j=1}^n D^j(t, h)O_j(t, h)dw_t, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^l, \theta(0) = \theta_0 \in N_m. \end{cases} \quad (18)$$

令 $\theta_0 = \xi$, 分别对函数 $x'(t)W^k(t, h)x(t)$ 和 $F^k(t, h)x(t)$ 运用广义Itô公式, 将其结果带入目标函数(3)中可知, 当方程(15)–(16)成立时, 可以通过式(14)得到玩家k的Pareto解. 证毕.

4 仿真验证

今通过数值仿真验证算法的有效性. 假设系统(1)状态参数矩阵为

$$\begin{aligned} A_1 &= [-1.061], B_1^c = [-0.426 \ 0.458], \\ A_2 &= [-1.137], B_2^c = [0.064 \ -0.012], \\ D_1 &= [0.530], E_1^c = [-1.353 \ -0.899], \\ D_2 &= [0.351], E_2^c = [-0.601 \ 0.827], \end{aligned}$$

成本函数(3)中的参数矩阵为

$$\begin{aligned} Q_1^1 &= [1.712], H_1^1 = [-0.512 \ -0.147], \\ Q_1^2 &= [1.976], H_1^2 = [-0.394 \ -0.922], \\ Q_2^1 &= [2.909], H_2^1 = [-0.308 \ 0.295], \\ Q_2^2 &= [0.649], H_2^2 = [0.157 \ 0.446], \\ L_1^1 &= [-1.982], L_2^1 = [-0.886], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2^1 &= [-0.582], L_2^2 = [-1.235], \\ R_1^1 &= \begin{bmatrix} 0.133 & 0.0 \\ 0.0 & 0.013 \end{bmatrix}, R_1^2 = \begin{bmatrix} 1.025 & 0.0 \\ 0.0 & 3.513 \end{bmatrix}, \\ R_2^1 &= \begin{bmatrix} 1.364 & 0.0 \\ 0.0 & 2.005 \end{bmatrix}, R_2^2 = \begin{bmatrix} 0.896 & 0.0 \\ 0.0 & 1.743 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

为了方便, 以参数符号下标表示系统模态, 给定模态切换速率 $\pi_{11} = 0.4, \pi_{22} = 0.6$, 目标函数权重 $\alpha_1 = 0.3$, 通过广义微分 Riccati 方程 (12) 与线性微分方程 (13), 最终求得参数 $(P(1), P(2))$, 如图1所示.

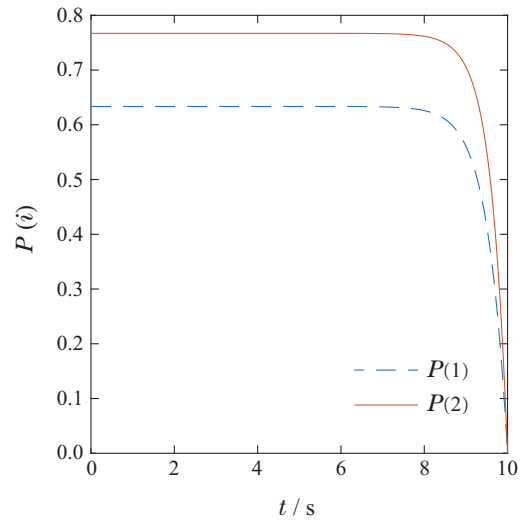


图1 $P(1)$ 和 $P(2)$ 值的变化曲线

Fig. 1 Evolutions of $P(1)$ and $P(2)$

从图1中可以看出, $P(1)$ 和 $P(2)$ 满足定理1中 $\text{diag}\{P(t, 1), P(t, 2)\} \geq 0$ 的约束. 在此条件下给定的模态变化, 即可得到系统状态和控制随时间的变化如图2–3所示.

