# 一类具有时变系数的抛物系统的积分输入状态镇定问题

陈巧玲[1], 郑　军[1,2†], 朱谷川[2]

(1. 西南交通大学 数学学院, 四川 成都 611756; 2. 蒙特利尔工学院 电气工程系, 加拿大 蒙特利尔 H3T 1J4)

**摘要**: 对于具有时变系数的抛物系统, 如何通过非时变的核函数进行边界反馈控制设计以确保闭环系统的稳定性, 一直是极具挑战性的问题. 本文考察一类特殊的具有时空变系数的抛物系统的镇定问题. 具体地, 在未对时变系数施加Gevrey条件也未使用事件触发策略的前提下, 本文通过与时间变量无关的核函数设计一个边界反馈控制器以镇定系统; 为了刻画外加扰动为系统稳定性带来的影响, 本文在输入状态稳定性理论框架下研究闭环系统的稳定性, 特别地, 利用Lyapunov逼近方法以及带有非局部边界条件的抛物系统的比较原理, 建立闭环系统在空间 $L^1$ 范数下关于扰动的积分输入状态稳定性估计式. 通过数值实验, 进一步验证本文设计的控制器的有效性及所提出的方法的可行性.

**关键词**: 积分输入状态稳定性; 反步法; 镇定; Lyapunov逼近方法; 比较原理; 抛物方程; 时变系数

**引用格式**: 陈巧玲, 郑军, 朱谷川. 一类具有时变系数的抛物系统的积分输入状态镇定问题. 控制理论与应用, 2024, 41(12): 2259 – 2268

DOI: 10.7641/CTA.2023.30020

# Integral input-to-state stabilization of a class of parabolic systems with time-varying coefficients

CHEN Qiao-ling[1], ZHENG Jun[1,2†], ZHU Gu-chuan[2]

(1. School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan 611756, China;
2. Department of Electrical Engineering, Polytechnique Montréal, Montreal QC H3T 1J4, Canada)

**Abstract:** For parabolic systems with time-varying coefficients, it remains a challenging problem how to design a boundary feedback control via a time-invariant kernel function for ensuring the stability of the closed-loop system. In this paper, the problem of stabilization of certain class of parabolic systems with space-time-varying coefficients is investigated. Specifically, without applying a Gevrey condition and an event-triggered scheme, a boundary feedback controller is designed by using a time invariant kernel function. Meanwhile, in order to characterize the influence of external disturbances on the stability of the system, the stability of the closed-loop system is studied in the framework of input-to-state stability theory (ISS theory). In particular, the $L^1$-ISS of the considered system is established in the spatial $L^1$-norm by using the approximative Lyapunov method and comparison principle for parabolic PDEs with nonlocal boundary conditions. The validity of the controller and the proposed approach are further verified by numerical simulations.

**Key words:** integral input-to-state stability; backstepping; stabilization; approximative Lyapunov method; comparison principle; parabolic equation; time-varying coefficient

**Citation:** CHEN Qiaoling, ZHENG Jun, ZHU Guchuan. Integral input-to-state stabilization of a class of parabolic systems with time-varying coefficients. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(12): 2259 – 2268

## 1 引言

近几十年来, 反步法(backstepping)被证明是偏微分方程描述的分布参数系统控制器设计的有力工具[1–3]. 特别地, 反步法被广泛应用于研究一维抛物系统的镇定问题, 例如, 常系数系统[1–2,4]、系数仅依赖于空间变量的系统[5–7]、系数仅依赖于时间变量的系统[8–10]、系数依赖于空间变量和时间变量的系统[11–13], 以及耦合系统[14–16]等. 该方法的主要思想是, 设计边界反馈控制器并利用Volterra积分变换, 将含有不稳定项的偏微分系统转化为一个比较容易处理的稳定的目标系统, 从而消除原系统的不稳定项对系统稳定性分析带来的直接影响. 一般情况下, 在采

收稿日期: 2023−01−15; 录用日期: 2023−08−14.
†通信作者. E-mail: zhengjun@swjtu.edu.cn; zhengjun2014@aliyun.com.
本文责任编委: 段志生.
国家自然科学基金项目(11901482), 加拿大自然科学和工程研究委员会(RGPIN–2024–04709)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (11901482) and the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (RGPIN–2024–04709).

用反步法设计控制器时, 所选择的目标系统的系数通常为常数, 而很少依赖于时间变量或空间变量. 此时, 利用经典的Lyapunov方法及Volterra积分变换的逆变换, 比较容易建立闭环系统的稳定性.

对于一般的具有时变系数的抛物系统的镇定问题, 尽管反步法在控制器设计方面行之有效, 但还存在一些问题尚未得到解决. 正如著名学者Krstic等人[12]指出: 通过反步法设计的控制器, 导出的核函数依赖于时间变量, 获得核函数的闭式解(解析解, closed form solution) 极具挑战性, 甚至是不可能的事 (另见文献[2, 13]中相关陈述). 因此, 关于具有时变系数的抛物系统镇定问题, 大多数文献是基于时变的核函数进行控制器设计, 同时对时变系数施加Gevrey条件以保证时变核函数的适定性和正则性, 这为理论分析以及控制器的执行带来不便[12–13]. 最近, 文献[12]提出了一种事件触发策略, 在一定程度上降低了控制器的执行复杂度. 然而, 由于在控制器执行过程中需要对时变系数进行周期性采样, 文献[12]提出的仍然是一种动态设计策略. 不仅如此, 为了避免出现芝诺现象, 文献[12]对时变系数做出全局有界性及Lipschitz连续性(或Hölder连续性)假设, 这是比较强的条件. 因此, 如何通过非时变的核函数进行控制器设计并在较少的条件下获得抛物系统的稳定性, 这一问题值得深入探讨.

另外, 对于工程实际问题, 所考察的系统经常会涉及外加扰动, 例如, 参数误差、模型的不精确性、白噪声等. 为了刻画外加扰动对系统稳定性带来的影响, Sontag等人[17–19]提出了输入状态稳定性(input-to-state stability, ISS)、积分输入状态稳定性 (integral ISS, iISS), 以及其衍生概念, 用来刻画外加扰动对有限维系统稳定性带来的影响, 并逐步发展为ISS理论. 近十年来, ISS理论被推广应用于偏微分方程主导的无限维系统[16, 20–24].

对于偏微分系统, 大多数文献考察的是空间$L^p$范数意义下的系统关于区域内部扰动或者边界扰动的ISS或$L^r$积分输入状态稳定性($L^r$-ISS), 其中, $p \geqslant 2, r \geqslant 2$, 而对在空间$L^1$范数下的$L^1$-ISS的研究还比较少[25–27]. 但基于实际应用或者从数学角度考虑, 研究偏微分系统在$L^1$范数下的$L^1$-ISS是很有必要的. 一方面, 外加扰动的性质通常不会很好, 在较好的函数空间(例如$L^p$空间($p \geqslant 2$))对扰动进行测量是比较困难的事; 另一方面, 很多物理模型本身就要求人们要在空间$L^1$范数下对系统的解进行刻画或估计[28–30]. 然而, 即使是对于具有常系数的开环抛物系统, 建立其在空间$L^1$范数下关于扰动的ISS(或$L^1$-ISS)并非易事, 尤其相较于区域内部扰动, 区域边界扰动为ISS及iISS分析带来更大困难[21]; 特别地, 如文献[26–27]所指出的, 对于偏微分系统, 由于解的$L^1$积分关于时间变量的偏导数会产生奇异性, 解的$L^1$积分不再适合作为Lyapunov候选者, 因此难以利用经典的Lyapunov方法进行稳定性分析[25–27].

