

基于自适应事件触发的半马尔科夫跳变系统的 有限时间 L_2-L_∞ 控制

徐文灏, 石厅[†]

(杭州电子科技大学 自动化学院, 浙江 杭州 310061)

摘要: 本文使用马尔科夫过程的变体半马尔科夫过程建立了连续时间半马尔科夫跳变系统, 并针对该系统研究了有限时间 L_2-L_∞ 控制问题. 首先, 为了处理网络带宽有限的问题, 在传感器通道中引入一种自适应事件触发机制, 用以降低系统中的数据传输频率, 从而降低通信负担. 其次, 考虑系统模态不可测的情况, 以一定概率对其进行估计, 进而研究了异步控制问题. 然后, 考虑了外部干扰, 并引入了 L_2-L_∞ 性能指标, 研究了有限时间控制问题. 本文的设计目标是在确保闭环系统有限时间稳定和满足一定性能指标的同时, 降低系统中的通信负担. 基于Lyapunov理论, 得到状态反馈控制的设计算法. 最后, 用RLC电路作为实例来验证算法的有效性和可用性.

关键词: 马尔科夫过程; 半马尔科夫跳变系统; 有限时间控制; 自适应事件触发; 异步控制; 闭环系统; 状态反馈

引用格式: 徐文灏, 石厅. 基于自适应事件触发的半马尔科夫跳变系统的有限时间 L_2-L_∞ 控制. 控制理论与应用, 2025, 42(4): 722 – 730

DOI: 10.7641/CTA.2023.30059

Finite-time L_2-L_∞ control of semi-Markov jump system under adaptive event-triggered scheme

XU Wen-hao, SHI Ting[†]

(College of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou Zhejiang 310061, China)

Abstract: This article builds a continuous time semi-Markov jump system using a variant of Markov process called a semi-Markov process and investigates the finite-time L_2-L_∞ control problem for it. Firstly, in order to handle the limited network bandwidth, an adaptive event-triggered scheme is applied in the sensor-to-controller network with the aim of reducing the frequency of data transmission and the communication burden. Next, considering the unavailability of the plant mode, a new mode is used to obtain an estimation, upon which the asynchronous control problem is studied. Moreover, the external disturbance is also taken into consideration. Then the L_2-L_∞ performance index is introduced, based on which the finite-time L_2-L_∞ control problem is investigated. The main objective is to determine a controller that ensures stability of the closed-loop system with a certain level of performance while reducing the communication burden to some extent. By employing Lyapunov theory, the state-feedback control algorithm is obtained. Finally, a RLC circuit is used to verify the effectiveness of the theoretical findings.

Key words: Markov process; semi-Markov jump systems; finite-time control; adaptive event-triggered; asynchronous control; closed loop systems; state feedback

Citation: XU Wenhao, SHI Ting. Finite-time L_2-L_∞ control of semi-Markov jump system under adaptive event-triggered scheme. *Control Theory & Applications*, 2025, 42(4): 722 – 730

1 引言

如今工程系统内不乏存在着随机噪声和不确定参数的干扰, 并一定程度上改变系统的内部工作状态. 一般的线性系统因无法满足当前建模需求而逐渐被马尔科夫跳变系统 (Markov jump system, MJS) 所代替. 作为一类特殊的随机系统, MJS凭借其强大的建

模能力引起了学术界的关注^[1-3]. MJS能够恰当地描述系统不同模态间的随机切换, 这些切换由马尔科夫过程 (Markov process, MP) 控制^[4-5]. 因此MJS被广泛应用于通信^[6]、多智能体^[7]、网络控制^[8]等领域. 目前, 学术界对于MJS产生了许多研究成果. 文献[9]针对一类具有不完全转移率的非线性MJS, 研究了异步

收稿日期: 2023-02-14; 录用日期: 2023-12-25.

[†]通信作者. E-mail: tingshi@hdu.edu.cn; Tel.: +86 17788575292.

本文责任编辑: 施阳.