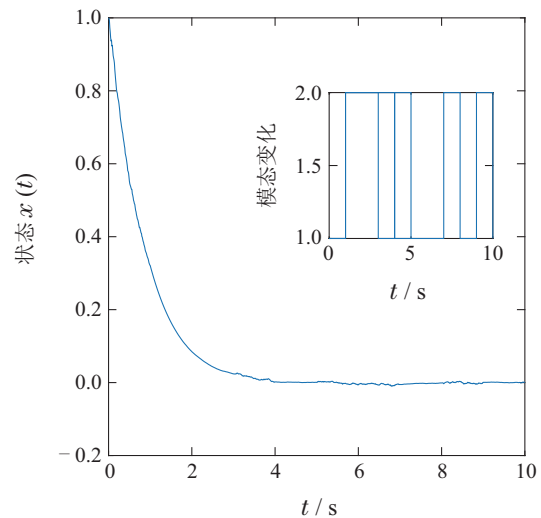


图2 状态 $x(t)$ 的变化曲线

Fig. 2 Evolutions of $x(t)$

虽然系统模态在时刻1~10中一直是跳变的, 但通过施加定理1得出的控制, 从图2可以看出, 系统在时

刻4以后已经基本区域稳定. 如图3, 在 $[0, -1]$ 区间不断改变目标函数权重 α_1 与 α_2 , 然后通过定理2, 求解式(14)–(16), 即可得到系统的Pareto边界, 如图4所示.

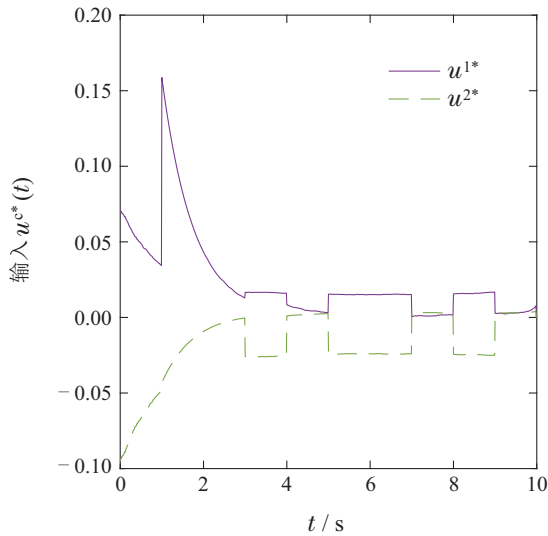


图3 控制输入 $u^{c*}(t)$ 的变化曲线

Fig. 3 Evolutions of $u^{c*}(t)$

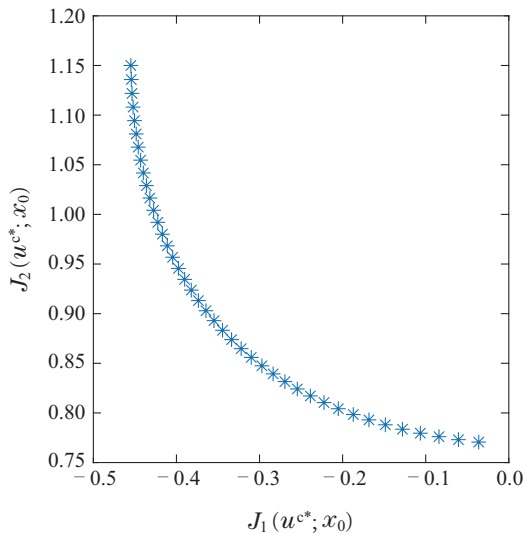


图4 Pareto边界

Fig. 4 Pareto frontier

5 结论

本文研究了具有乘性噪声和两种不同模态进行Markov跳跃的连续时间线性系统的控制器设计问题, 给出了保证系统均方意义下稳定的充分条件. 证明了最优控制律与一组广义微分Riccati方程和线性微分方程相关, 通过改变权重得出最优控制输入下的所有Pareto解. 该理论成果对风力发电相关应用有着指导意义^[20]. 例如, 在风光储联合发电的微电网中, 通过制定合理的风光发电和储能调控策略, 来完成最优的电网管理. 目前, 针对Markov跳变随机系统还有很多问题尚未研究, 接下来将基于本文结果进一步探索实

际生产中模型部分(完全)未知时^[11]或目标函数为非凸时^[21]Pareto策略求解问题.