基于以上事实, 本文考察一类具有特殊形式的时变系数的抛物系统的积分输入状态镇定问题. 基于反步法, 本文通过一个不依赖于时间变量的核函数设计边界反馈控制器, 以保证闭环系统在空间$L^1$范数下关于区域内部扰动和边界扰动是$L^1$-ISS的. 值得一提的是, 与经典的控制器设计思路不同的是, 本文先确定核函数, 再确定目标系统, 这使得本文利用不依赖于时间变量的核函数进行控制器设计成为可能. 尽管目标系统的反应系数将依赖于时间变量, 但对其进行稳定性分析仍然是一件较为容易的事.

本文主要贡献包括: 1) 文章展示对于某些特殊的具有时变系数的抛物系统, 非时变的核函数仍可以用来设计控制器, 以降低计算量和执行复杂度; 特别地, 对于一些特殊的具有时变系数的抛物系统, 本文证明控制器可以通过具有闭式解的核函数来进行设计; 2) 对于扰动对系统稳定性产生的影响, 本文在空间$L^1$范数意义下进行定性刻画, 所建立的iISS估计式在$L^p$意义下是最弱的一种.

本文的结构如下: 先介绍一些基本符号; 第2节描述本文的主要研究对象及问题; 第3节展示控制器的设计和本文的主要结论; 第4节给出目标系统的具体形式, 以及一些辅助结论用于后文的稳定性分析; 在第5节, 利用Lyapunov逼近方法[26]和比较原理证明目标系统的$L^1$-ISS估计式, 以及本文的主要结论; 第6节展示数值结果与分析; 第7节总结本文的主要工作.

**符号** $\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_+, \mathbb{R}, \mathbb{R}_{>0}$和$\mathbb{R}_{\geqslant 0}$分别表示非负整数、正整数、实数、正实数和非负实数集合. 对于任意的开区域或闭区域$\Omega \subset \mathbb{R}^1$和$p \in [1, +\infty]$, $L^p(\Omega)$表示标准的勒贝格空间并赋予范数$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. 令$C(\Omega) := \{v: \Omega \to \mathbb{R} \mid v在\Omega上连续\}$. 对于任意的$i \in \mathbb{N}_+$, 令$C^i(\Omega) := \{v: \Omega \to \mathbb{R} \mid v在\Omega上有i阶连续导数\}$. 令$Q_\infty := (0,1) \times \mathbb{R}_{>0}$和$\bar{Q}_\infty := [0,1] \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. 对于任意的$T \in \mathbb{R}_{>0}$, 令$Q_T := (0,1) \times (0,T)$和$\bar{Q}_T := [0,1] \times [0,T]$. 令$C^{2,1}(\bar{Q}_T) := \{v: \bar{Q}_T \to \mathbb{R} \mid v, v_x, v_{xx}, v_t \in C(\bar{Q}_T)\}$. 对于函数$v: \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$, 及任意固定的$t \in [0,T]$, 定义$v[t] := v(\cdot, t)$, 其表示为关于第1个变量的一元函数, 故当$t \in [0,T]$固定时, 对所有的$y \in [0,1]$有$v[t](y) = v(y,t)$. 令$L^p((0,T); L^1(0,1)) := \{v: (0,1) \times (0,T) \to \mathbb{R} \mid v[t] \in L^1(0,1), v[x] \in L^p(0,T)\}$并赋予范数

$$\|v\|_{L^p((0,T);L^1(0,1))} := \Big(\int_0^T \Big(\int_0^1 |v(x,t)| \mathrm{d}x\Big)^p \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}},$$

令$\mathcal{K} := \{\gamma: \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \mid \gamma连续、严格单调递增, 且\gamma(0) = 0\}$, $\mathcal{L} := \{\gamma: \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \mid \gamma连续、严格单调递减, 且\lim\limits_{s \to \infty} \gamma(s) = 0\}$, $\mathcal{KL} := \{\beta: \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \mid \beta连续, 且\beta[\cdot, t] \in \mathcal{K}, \forall t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}; \beta[s, \cdot] \in \mathcal{L}, \forall s \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

## 2 问题描述

本文考察如下抛物系统积分输入状态镇定问题:

$$\begin{cases} w_t(x,t)=w_{xx}(x,t)+c(x,t)w(x,t)+ \\ \qquad\qquad f(x,t), \qquad (x,t)\in Q_\infty, \\ w(0,t)=0, \qquad\qquad t\in\mathbb{R}_{>0}, \\ w_x(1,t)=U(t)+d(t),\ t\in\mathbb{R}_{>0}, \\ w(x,0)=w_0(x), \qquad x\in(0,1), \end{cases} \tag{1}$$

其中: 反应系数$c$同时依赖于空间变量$x$和时间变量$t$; $f$和$d$分别表示分布在区域内部和边界的扰动, 通常可以用来描述模型不精准性、参数误差、外界干扰等; $U$为需要设计的控制输入; $w_0$为给定的初值. 当$f\equiv d\equiv 0$且$c$为非负常数且很大时(例如$c>\dfrac{\pi^2}{4}$), 开环系统(1)是不稳定的[1–2].

为了描述外加扰动对系统稳定性产生的影响, 本文介绍如下概念.

**定义 1** 如果存在函数$\beta\in\mathcal{KL}$和$\gamma_1,\gamma_2\in\mathcal{K}$, 使得对于任意给定的初值$w_0$, 系统(1)的解 (某个意义下)存在, 且满足如下估计式:

$$\begin{aligned}\|w[t]\|_{L^1(0,1)}\leqslant\ &\beta(\|w_0\|_{L^1(0,1)},t)+ \\ &\gamma_1(\|f\|_{L^r((0,t);L^1(0,1))})+ \\ &\gamma_2(\|d\|_{L^r(0,t)}),\forall t\in\mathbb{R}_{\geqslant 0},\end{aligned} \tag{2}$$

其中$r\in[1,+\infty)$, 则称系统(1)关于区域内部扰动$f$和区域边界扰动$d$在空间$L^1$范数下是$L^r$–输入状态稳定的($L^r$-input-to-state stable, $L^r$-ISS).

本文总假设$c$为如下可分离变量的形式:

$$c(x,t)=c_1(x)+c_2(t), \tag{3}$$

其中: $c_1\in C([0,1])$, $c_2\in C(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$满足

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}} c_2(t)<+\infty, \tag{4}$$

设$f\in C(\bar{Q}_\infty)$, $d\in C(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$. 初值条件在后文给出.

本文的主要目的是, 在上述结构性条件下, 通过不依赖于时间变量的核函数设计边界反馈控制律$U(t)$, 以使闭环系统(1)在空间$L^1$范数下关于$f$和$d$是$L^1$-ISS的. 特别地, 当$f\equiv d\equiv 0$时, 闭环系统在空间$L^1$范数下是渐近稳定的.

## 3 控制器设计与主要结论

### 3.1 控制器设计

注意到$c_1$的连续性以及条件(4), 可以任意取一个正常数$\lambda_0$使得

$$\lambda_0>\sup_{(x,t)\in\bar{Q}_\infty} c(x,t), \tag{5}$$

定义$D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$和

$$\mu(x,y):=\lambda_0-c_1(x)+c_1(y),\ \forall(x,y)\in D. \tag{6}$$

令$k$是如下定义在区域$D$上的核函数方程的解:

$$\begin{cases} k_{xx}(x,y)-k_{yy}(x,y)=\mu(x,y)k(x,y)), \\ 2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(k(x,x))=\lambda_0, \\ k(x,0)=0, \end{cases} \tag{7}$$

这里$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(k(x,x)):=k_x(x,y)|_{y=x}+k_y(x,y)|_{y=x}$. 通过该核函数$k$, 本文定义系统(1)的边界反馈控制律为

$$U(t):=-\frac{\lambda_0}{2}w(1,t)-\int_0^1 k_x(1,y)w(y,t)\mathrm{d}y. \tag{8}$$

下列命题给出了核函数方程(7)解的适定性, 其证明过程是标准的, 可以参考文献[1,3].