浙江省自然科学基金项目(LY21F030007)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LY21F030007).

有限时间滤波问题. 文献[10]针对受外部干扰和非线性影响的MJS, 研究了有限时间异步输出反馈控制问题. 文献[11]针对具有时滞的正MJS, 研究了随机有限时间 L_1 增益滤波问题. 文献[12]考虑具有输入延迟的MJS的有限时间稳定性问题.

但是, MP的无记忆特性要求系统转移率为常数, 驻留时间(即连续跳变间隔)始终呈指数分布, 对于许多实际系统来说, 这个先决条件是非常保守的^[13]. 例如, 组件的寿命将受到磨损速率的影响, 组件在不同状态之间的转换速率与使用时间有关^[14-15]. 而半马尔科夫过程(semi-Markov process, SMP)的转移率是时变的, 半马尔科夫跳变系统(semi-MJS, SMJS)中驻留时间从指数分布放宽到更一般的概率分布. 因此, MJS中的恒定跳变速率被放宽到SMJS中的一般跳变速率, 从而SMJS相较于MJS有更广泛的应用^[7]. 目前, 对SMJS的研究取得了不少开拓性的成果. 例如, 文献[16]采用异步滑模控制方法研究了非线性SMJS的输入输出有限时间稳定性, 文献[17]针对受欺骗攻击的SMJS, 基于事件触发研究了有限时间滤波问题. 文献[18]针对存在执行器故障的SMJS研究了有限时间滑模控制问题.

众所周知, Lyapunov稳定性理论描述的是系统在无限时域内的稳定特性^[12]而非有限时域. 为了弥补这一不足, 研究者们对有限时间稳定(finite-time stability, FTS)做出了大量研究^[19]. 文献[20]在设计广义性能指标解决网络传输时延下的模糊滤波问题时, 考虑了FTS; 文献[21]研究了一类具有马尔科夫跳变参数神经网络的随机FTS; 文献[22]研究了一类非线性系统的FTS理论; 文献[23]研究了随机MJS的FTS的判定准则; 文献[24]研究了带有时滞的随机脉冲神经网络的FTS问题. 而且FTS在对SMJS的研究中也有着一定的应用. 如文献[25]研究了一类非线性SMJS的输入输出FTS问题; 文献[26]研究了一类具有SMJS参数神经网络的FTS状态估计问题.

值得注意的是, 为了实现SMJS的FTS控制, 上述成果需对系统状态进行连续采样. 由于通信资源有限, 所以需要设计一个合理的通信策略来减轻网络负担. 传统方法是采用时间触发机制, 但使用这种方法会产生数据重传、通信效率下降和过度耗能等问题^[27]. 在20世纪90年代, 出现了一种事件触发替代方案^[28-29], 它的基本原理是: 只有在满足特定的触发条件时, 采样数据才会进行传输. 因此, 事件触发方案(event trigger scheme, ETS)凭借节约通信资源、降低能耗的优势得到广泛应用^[30-32].

然而, 早期的ETS采用静态的阈值参数, 在系统发生变化时并不一定能有效降低事件触发率. 在此情况下, 研究者们提出了一种新的触发方案—自适应事件

触发方案(adaptive event trigger scheme, AETS). Gu等人^[33-35]曾多次将AETS应用于网络系统、SMJS、模糊控制和滑模控制当中, 结果表明AETS能够将ETS的固定阈值调整为最优阈值, 从而拥有更低的事件触发率. 此外, 文献[36]针对受异步切换和网络攻击影响的MJS, 通过AETS缓解网络通信的压力.

综上所述, 针对SMJS采用AETS研究它的有限时间控制, 具有重要的理论意义和实用价值. 截至目前, 鲜有相关文献出现. 为了填补这一空白, 本文针对该问题进行研究. 本文的主要贡献总结如下:

1) 本文采取了一种新颖的AETS, 能够在系统运行时对既定阈值进行动态调整. 它可以丢弃对控制性能贡献小和变化不大的数据, 增强系统应对模态变化和干扰的稳健性, 与文献[1, 5, 14, 37]中使用固定阈值的ETS相比, AETS具有减少信息传输次数、缓解网络压力的优势.