参考文献:

- [1] BAUERLE N, RIEDER U. *Markov Decision Processes with Applications to Finance*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2011.
- [2] DOMBROVSKII V V, LYASHENKO E A. A linear quadratic control for discrete systems with random parameters and multiplicative noise and its application to investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*, 2003, 64: 1558 – 1570.
- [3] BOUKAS E K, ZHANG Q, YIN G. Robust production and maintenance planning in stochastic manufacturing systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(6): 1098 – 1102.
- [4] CHEN Huiying, LIU Renwei, XIA Weifeng, et al. Asynchronous event-triggered dissipative fault-tolerant control for Markov jump systems. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(5): 874 – 882. (陈惠英, 刘仁伟, 夏卫锋, 等. Markov跳变系统的非同步事件触发耗散容错控制. *控制理论与应用*, 2023, 40(5): 874 – 882.)
- [5] ZHENG Z, TRIVEDI K S, WANG N, et al. Markov regenerative models of web servers for their user-perceived availability and bottlenecks. *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*, 2020, 17(1): 92 – 105.
- [6] BOUKAS E K. *Stochastic Switching Systems: Analysis and Design*. Boston, US: Birkhäuser Press, 2006.
- [7] MAO Z, JIANG B, SHI P. H_∞ fault detection filter design for networked control systems modelled by discrete Markovian jump systems. *IET Control Theory and Applications*, 2007, 1(5): 1336 – 1343.
- [8] VAL J B R, GEROMEL J C, COSTA O L V. Solutions for the linear-quadratic control problem of Markov jump linear systems. *Optimization Theory and Applications*, 1999, 103(2): 283 – 311.
- [9] HOU T, ZHANG W, MA H. Finite horizon H_2/H_∞ control for discrete-time stochastic systems with Markovian jumps and multiplicative noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(5): 1185 – 1191.
- [10] XU J, ZHANG H. Open-loop decentralized LQ control problem with multiplicative noise. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2022, 9(4): 1887 – 1898.
- [11] LAI J, XIONG J, SHU Z. Model-free optimal control of discrete-time systems with additive and multiplicative noises. *Automatica*, 2023, 147: 110685.
- [12] AIT RAMI M, MOORE J B, ZHOU X Y. Indefinite stochastic linear quadratic control and generalized differential Riccati equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002, 40(4): 1296 – 1311.
- [13] LIU Y, YIN G, ZHOU X Y. Near-optimal controls of random-switching LQ problems with indefinite control weight costs. *Automatica*, 2005, 41(6): 1063 – 1070.
- [14] COSTA O L V, DE PAULO W L. Indefinite quadratic with linear costs optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems. *Automatica*, 2007, 43(4): 587 – 597.
- [15] ZHU Guozheng, ZHANG Maoguang, HE Shuping. Policy iteration-based non-zero sum differential feedback Nash control for continuous-time Markov jump linear systems. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(8): 1749 – 1756. (朱国政, 张茂光, 何舒平. 基于策略迭代算法的连续时间线性Markov跳变系统非零和微分反馈Nash控制. *控制理论与应用*, 2020, 37(8): 1749 – 1756.)
- [16] ENGWERDA J C. Necessary and sufficient conditions for Pareto optimal solutions of cooperative differential games. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2010, 48(6): 3859 – 3881.

- [17] REDDY P V, ENGWERDA J C. Pareto optimality in infinite horizon linear quadratic differential games. *Automatica*, 2013, 49(6): 1705 – 1714.
- [18] LIN Y, JIANG X, ZHANG W. Necessary and sufficient conditions for Pareto optimality of the stochastic systems in finite horizon. *Automatica*, 2018, 94: 341 – 348.
- [19] JIANG X, TIAN S, ZHANG T, et al. Pareto optimal strategy for linear stochastic systems with H_∞ constraint in finite horizon. *Information Sciences*, 2020, 512: 1103 – 1117.
- [20] LIN Z, LIU J, ZHANG W, et al. Regional pole placement of wind turbine generator system via a markovian approach. *IET Control Theory and Applications*, 2016, 10(15): 1771 – 1781.
- [21] GUIGUE A. Approximation of the Pareto optimal set for multiobjective optimal control problems using viability kernels. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2014, 20: 95 – 115.

作者简介:

王乐 硕士研究生, 主要研究方向为随机系统的最优控制、强化学习, E-mail: 1335194285@qq.com;

崔凯 硕士研究生, 主要研究方向为随机系统的Pareto最优控制研究, E-mail: 939299345@qq.com;

蒋秀珊 副教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为强化学习、随机稳定性分析、多目标动态优化等, E-mail: jiangxsjy@163.com;

赵东亚 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为滑模控制、机器人控制、二氧化碳捕集、运输、驱油及封存全流程建模、优化与评价等, E-mail: dyzhao@upc.edu.cn;

张维海 教授, 博士, 博士生导师, 主要研究方向为随机控制理论及其应用, E-mail: w_hzhang@163.com.