**命题 1** 核函数方程(7)存在唯一一个解$k\in C^{2(D)}$, 并且满足

$$|k(x,y)|\leqslant\varLambda\mathrm{e}^{2\varLambda},\ \forall(x,y)\in D, \tag{9}$$

其中$\varLambda:=\dfrac{1}{2}\max\{\lambda_0,\max\limits_{(x,y)\in D}|\mu(x,y)|\}$. 特别地, 当$c_1(x)\equiv 0$时, 核函数可以表示为

$$k(x,y)=\lambda_0 y\frac{\mathcal{I}_1(\sqrt{\lambda_0(x^2-y^2)})}{\sqrt{\lambda_0(x^2-y^2)}}, \tag{10}$$

其中$\mathcal{I}_1$为修正的一阶贝塞尔函数.

**注 1** 注意$\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\mathcal{I}_1(s)}{s}=\dfrac{1}{2}$和$\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\mathcal{I}_2(s)}{s^2}=\dfrac{1}{8}$, 因此, 式(9)及后文的式(13)均是良定的, 这里$\mathcal{I}_2$为修正的二阶贝塞尔函数. 关于贝塞尔函数及修正的贝塞尔函数的概念和性质, 可以参考文献[2].

### 3.2 主要结论

在本文中, 设初值的容许集为

$$\begin{aligned}W_0:=\{w\in C^2([0,1])|w(0)=0,& \\ w_x(1)=-\frac{\lambda_0}{2}w(1)-& \\ \int_0^1 k_x(1,y)w(y)\mathrm{d}y+d(0)\}.&\end{aligned}$$

令

$$\lambda(x,t):=\lambda_0-c(x,t), \tag{11}$$

定义常数

$$\underline{\lambda}:=\inf_{(x,t)\in\bar{Q}_\infty}\lambda(x,t)>0, \tag{12}$$

和

$$\bar{k}:=\max_{(x,y)\in D}|k(x,y)|,\ M:=\mathrm{e}^{\bar{k}}.$$

以下定理是本文得到的第1个主要结果.

**定理 1** 设$w_0\in W_0$, 并考虑边界反馈控制律(8). 对于任意的$T\in\mathbb{R}_{>0}$, 闭环系统(1)存在唯一经典解$w\in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$. 更进一步, 闭环系统(1)在空间$L^1$范数下是$L^1$-ISS的.

利用定理1及非局部条件下的抛物系统的比较原理(见后文引理3), 可以进一步证明下列定理2, 它表

明, 对于某些抛物型偏微分系统, 若其反应系数仅依赖于时间变量, 或既依赖于空间变量又依赖于时间变量、但初值不改变符号时, 可以通过具有解析形式的核函数(10)来设计边界反馈控制器, 并使闭环系统是$L^1$-ISS的.

**定理 2** 定义控制律

$$U(t) := -\frac{\lambda_0}{2}w(1,t) - \lambda_0\int_0^1 \frac{y}{1-y^2}\mathcal{I}_2(\sqrt{\lambda_0(1-y^2)})w(y,t)\mathrm{d}y, \tag{13}$$

其中$\mathcal{I}_2$是修正的二阶贝塞尔函数.

1) 若$c_1(x)\equiv 0$, 则在控制律(13)下, 闭环系统(1)在空间$L^1$范数下是$L^1$-ISS的.

2) 若$f(x,t), d(t), w_0(x)$同时非负或同时非正, 则在控制律(13)下, 闭环系统(1)在空间$L^1$范数下是$L^1$-ISS的.

**注 2** 定理1与定理2表明, 当扰动$f, d$均为零时, 闭环系统(1)在相应的控制律下均是渐近稳定的. 另外, 需要注意的是, 在定理1中, 核函数的闭式解的具体形式仍然是未知的, 在仿真过程中, 通常根据逐次迭代法而取其近似[1]; 而在定理2中, 由于核函数的闭式解由式(10)给出, 使用控制律(13), 不仅能简化理论分析过程, 还可以直接用于数值实验.

**注 3** 与文献[12]相比, 本文加强了系数$c$的结构性条件(见式(3)), 但降低了全局有界性及Lipschitz连续性(或Hölder连续性)的正则性要求. 另外, 在文献[8–9, 11, 13]等文献中, 作者为了证明时变核函数的存在性与正则性, 对时变系数施加了Gevery条件, 即, 设$c[x]\in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$, 且存在$R,\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$, 使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_{>0}} |\frac{\partial^i}{\partial t^i}c(x,t)| \leqslant R^{i+1}(i!)^\alpha,\ \forall x\in[0,1],\ \forall i\in\mathbb{N}_0,$$

本文在可分离变量的结构性条件下, 减弱了上述非常强的正则性条件, 不仅使得所设计的控制器不依赖于时变核函数, 而且更方便于控制器的执行.

## 4 目标系统的选取与辅助结论

### 4.1 目标系统的选取

对于任意$T\in\mathbb{R}_{>0}$, 将系统(1)限定在区域$Q_T$上. 利用Volterra积分变换

$$u(x,t) := w(x,t) + \int_0^x k(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y, \tag{14}$$

将系统(1)转换到如下形式的目标系统:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - \lambda(x,t)u(x,t) + f(x,t) + \\ \qquad \int_0^x k(x,y)f(y,t)\mathrm{d}y,\ (x,t)\in Q_T, \\ u(0,t) = 0, & t\in(0,T), \\ u_x(1,t) = d(t), & t\in(0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in(0,1), \end{cases} \tag{15}$$

其中$u_0(x) := w_0(x) + \int_0^x k(x,y)w_0(y)\mathrm{d}y$.

值得注意的是, 大多数文献考察的是无扰动的抛物系统的镇定问题, 此时式(14)有如下形式的逆变换[2]:

$$w(x,t) := u(x,t) + \int_0^x l(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y,$$

其中, $l$满足类似于式(7)的双曲方程. 然而, 在本文中, 由于系统(1)具有扰动项, 很难找到一个核函数$l$, 使得式(14)具有上述形式的逆变换. 为了保证系统(1)与式(15)的等价性, 需要如下引理, 其可以通过线性算子理论和级数理论得以证明, 请见文献[31]的引理3的证明过程.

**引理 1** 对于$T\in\mathbb{R}_{>0}$, 令$\mathcal{D} := C^{2,1}(\bar{Q}_T)$. 通过如下方式:

$$u(x,t) := (Kw)(x,t) := w(x,t) + \int_0^x k(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y,$$

定义算子

$$K:\mathcal{D}\to\mathcal{D},$$
$$w\mapsto u,$$

则$K$为有界线性算子, 且存在逆算子$K^{-1}$. 特别地, 对于任意固定的$t\in[0,T]$, 下列估计式成立:

$$\|(K^{-1}u)[t]\|_{L^1(0,1)} \leqslant M\|u[t]\|_{L^1(0,1)},\ \forall u\in\mathcal{D}. \tag{16}$$

注意到系统(1)可以写成定义在区域$Q_T$上的方程, 其中, $T$为任意正常数. 下列命题保证了系统(1)和系统(15)之间的等价性, 其证明过程是标准的, 在此省略.

**命题 2** 对于任意的$T\in\mathbb{R}_{>0}$, 定义在区域$Q_T$上的系统(1)等价于系统(15).

### 4.2 辅助结论

为了证明定理1, 需要如下引理, 其常被称为微分形式的Gronwall不等式. 读者可以参考文献[32]的第708–709页进行证明.

**引理 2** 对于任意$t_1 > t_0 \geqslant 0$, 如果$\eta$是定义在$[t_0,t_1]$上的绝对连续函数, 并且满足微分不等式

$$\eta'(t) \leqslant \phi(t)\eta(t) + \psi(t),\ 对\ \text{a.e.}\ t\in[t_0,t_1],$$

这里的$\phi$和$\psi$是定义在$[t_0,t_1]$上的可积函数, 那么下列不等式成立:

$$\eta(t) \leqslant \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t \phi(s)\mathrm{d}s}\eta(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\int_s^t \phi(r)\mathrm{d}r}\psi(s)\mathrm{d}s,\ \forall t\in[t_0,t_1].$$

为了证明定理2, 需要下列含有非局部边界条件的抛物方程的比较原理.