2) 与现有的文章相比^[8, 38], 本文可以保证FTB条件下的 L_2 - L_∞ 性能, 而不是无限时间条件. 此外, 本文还引入了SMJS描述系统的变化情况, 可以根据不同情况采用不同的分布函数. 与文献[1, 7, 11]中的MJS相比, 这种改进更切合实际.

3) 与文献[11-12, 16]不同, 本文还考虑到了系统模态不可测的情况, 并采用了更具一般性的异步控制算法, 以概率的方式对控制器模态进行估计.

符号: $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 表示非负实数集合 $[0, +\infty)$, \mathbb{R}^n 表示 n 维向量空间, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 表示 $n \times n$ 维向量空间, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 表示非负整数集合. 对于矩阵 Q , $\lambda_{\max}\{Q\}$ 或 $\lambda_{\min}\{Q\}$ 表示矩阵 Q 的最大或最小特征值, $L_2[0, \infty)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的平方积分有界的向量空间. 对于 $\omega(t) \in L_2([0, +\infty), \mathbb{R}^n)$, 定义范数

$$\|\omega(t)\|_{L_2} \triangleq \sqrt{\int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt},$$

$L_\infty([0, +\infty))$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的 L_∞ 范数有界的向量函数的集合. 对于 $z(t) \in L_\infty([0, +\infty), \mathbb{R}^n)$, 定义范数 $\|z(t)\|_{L_\infty} \triangleq \sqrt{\sup\{\|z(t)\|^2\}}$.

2 问题描述

2.1 系统描述

考虑如下的连续时间SMJS:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) + E(\theta(t))\omega(t), \\ z(t) = C(\theta(t))x(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ 表示状态变量, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ 表示控制输入, $\omega(t) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ 表示外加干扰, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ 表示控制输出; $A(\theta(t))$, $B(\theta(t))$, $C(\theta(t))$, $E(\theta(t))$ 分别表示具有合适维数的状态矩阵、输入矩阵、输出矩阵、干扰输入矩阵; 该系统的模态切换由 $SMP\{\theta(t), h\}$ 控制.

为了介绍SMP, 首先, 给出与之相关的3个随机过程 $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 和 $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$.

1) $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 表示第 n 次跳变时系统的模式, 取值于有限状态空间 $\mathcal{I}_N = \{1, 2, \dots, N\}$;

2) $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 表示第 n 次跳变时的时间, 且 $t_0 = 0$, 取值于 $\mathbb{R}_{\geq 0}$;

3) $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 表示模式 θ_{n-1} 在第 $n-1$ 次跳变和第 n 次跳变之间的停留时间, 即 $h_n = t_n - t_{n-1}$, 且 $h_0 = 0$, 取值于 $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

$\{\theta(t), h\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} = \{\theta_n, h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 是一个连续时间下离散状态的SMP, 在 \mathcal{I}_N 中取值. $\{\theta(t), h\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ 的演化受如下定义的转移率控制:

$$\text{Prob}\{\theta(t + \Delta) = j | \theta(t) = i\} \triangleq \begin{cases} \text{Prob}\{h_{n+1} \leq h + \Delta, \theta_{n+1} = j | h_{n+1} \geq h, \theta_n = i\} = \\ \pi_{ij}(h)\Delta + o(\Delta), & i \neq j, \\ \text{Prob}\{h_{n+1} > h + \Delta | h_{n+1} > h, \theta_n = i\} = \\ 1 + \pi_{ii}(h)\Delta + o(\Delta), & i = j, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $h > 0$ 表示驻留时间, $\pi_{ij}(h) \geq 0, i \neq j, \pi_{ii}(h) = -\sum_{j=1, j \neq i}^M \pi_{ij}(h) < 0; \Delta \geq 0$ 用于描述无穷小的时间间隔, 满足 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta(0)}{\Delta} = 0$; 转移率矩阵 $\Pi_1 \triangleq [\pi_{ij}(h)]$.