**引理 3** 如果$v\in C^{2,1}(\bar{Q}_\infty)$满足$v(1,0)\neq 0$以

及如下方程:

$$\begin{cases} v_t(x,t) \geqslant v_{xx}(x,t) + b(x,t)v(x,t), \\ \qquad\qquad (x,t) \in \bar{Q}_\infty, \\ v(0,t) \geqslant 0, \qquad t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \\ v_x(1,t) \geqslant V(t),\ t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \\ v(x,0) \geqslant 0, \qquad x \in (0,1), \end{cases} \tag{17}$$

其中: $b \in C(\bar{Q}_\infty)$,

$$V(t) := -k_1 v(1,t) + \int_0^1 k_2(y)v(y,t)\mathrm{d}y, \tag{18}$$

这里$k_1$为正常数, $k_2 \in C([0,1);\mathbb{R})$且$\lim\limits_{y\to 1^-} k_2(y)$存在, 则在$\bar{Q}_\infty$上必有$v(x,t) \geqslant 0$.

**证**　首先, 对于任意的常数$l \in (0,1)$, 令

$$\beta(x) := \left(\mathrm{e}^{lx} - \mathrm{e}^l x + l\right)^{-1},\ \forall x \in [0,1],$$

直接验证可得

$$\frac{\beta_x(x)}{\beta^2(x)} = \mathrm{e}^l - l\mathrm{e}^{lx} > 0,\ \forall x \in [0,1].$$

因此, 对于固定的$l$, 函数$\beta$关于$x$单调递增, 且满足

$$\beta(x) \geqslant \beta(0) = (1+l)^{-1} > 0,\ \forall x \in [0,1].$$

其次, 对于任意的$T \in \mathbb{R}_{>0}$, 令

$$\mathcal{M} := \max_{(x,t)\in\bar{Q}_T} |v(x,t)|,\ N := \sup_{y\in[0,1)} |k_2(y)|,$$

注意到$\lim\limits_{l\to 0^+} \beta(1) = +\infty$及$\lim\limits_{l\to 0^+} \dfrac{\beta_x(1)}{\beta^2(1)} = 1$. 对于任意$\varepsilon > 0$, 可选取正常数$l \ll 1$, 使得

$$\frac{\mathcal{M}N}{\beta(1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ \frac{\beta_x(1)}{\beta^2(1)} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{19}$$

对于上述固定的$T, \beta$, 现在取正常数

$$\sigma > \max_{(x,t)\in\bar{Q}_T} \Big(b(x,t) + \frac{\beta_{xx}(x)}{\beta(x)}\Big),$$

并令$v(x,t) := \beta(x)\mathrm{e}^{\sigma t}\tilde{v}(x,t)$. 由式(17)不难验证$\tilde{v}$在$\bar{Q}_T$上满足

$$\begin{cases} \tilde{v}_t \geqslant \tilde{v}_{xx} + \dfrac{2\beta_x}{\beta}\tilde{v}_x + \Big(b + \dfrac{\beta_{xx}}{\beta} - \sigma\Big)\tilde{v}, \\ \tilde{v}(0,t) \geqslant 0, \\ \tilde{v}_x(1,t) \geqslant -\tilde{k}_1\tilde{v}(1,t) + \displaystyle\int_0^1 \tilde{k}_2(y)\tilde{v}(y,t)\mathrm{d}y, \\ \tilde{v}(x,0) \geqslant 0, \end{cases} \tag{20}$$

其中: $\tilde{k}_1 := k_1 + \dfrac{\beta_x(1)}{\beta(1)}$, $\tilde{k}_2(y) := \dfrac{1}{\beta(1)}\beta(y)k_2(y)$.

由于$\beta(x) \geqslant (1+l)^{-1}$, 为了证明$v$的非负性, 只需证明$\tilde{v}$的非负性. 利用反证法进行证明. 假设$\tilde{v}$在$(x_0,t_0) \in \bar{Q}_T$处取负的最小值, 即,

$$\tilde{v}(x_0,t_0) = \min_{(x,t)\in\bar{Q}_T} \tilde{v}(x,t) < 0,$$

注意到在式(20)的第1式中, $b + \dfrac{\beta_{xx}}{\beta} - \sigma < 0$, 则由抛物方程的极值原理知, $\tilde{v}$在$Q_T$内部不取负的极小值. 注意到初值条件, 可知$t_0 > 0$. 而由式(20)的第2式知$x_0 \neq 0$. 因此, $x_0 = 1$.

对于$x_0 = 1, t_0 > 0$, 由$\tilde{v}(1,t_0)$的极小性知

$$\tilde{v}_x(1,t_0) \leqslant 0, \tag{21}$$

利用$k_1 > 0$, $\tilde{v}(1,t_0) < 0$、$\tilde{v}$的定义, 以及式(19), 由式(20)的第3式可得

$$\begin{aligned} &\tilde{v}_x(1,t_0) > \\ &-\frac{\beta_x(1)}{\beta(1)}\tilde{v}(1,t_0) + \int_0^1 \frac{\beta(y)}{\beta(1)}k_2(y)\tilde{v}(y,t_0)\mathrm{d}y \geqslant \\ &-\frac{\beta_x(1)}{\beta^2(1)}\mathrm{e}^{-\sigma t_0}v(1,t_0) - \frac{\mathcal{M}N}{\beta(1)}\mathrm{e}^{-\sigma t_0} \geqslant \\ &-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\sigma t_0}v(1,t_0) - \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{-\sigma t_0}. \end{aligned} \tag{22}$$

由式(21)–(22)可知, 对于任意的$T > 0$以及任意的$\varepsilon > 0$, 都存在$t_0 \in (0,T]$使得$-\varepsilon < v(1,t_0) < 0$. 注意$t_0$依赖于$\varepsilon$, 而$T$不依赖于$\varepsilon$. 令$\varepsilon \to 0^+$, 可推得: 对于任意的$T > 0$, 都存在$t_1 \in [0,T]$使得$v(1,t_1) = 0$. 由$T$的任意性, 必有$t_1 = 0$, 这与$v(1,0) \neq 0$的假设矛盾.

综上, 得到$\tilde{v} \geqslant 0$于$\bar{Q}_T$, 从而$v \geqslant 0$于$\bar{Q}_T$. 由$T$的任意性可得: $v \geqslant 0$于$\bar{Q}_\infty$.　　证毕.

## 5　主要结论的证明

### 5.1　目标系统(15)的解的适定性与稳定性

在证明定理1之前, 先给出关于目标系统(15)的解的适定性、正则性和$L^1$-ISS结果. **命题 3**　对于任意的$T \in \mathbb{R}_{>0}$, 系统(15)存在唯一经典解$u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, 并有如下估计式:

$$\begin{aligned} \|u[t]\|_{L^1(0,1)} \leqslant{}& \mathrm{e}^{-\underline{\lambda}t}\|u_0\|_{L^1(0,1)} + \|d\|_{L^1(0,t)} + \\ & (1+\bar{k})\|f\|_{L^1((0,t);L^1(0,1))},\ \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{23}$$

**证**　系统(15)的解的存在性、唯一性、正则性由文献[33]的定理7.4和引理7.2的证明过程保证.

下面利用文献[26–27]提出的Lyapunov逼近方法证明估计式(23).