对于每个系统状态 i , 假设其驻留时间的概率密度函数为 $f_i(s)$, 则其概率分布函数 $F_i(s)$ 为

$$F_i(s) \triangleq \text{Prob}\{h_{n+1} \leq s | \theta(t) = i\} = \int_0^s f_i(l) dl, \quad (3)$$

其中: $\forall i \in \mathcal{I}_N, \forall s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

注1 MP中每种模式的驻留时间都服从指数分布. 而SMP中驻留时间服从更一般的分布, 如高斯分布、威布尔分布. 此外, MP中转移率是恒定的, 而SMP中转移率是时变的. 如果 $\pi_{ij}(h) \equiv \pi_{ij}$ 且 π_{ij} 是一个时不变的常数, 那么SMP将退化为标准的MP.

2.2 自适事件应触发方案

本文的控制系统如图1所示, 由传感器、被控对象(SMJS)、AETS、控制器、执行器等部件组成.

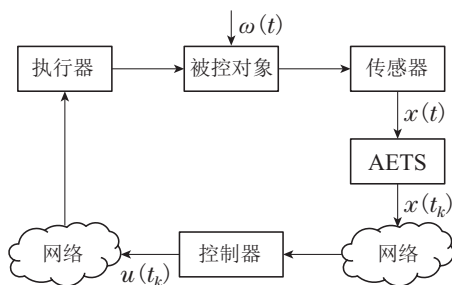


图1 闭环系统

Fig. 1 Closed-loop system

本文中 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 表示触发时刻的集合, 首先, 定义误差信号

$$e(t) \triangleq x(t_k) - x(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (4)$$

表示最近一次触发时刻的状态与当前状态的差值.

式(4)中 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 由如下所示的AETS确定^[27]:

$$\begin{cases} t_{k+1} = \inf_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \{t > t_k : \Omega_1 \geq 0\}, \\ \Omega_1 = e^T(t)\Phi e(t) - \delta(t_k)x^T(t_k)\Phi x(t_k), \end{cases} \quad (5)$$

其中: $t_0 = 0; \Phi > 0$ 为加权参数矩阵; $\delta(t)$ 是触发条件的阈值参数, 可根据系统状态自适应调节, 其动态特性满足以下关系式^[36]:

$$\begin{cases} \dot{\delta}(t) = \frac{1}{\delta(t)} \left(\frac{1}{\delta(t)} - \eta \right) e^T(t)\Phi e(t), \\ \delta(0) \in (0, 1), \quad \eta > 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中 η 是大于零的常值.

注2 由式(6)可知, 阈值参数和误差 $e(t)$ 相关, 当 $e(t)$ 增大时阈值的变化率增大, 当 $e(t)$ 减小时阈值的变化率减小, $e(t) = 0$ 时阈值将不再变化. 另外, 还可以通过选择合适的初值 $\delta(0)$ 和 η 来控制阈值的动态变化. 当给定 $\delta(0)$ 和 $\eta = \frac{1}{\delta(0)}$ 时, 则 $\dot{\delta}(t) = 0, \delta(t) \equiv \delta(0)$, 则本文采用的AETS退化为ETS^[17].

2.3 异步控制

在对SMJS进行控制器设计时, 现有的结果大多假设系统模式完全可用, 由此设计出与系统模式同步变化的控制器^[37-38]. 然而, 这种假设在实际应用中是不现实的, 因为系统模式可能无法随时获取, 例如, 由于系统的故障等原因导致通信中断时, 控制器无法准确获取系统的模式信息. 为了处理这种现象, 文献中常对系统模式进行估计^[9-10, 16, 18, 20].

定义 $\sigma(t) (\sigma(t) \in \mathcal{I}_M = \{1, 2, \dots, M\})$ 为一个新的随机过程, 用以对系统模式进行估计, 它的变化由以下条件概率控制:

$$\text{Prob}\{\sigma(t) = r | \theta(t) = i\} = \tau_{ir}, \quad (7)$$

其中: $i \in \mathcal{I}_N, r \in \mathcal{I}_M, \tau_{ir} \geq 0, \sum_{r=1}^M \tau_{ir} = 1$, 条件概率矩阵定义为 $\Pi_2 \triangleq [\tau_{ir}]$.

本文中采用模式依赖的反馈控制器,

$$u(t) = K(\sigma(t))x(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (8)$$

其中: $K(\sigma(t)) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ 是依赖于 $\sigma(t)$ 的反馈增益矩阵, $x(t_k)$ 是触发时刻的系统状态.

值得一提的是, 系统模式和控制器模式分别为 $\theta(t)$ 和 $\sigma(t)$, 它们的变化不会同步. 这在文献中被称为异步控制^[5].

注3 注意, 当 $M = N, \tau_{ir} = 1$ 时, 控制器模式与系统模式相同, 式(8)退化为同步控制; 特别地, 当 $M = 1$ 时, 控制

器模态不依赖于系统模态, 式(8)退化为模态独立的控制器.

2.4 闭环系统及相关定义

为方便起见, 当 $\theta(t) = i, \delta(t) = r$ 时, 将矩阵函数 $A(\theta(t)), B(\theta(t)), C(\theta(t)), E(\theta(t)), K(\delta(t))$ 分别记作 A_i, B_i, C_i, E_i, K_r . 将控制器(8)代入到式(1)中, 得到系统状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_i + B_i K_r)x(t) + B_i K_r e(t) + E_i \omega(t), \\ z(t) = C_i x(t). \end{cases} \quad (9)$$

假设 1 系统受到的时变干扰信号 $\omega(t)$ 满足以下约束:

$$\int_0^T \|\omega(t)\|^2 dt \leq d^2, \quad (10)$$

其中: $T > 0, d > 0$ 为给定常数.

定义 1 给定常数 $c_2 > c_1 > 0, T > 0$ 和一个正定矩阵 R , 假设 1 成立. 对 $t \in [0, T]$, 如果下式成立:

$$E\{x^T(0)Rx(0)\} \leq c_1 \Rightarrow E\{x^T(t)Rx(t)\} \leq c_2, \quad (11)$$

则称 SMJS 是有限时间有界的^[39].

定义 2 给定常数 $\gamma > 0$, 如果系统(9)同时满足定义 1 和以下条件:

$$\sup\{E\{\|z(t)\|^2\}\} < \gamma^2 E\{\int_0^T \|\omega(s)\|^2 ds\}, \quad (12)$$

则称系统是 L₂-L_∞ 有限时间有界的^[40].

本文工作的目标在于设计控制器(8)中的反馈增益矩阵 $K_r, \forall r \in \mathcal{I}_M$, 以及触发条件中的矩阵 Φ , 使闭环系统满足 L₂-L_∞ 有限时间有界.

3 主要结果

定理 1 给定常数 c_1, c_2, d, T, R 满足定义 1 中的要求, 以及常数 $\gamma > 0, \alpha > 0, \eta > 0$. 如果存在正定矩阵 $P_i > 0, \Phi > 0$ 满足以下不等式:

$$\Xi_{ir} = \begin{bmatrix} P_i \bar{A}_{ir} + \bar{A}_{ir}^T P_i + \Psi & P_i \bar{B}_{ir} & P_i \bar{E}_{ir} \\ * & -e^{\alpha T} \eta \Phi & 0 \\ * & * & -e^{-\alpha T} \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} -P_i & C_i^T \\ * & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} c_1 e^{\alpha T} \sup\{\lambda_{\max}(\bar{P}_i)\} + \frac{1}{2} e^{\alpha T} + d^2 \leq \\ c_2 \inf\{\lambda_{\min}(\bar{P}_i)\}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, N, r = 1, 2, \dots, M$, 并且