首先, 对于任意固定的$\tau \in \mathbb{R}_{>0}$, 令

$$\rho_\tau(s) := \begin{cases} |s|, & |s| \geqslant \tau, \\ -\dfrac{s^4}{8\tau^3} + \dfrac{3s^2}{4\tau} + \dfrac{3\tau}{8}, & |s| < \tau, \end{cases} \tag{24}$$

则$\rho_\tau(s)$关于$s$是$C^2$连续的函数, 并且以下不等式对于任意的$s \in \mathbb{R}$均成立:

$$\rho_\tau'(0) = 0,\ 0 \leqslant |s| \leqslant \rho_\tau(s),\ |\rho_\tau'(s)| \leqslant 1, \tag{25}$$

$$0\leqslant \rho_\tau''(s)=\begin{cases}0, & |s|\geqslant \tau,\\ \dfrac{3}{2\tau}(1-\dfrac{s^2}{\tau^2}), & |s|<\tau,\end{cases} \tag{26}$$

$$0\leqslant \rho_\tau(s)-\frac{3\tau}{8}\leqslant \rho_\tau'(s)s\leqslant \rho_\tau(s)\leqslant |s|+\frac{3\tau}{8}. \tag{27}$$

令$\tilde f(x,t):=f(x,t)+\int_0^x k(x,y)f(y,t)\mathrm{d}y.$

由式(15)及分部积分可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\rho_\tau(u)\mathrm{d}x=\\&\int_0^1\rho_\tau'(u)u_t\mathrm{d}x=\\&\int_0^1\rho_\tau'(u)(u_{xx}-\lambda u+\tilde f)\mathrm{d}x=\\&(\rho_\tau'(u)u_x)|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\rho_\tau''(u)u_x^2\mathrm{d}x-\\&\int_0^1\rho_\tau'(u)\lambda u\mathrm{d}x+\int_0^1\rho_\tau'(u)\tilde f\mathrm{d}x,\ \forall t\in[0,T].\end{aligned} \tag{28}$$

现在估计等式(28)右端中的每一项. 事实上, 由式(25)可得

$$(\rho_\tau'(u)u_x)|_{x=0}^{x=1}=\rho_\tau'(u(1,t))d(t)\leqslant |d(t)|. \tag{29}$$

由式(26)可得

$$-\int_0^1\rho_\tau''(u)u_x^2\mathrm{d}x\leqslant 0. \tag{30}$$

由式(5)(12)(27)可以推出

$$\begin{aligned}-\int_0^1\rho_\tau'(u)\lambda u\mathrm{d}x\leqslant -\int_0^1\lambda(\rho_\tau(u)-\frac{3\tau}{8})\mathrm{d}x\leqslant\\ -\underline{\lambda}\int_0^1\rho_\tau(u)\mathrm{d}x+\frac{3\underline{\lambda}}{8}\tau.\end{aligned} \tag{31}$$

由式(25)可得

$$\int_0^1\rho_\tau'(u)\tilde f\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1|\tilde f|\mathrm{d}x. \tag{32}$$

结合式(28)–(32), 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\rho_\tau(u)\mathrm{d}x\leqslant\\&-\underline{\lambda}\int_0^1\rho_\tau(u)\mathrm{d}x+\int_0^1|\tilde f|\mathrm{d}x+|d(t)|+\frac{3\underline{\lambda}}{8}\tau.\end{aligned}$$

将引理2应用到上式, 得

$$\begin{aligned}&\int_0^1\rho_\tau(u(x,t))\mathrm{d}x\leqslant\\&\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}t}\int_0^1\rho_\tau(u_0(x))\mathrm{d}x+\\&\int_0^t\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}(t-s)}(\int_0^1|\tilde f(x,s)|\mathrm{d}x+|d(s)|)\mathrm{d}s+\\&\frac{3\underline{\lambda}}{8}\tau\int_0^t\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}(t-s)}\mathrm{d}s\leqslant\\&\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}t}\int_0^1\rho_\tau(u_0(x))\mathrm{d}x+\\&\int_0^t\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}(t-s)}(\int_0^1|\tilde f(x,s)|\mathrm{d}x+|d(s)|)\mathrm{d}s+\\&\frac{3\underline{\lambda}T}{8}\tau,\ \forall t\in[0,T].\end{aligned} \tag{33}$$

在式(33)中, 令$\tau\to 0^+$, 得到

$$\begin{aligned}\|u[t]\|_{L^1(0,1)}\leqslant\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}t}\|u_0\|_{L^1(0,1)}+\\ \|\tilde f\|_{L^1((0,t);L^1(0,1))}+\\ \|d\|_{L^1(0,t)},\ \forall t\in[0,T].\end{aligned} \tag{34}$$

另外, 注意到

$$\|\tilde f\|_{L^1((0,t);L^1(0,1))}\leqslant(1+\bar k)\|f\|_{L^1((0,t);L^1(0,1))}. \tag{35}$$

由式(34)–(35), 可知式(23)成立. 证毕.

### 5.2 定理1与定理2的证明

定理1的证明.

**证** 闭环系统(1)解的存在唯一性由引理1、命题1、命题2及$T$的任意性保证.

往证闭环系统(1)在空间$L^1$范数下是$L^1$-ISS的. 由式(16)和式(23)可得

$$\begin{aligned}&\|w[t]\|_{L^1(0,1)}=\\&\|(K^{-1}u)[t]\|_{L^1(0,1)}\leqslant\\&M\|u[t]\|_{L^1(0,1)}\leqslant\\&M\left(\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}t}\|u_0\|_{L^1(0,1)}+\|d\|_{L^1(0,t)}+\right.\\&\left.(1+\bar k)\|f\|_{L^1((0,t);L^1(0,1))}\right),\ \forall t\in[0,T],\end{aligned}$$

进一步, 由$T$的任意性得

$$\begin{aligned}&\|w[t]\|_{L^1(0,1)}\leqslant\\&M\left(\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}t}\|u_0\|_{L^1(0,1)}+\|d\|_{L^1(0,t)}+\right.\\&\left.(1+\bar k)\|f\|_{L^1((0,t);L^1(0,1))}\right),\ \forall t\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}.\end{aligned}$$

注意到由$u_0$的定义可得

$$\|u_0\|_{L^1(0,1)}\leqslant(1+\bar k)\|w_0\|_{L^1(0,1)},$$

从而闭环系统(1)在空间$L^1$范数下是$L^1$-ISS的.

证毕.

定理2的证明.

**证** 对于结论1), 若$c_1(x)\equiv 0$, 则由命题1知, 核函数$k$由式(10)给出. 利用修正的贝塞尔函数的性质(见文献[2]的式(A.14)或式(A.15)), 可得

$$k_x(1,y)=\frac{\lambda_0 y}{1-y^2}\mathcal{I}_2(\sqrt{\lambda_0(1-y^2)}),$$

从而, 由定理1知, 在边界控制律(13)下, 系统(1)在空间$L^1$范数下是$L^1$-ISS的.

下面证明结论2), 即, 当$c_1(x)\not\equiv 0$, 但$f,d,w_0$同时非负或非正时, 系统(1)在边界控制律(13)下仍是$L^1$-ISS的.

先考虑$w_0(x)\geqslant 0$, $f(x,t)\geqslant 0$及$d(t)\geqslant 0$时的情形. 事实上, 由式(5)可以选择一个正常数$c_0>$

$\max\limits_{x\in[0,1]} c_1(x)$使得

$$\lambda_0 > \sup_{(x,t)\in\bar{Q}_\infty} \tilde{c}(x,t) \geqslant \sup_{(x,t)\in\bar{Q}_\infty} c(x,t), \tag{36}$$

这里定义$\tilde{c}(x,t) := c_0 + c_2(t)$.

对于任意$\delta \in (0,1)$, 令$v_0(x) := w_0(x) + \delta$, 则$v_0(x) \geqslant 0$且$v_0(1) > 0$. 现在考察如下系统:

$$\begin{cases} v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) + \tilde{c}(x,t)v(x,t)+ \\ \qquad f(x,t), \qquad (x,t)\in Q_T, \\ v(0,t) = 0, \qquad t\in[0,T], \\ v_x(1,t) = V(t) + d(t), \ t\in[0,T], \\ v(x,0) = v_0(x), \qquad x\in(0,1), \end{cases} \tag{37}$$

其中边界控制律$V(t)$定义如下:

$$V(t) := -\frac{\lambda_0}{2}v(1,t) - \lambda_0\int_0^1 \frac{y}{1-y^2}\mathcal{I}_2(\sqrt{\lambda_0(1-y^2)})v(y,t)\mathrm{d}y. \tag{38}$$

一方面, 由引理3知在$\bar{Q}_T$上$v \geqslant 0$. 另外, 将结论1)应用于系统(37), 可知系统(37)是$L^1$-ISS的, 并且具有如下形式的估计式:

$$\|v[t]\|_{L^1(0,1)} \leqslant \mathrm{e}^{-C_1t}\|w_0+\delta\|_{L^1(0,1)} + \|d\|_{L^1(0,t)} + C_2\|f\|_{L^1((0,t);L^1(0,1))}, \ \forall t\in[0,T], \tag{39}$$

其中$C_1, C_2$为不依赖于$\delta$的正常数.

另一方面, 令$\tilde{v} = v - w$, 则由$v$的非负性及方程式(1)与式(37)知, 在$\bar{Q}_T$上成立

$$\begin{cases} \tilde{v}_t = \tilde{v}_{xx} + (\tilde{c}-c)v + c\tilde{v} \geqslant \\ \qquad \tilde{v}_{xx} + c\tilde{v}, \quad (x,t)\in Q_T, \\ \tilde{v}(0,t) = 0, \qquad t\in[0,T], \\ \tilde{v}_x(1,t) = \tilde{V}(t), \ t\in[0,T], \\ \tilde{v}(x,0) = \delta, \qquad x\in(0,1), \end{cases} \tag{40}$$

其中

$$\tilde{V}(t) := -\frac{\lambda_0}{2}\tilde{v}(1,t) - \lambda_0\int_0^1 \frac{y}{1-y^2}\mathcal{I}_2(\sqrt{\lambda_0(1-y^2)})\tilde{v}(y,t)\mathrm{d}y.$$

将引理3分别应用于系统(40)及式(1)得: $\tilde{v} \geqslant 0$及$w \geqslant 0$, 从而总有$0 \leqslant w \leqslant v$. 进一步, 由式(39)可得

$$\|w[t]\|_{L^1(0,1)} \leqslant \mathrm{e}^{-C_1t}\|w_0+\delta\|_{L^1(0,1)} + \|d\|_{L^1(0,t)} + C_2\|f\|_{L^1((0,t);L^1(0,1))}, \ \forall t\in[0,T].$$

令$\delta \to 0^+$, 可得

$$\|w[t]\|_{L^1(0,1)} \leqslant \mathrm{e}^{-C_1t}\|w_0\|_{L^1(0,1)} + \|d\|_{L^1(0,t)} + C_2\|f\|_{L^1((0,t);L^1(0,1))}, \ \forall t\in[0,T].$$

因此, $w$-系统是$L^1$-ISS的.

对于$w_0(x) \leqslant 0$, $f(x,t) \leqslant 0$及$d(t) \leqslant 0$时的情形, 可以考虑$-v$和$-w$, 并做类似推导, 可得结论.

证毕.

## 6 数值结果

在本节的数值实验中, 总取

$$c_2(t) = \begin{cases} 0.8\pi^2\left(\sin^2 t + \mathrm{e}^{t-1} - \mathrm{e}^{-1} + 2\right), \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0.8\pi^2\left(\sin^2 t - \mathrm{e}^{1-t} - \mathrm{e}^{-1} + 4\right), \ t > 1, \end{cases}$$

函数$c_1, f, d, w_0$的表达式将在每一小节中具体给出. 注意$c_2 \in C^1(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$, 且

$$0 < c_2(t) \leqslant 0.8\pi^2(5-\mathrm{e}^{-1}), \ \forall t\in\mathbb{R}_{\geqslant 0},$$

因此, $c_2$满足本文提出的条件. 但是, $c_2 \notin C^2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$, 故$c_2$不满足Gevrey条件. 利用MATLAB提供的pdepe函数进行抛物方程的求解, 并进行数值实验. 本实验表明, 对于一些时变系统, 仍可以通过不依赖于时间变量的核函数进行控制器设计, 以保证系统的积分输入状态稳定性或渐近稳定性. 特别地, 核函数的闭式解可以由修正的贝塞尔函数给出, 极大地降低了执行复杂度.

### 6.1 系统的指数镇定数值实验

在本小节中, 取

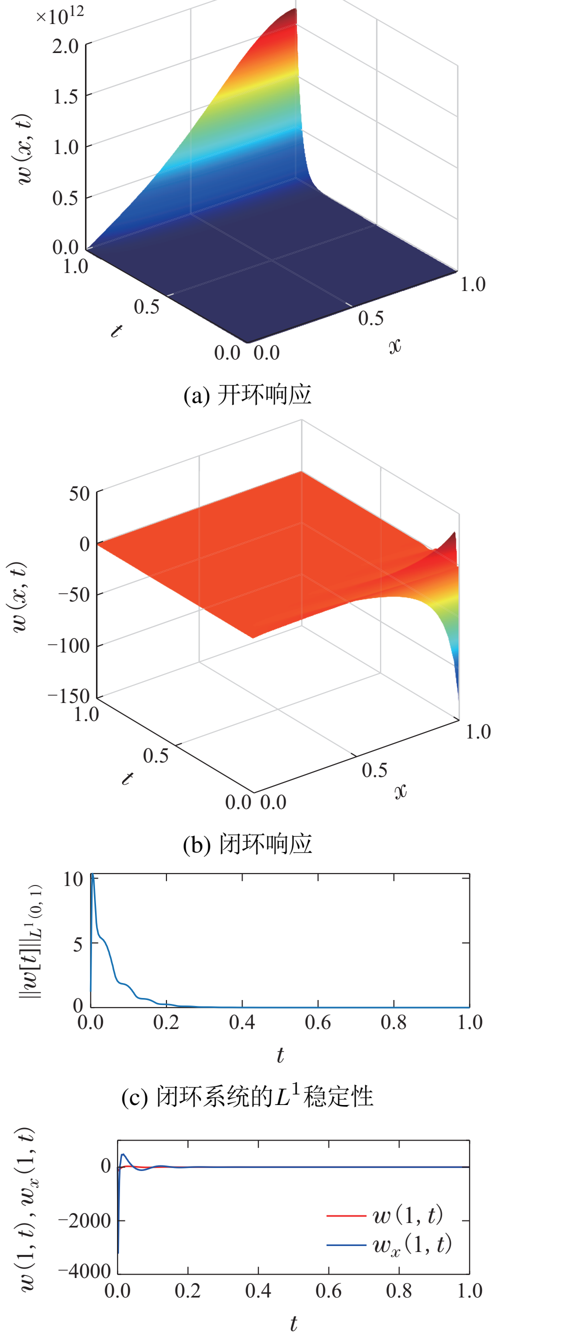
$$\begin{cases} c_1(x) = 0.8\pi^2(x+x^2), \\ f(x,t) = d(t) = 0, \\ w_0(x) = 1 + \sin(\frac{3}{2}\pi x). \end{cases} \tag{41}$$

开环系统稳定性. 图1(a)表明, 开环系统在没有扰动的情况下是不稳定的.

闭环系统稳定性. 由于初值$w_0(x) \geqslant 0$, 由定理1及定理2中结论2)可知, 只需选取合适的$\lambda_0$以满足式(36), 则可以通过式(13)来定义控制律, 并使未受干扰的闭环系统(1)在空间$L^1$范数下是指数稳定的. 事实上, 注意到

$$c(x,t) = c_1(x) + c_2(t) < 5.5\pi^2, \ \forall (x,t)\in\bar{Q}_\infty,$$

在仿真实验中, 取$\lambda_0 := 5.5\pi^2$. 图1(b)–(d)显示, 在控制律(13)下, 闭环系统在$t = 0.5$时刻达到稳定状态, 其中, 图1(b)展示的是闭环系统的解$w$的三维图像, 图1(c)和图1(d)分别展示的是$\|w[t]\|_{L^1(0,1)}$, 以及$w(1,t)$和$w_x(1,t)$的演化趋势. 数值结果与理论分析结果保持一致.




(a) 开环响应

(b) 闭环响应

(c) 闭环系统的$L^1$稳定性

(d) $w(1,t)$和$w_x(1,t)$的轨迹

图 1 系统在条件(41)下的稳定性

Fig. 1 Stability of the system under the condition (41)

## 6.2 系统的$L^1$-ISS数值实验

在本小节中, 取

$$\begin{cases} c_1(x)=0, \\ f(x,t)=m\sqrt{\dfrac{20+x+t}{23+t}}, \\ d(t)=j(20\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}+23\sin(100t)), \\ w_0(x)=3x(2x-1)(-3x^2+5), \end{cases} \tag{42}$$

其中: $m\in\{0,3,10\}$, $j\in\{0,1\}$, 在仿真实验中用于刻画扰动的"大小". 由于$c$仅依赖于时间变量, 根据定理2中结论1)和注2可知, 本文可以利用控制律(13)以使闭环系统是积分输入状态稳定的. 特别地, 针对不同的$m,j$, 本文展示相应的数值结果, 以更好地体现系统的iISS性质, 刻画外加扰动对闭环系统稳定性产生的影响.

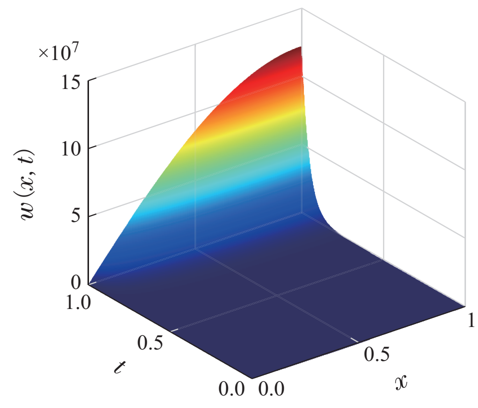
无扰动时的开环、闭环系统的稳定性. 对于$m=j=0$时的情形, 图2(a)表明, 开环系统是不稳定的. 图2(b)–(d)显示, 在控制律(13)下, 闭环系统在$t=0.5$时刻达到稳定状态, 其中, 图2(b)展示的是闭环系统的解$w$的三维图像, 图2(c)和图2(d)分别展示的是$\|w[t]\|_{L^1(0,1)}$, 以及$w(1,t)$和$w_x(1,t)$的演化趋势. 数值结果与理论分析结果保持一致.

有扰动时的闭环系统的积分输入状态稳定性. 对于$m+j>0$时的情形, 注意到

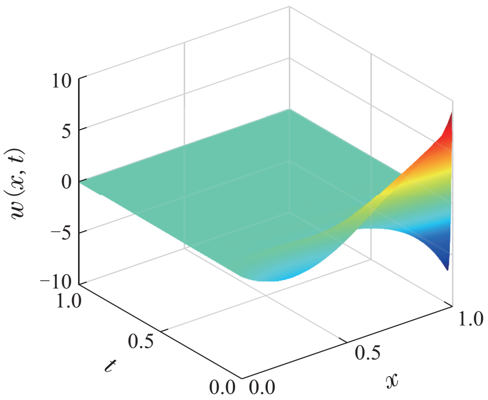
$$c(x,t)=c_2(t)\leqslant 0.8\pi^2(5-\mathrm{e}^{-1})<4\pi^2,\ \forall(x,t)\in\bar{Q}_\infty,$$

则由定理1及定理2中结论1)可知, 只需选取$\lambda_0=4\pi^2$, 便可以通过边界控制律(13)使得闭环系统(1)在空间$L^1$范数下是$L^1$-ISS的. 图3(a)展示的是$m=10$, $j=0$时闭环系统关于区域内部扰动$f$的$L^1$-ISS结果; 图3(b)和图3(c)分别展示的是$m=10,j=1$和$m=3,j=1$时闭环系统在空间$L^1$范数下同时关于区域内部扰动$f$和边界扰动$d$的$L^1$-ISS结果; 图3(d)展示的是$m=0,j=1$时闭环系统在空间$L^1$范数下关于区域边界扰动$d$的$L^1$-ISS结果. 从图3不难发现, 尽管系统出现扰动, 但解仍保持在平衡点附近. 特别地, 图3(a)–3(b)显示, 对于同一内部扰动, 随着边界扰动的输入, 闭环系统的解的$L^1$范数发生相应的变化, 但仍保持在有界范围内. 图3(b)–3(d)显示, 对于同一边界扰动, 较小的内部扰动对系统稳定性产生的影响较小. 数值结果与理论分析结果保持一致.

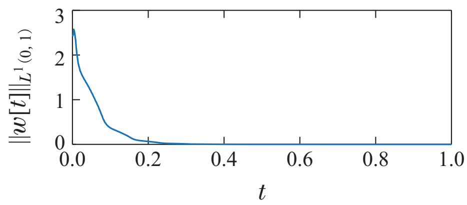
**注 4** 在MATLAB实验中, 直接调用了修正的贝塞尔函数来实现边界控制律的计算. 与文献[1]提出的通过逐次迭代法进行数值计算, 以及文献[12]通过多次采样、多次调用修正的贝塞尔函数进行数值计算相比较, 本文所使用的策略不仅保证了计算精度, 在很大程度上也简化了数值计算过程.



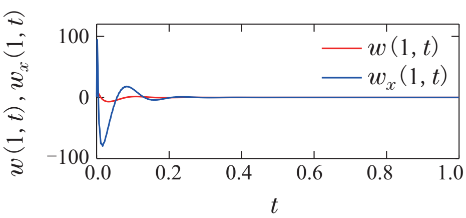

(a) 开环响应




(b) 闭环响应



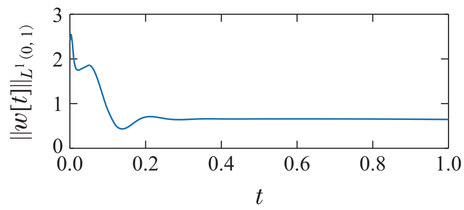

(c) 闭环系统的$L^1$稳定性



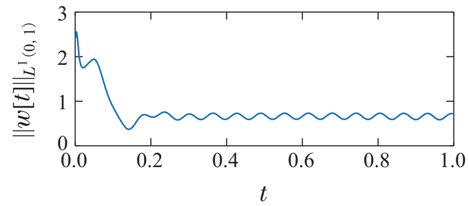

(d) 闭环系统的$w(1,t)$和$w_x(1,t)$的轨迹

图 2　无扰动时系统在条件(42)下的稳定性

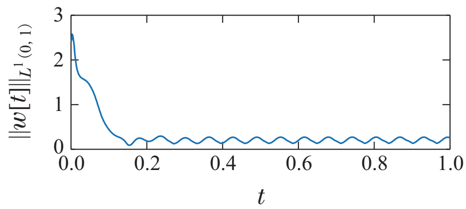
Fig. 2　Stability of the system without disturbances under the condition (42)



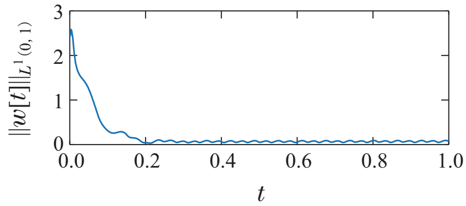

(a) $m=10, j=0$时闭环系统的$L^1$-ISS




(b) $m=10, j=1$时闭环系统的$L^1$-ISS




(c) $m=3, j=1$时闭环系统的$L^1$-ISS




(d) $m=0, j=1$时闭环系统的$L^1$-ISS

图 3　闭环系统在条件(42)下关于不同扰动的$L^1$-ISS

Fig. 3　The $L^1$-ISS of the closed-loop system w.r.t. different disturbances under the condition (42)

## 7　结束语

本文考察了一类具有时变系数的抛物系统的积分输入状态镇定问题. 有别于既有文献关于控制器的动态反演设计方法, 本文通过不依赖于时间变量的核函数来设计边界反馈控制器, 属于一种静态设计, 极大地降低了计算量和控制器的执行复杂度. 本文不仅在理论上证明了闭环系统在空间$L^1$范数下关于外加扰动是$L^1$-ISS, 对扰动对系统稳定性产生的影响提供了一种定性刻画, 也在数值实验方面做了验证. 数值结果与理论分析的结果保持一致, 说明本文提出的方法是行之有效的. 值得一提的是, 本文考察的仅是线性系统, 同时, 时变系数$c$是一类可分离变量的特殊情形. 对于一般的$c$或非线性系统, 如何通过不依赖于时间变量的核函数设计控制器, 需要更多的技巧和理论分析工具, 这将在后续工作中给予考虑.

## 参考文献:


[1] LIU W J. Boundary feedback stabilization of an unstable heat equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2003, 42(3): 1033 – 1043.

[2] KRSTIC M, SMYSHLYAEV A. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[3] SMYSHLYAEV A, KRSTIC M. Closed-form boundary state feedbacks for a class of 1-D partial integro-differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(12): 2185 – 2202.

[4] ESPITIA N, KARAFYLLIS I, KRSTIC M. Event-triggered boundary control of constant-parameter reaction-diffusion PDEs: A small-gain approach. *Automatica*, 2021, 128: 109562.

[5] DEUTSCHER J, KERSCHBAUM S. Backstepping control of coupled linear parabolic PIDEs with spatially varying coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(12): 4218 – 4233.

[6] ELHARFI A. Explicit construction of a boundary feedback law to stabilize a class of parabolic equations. *Differential and Integral Equations*, 2008, 21(3/4): 351 – 362.

[7] FENG Y, WANG Y, WANG J W, et al. Backstepping-based distributed abnormality localization for linear parabolic distributed parameter systems. *Automatica*, 2022, 135: 109930.

[8] IZADI M, ABDOLLAHI J, DUBLJEVIC S S. PDE backstepping control of one-dimensional heat equation with time-varying domain. *Automatica*, 2015, 54: 41 – 48.

[9] LI L, GAO H. The stabilizability of heat equations with time-dependent coefficients. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, 43(6): 2836 – 2844.

[10] SMYSHLYAEV A, KRSTIC M. On control design for PDEs with space-dependent diffusivity or time-dependent reactivity. *Automatica*, 2005, 41(9): 1601 – 1608.

[11] JADACHOWSKI L, MEURER T, KUGI A. An efficient implementation of backstepping observers for time-varying parabolic PDEs. *IFAC Proceedings Volumes*, 2012, 45(2): 798 – 803.

[12] KARAFYLLIS I, ESPITIA N, KRSTIC M. Event-triggered gain scheduling of reaction-diffusion PDEs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2021, 59(3): 2047 – 2067.

[13] MEURER T, KUGI A. Tracking control for boundary controlled parabolic PDEs with varying parameters: Combining backstepping and differential flatness. *Automatica*, 2009, 45(5): 1182 – 1194.

[14] LI Xiaoguang, LIU Jinkun. Continuum backstepping control algorithms in partial differential equation orientation: a review. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(7): 825 – 832.
(李晓光, 刘金琨. 面向偏微分方程的连续反演控制算法综述. 控制理论与应用, 2012, 29(7): 825 – 832.)

[15] GUO Chunli, ZHOU Zhongcheng. Boundary control for a partial differential equation-ordinary differential equation system cascaded at internal point. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(6): 779 – 785.
(郭春丽, 周中成. 一类内部点级联的PDE-ODE系统的边界控制. 控制理论与应用, 2014, 31(6): 779 – 785.)

[16] ZHANG H W, WANG J M, GU J J. Exponential input-to-state stabilization of an ODE cascaded with a reaction-diffusion equation subject to disturbances. *Automatica*, 2021, 133: 109885.

[17] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(4): 435 – 443.

[18] SONTAG E D. Input to state stability: Basic concepts and results. *CIME Summer School on Nonlinear and Optimal Control Theory*. Cetraro, Italy: CIME, 2008, 1932: 163 – 220.

[19] ANGELI D, SONTAG E D, WANG Y. A characterization of integral input-to-state stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(6): 1082 – 1097.

[20] KARAFYLLIS I, KRSTIC M. *Input-to-state Stability for PDEs*. London: Springer-Verlag, 2019.

[21] MIRONCHENKO A, PRIEUR C. Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: Recent results and open questions. *SIAM Review*, 2020, 62(3): 529 – 614.

[22] ZHENG J, ZHU G C. Input-to-state stability with respect to boundary disturbances for a class of semi-linear parabolic equations. *Automatica*, 2018, 97: 271 – 277.

[23] ZHENG J, ZHU G C. A De Giorgi iteration-based approach for the establishment of ISS properties for Burgers' equation with boundary and in-domain disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(8): 3476 – 3483.

[24] ZHENG J, ZHU G C. Input-to-state stability for a class of one-dimensional nonlinear parabolic PDEs with nonlinear boundary conditions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2020, 58(4): 2567 – 2587.

[25] KARAFYLLIS I, KRSTIC M. ISS in different norms for 1-D parabolic PDEs with boundary disturbances. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2017, 55(3): 1716 – 1751.

[26] ZHENG J, ZHU G C. Approximations of Lyapunov functionals for ISS analysis of a class of higher dimensional nonlinear parabolic PDEs. *Automatica*, 2021, 125: 109414.

[27] ZHENG J, ZHU G C. Input-to-state stability in different norms for 1-D parabolic PDEs. *Proceedings of the 60th IEEE Conference on Decision and Control*. Austin, Texas: IEEE, 2021: 4026 – 4031.

[28] GOUDON T, SAAD M. On a Fokker-Planck equation arising in population dynamics. *Revista Matematica Complutense*, 1998, 11(2): 353 – 372.

[29] LEWANDOWSKI R. The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier-Stokes equation with an eddy viscosity. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1997, 28(2): 393 – 417.

[30] LI T. $L^1$ stability of conservation laws for a traffic flow model. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2001, DOI: 10.1111/1468-0262.00185.

[31] CHEN Q L, ZHENG J, ZHU G C. Integral input-to-state stabilization in different norms for a class of linear parabolic PDEs. *Proceedings of the 35th IEEE Chinese Control and Decision Conference*. Yichang, China: IEEE, 2023: 3948 – 3955.

[32] EVANS L C. *Partial Differential Equations*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010.

[33] LADYZENSKAJA O A, SOLONNIKOV V A, URAL'CEVA N N. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1988.


## 作者简介:


**陈巧玲** 研究助理, 目前研究方向为动力系统以及控制理论与应用, E-mail: qiaoling.chen@uni-passau.de;

**郑 军** 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为分布参数系统控制理论与应用, 以及偏微分方程正则性理论与应用, E-mail: zhengjun@swjtu.edu.cn; zhengjun2014@aliyun.com;

**朱谷川** 教授, 博士生导师, IEEE高级会员, 目前研究方向为分布参数系统控制理论、非线性和鲁棒控制, 及其在微系统、航空航天系统、通信网络和智能电网的优化等领域的应用, E-mail: guchuan.zhu@polymtl.ca.