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{ij} &= E\{\pi_{ij}(h)\} = \int_0^\infty \pi_{ij}(h) f_i(h) dh, \\ \bar{A}_{ir} &= \sum_{r=1}^M \tau_{ir} (A_i + B_i K_r), \quad \bar{B}_{ir} = \sum_{r=1}^M \tau_{ir} B_i K_r, \\ \bar{E}_{ir} &= \sum_{r=1}^M \tau_{ir} E_i, \quad \Psi = \sum_{j=1}^N \bar{\pi}_{ij} P_j + e^{\alpha T} \Phi - \alpha P_i, \end{aligned}$$

那么系统(9)是 L₂-L_∞ 有限时间有界的.

证 先证明有限时间有界, 选择以下 Lyapunov 函数:

$$V(x(t), \theta(t)) = V_1(x(t), \theta(t)) + \frac{1}{2} e^{\alpha t} \delta^2(t), \quad (16)$$

其中 $V_1(x(t), \theta(t)) = x^T(t)P(\theta(t))x(t)$, $P(\theta(t))$ 是正定矩阵. 当 $\theta(t) = i$ 时, 定义 $P(\theta(t)) \triangleq P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, \mathcal{L} 为随机过程 $\{\theta(t), h\}$ 的弱无穷小算子, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{V_1(x(t), \theta(t))\} &\triangleq \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \{E[V_1(x(t+\Delta), \theta(t+\Delta)) | V_1(x(t), \theta(t))] - \\ V_1(x(t), \theta(t))\} &= \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \{E[\sum_{j=1, j \neq i}^N \mathcal{P}_1 x^T(t+\Delta) P_j x(t+\Delta) + \\ \mathcal{P}_2 x^T(t+\Delta) P_i x(t+\Delta)] - x^T(t) P_i x(t)\}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中: $\mathcal{P}_1 = \text{Prob}\{h_{n+1} \leq h + \Delta, \theta_{n+1} = j | h_{n+1} \geq h, \theta_n = i\}$, $\mathcal{P}_2 = \text{Prob}\{h_{n+1} > h + \Delta | h_{n+1} > h, \theta_n = i\}$.

根据式(2)中定义的转移率, 得到

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(h) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \mathcal{P}_1 = \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[\frac{F_i(h+\Delta) - F_i(h)}{1 - F_i(h)} \right] q_{ij}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $q_{ij} \triangleq \text{Prob}\{\theta_{n+1} = j | \theta_n = i\}$, $i \neq j$ 是系统从模态 i 到模态 j 的转移概率, 且 $q_{ii} = 0$. 根据式(2)还能得到

$$\begin{aligned} \pi_{ii}(h) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\mathcal{P}_2 - 1] = \\ - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[\frac{F_i(h+\Delta) - F_i(h)}{1 - F_i(h)} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

将式(18)-(19)代入式(17)得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{V_1(x(t), \theta(t))\} &= \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \{E[\sum_{j=1, j \neq i}^N q_{ij} \epsilon_1 x^T(t+\Delta) P_j x(t+\Delta) + \\ \epsilon_2 x^T(t+\Delta) P_i x(t+\Delta)] - x^T(t) P_i x(t)\}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中:

$$\epsilon_1 = \frac{F_i(h+\Delta) - F_i(h)}{1 - F_i(h)}, \quad \epsilon_2 = \frac{1 - F_i(h+\Delta)}{1 - F_i(h)},$$

由于 $x(t+\Delta) = \dot{x}(t)\Delta + x(t) + o(\Delta)$, $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \epsilon_1 = 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1, j \neq i}^N q_{ij} \epsilon_1 x^T(t+\Delta) P_j x(t+\Delta) &= \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1, j \neq i}^N q_{ij} \epsilon_1 x^T(t) P_j x(t) &= \\ \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij}(h) x^T(t) P_j x(t), \end{aligned} \quad (21)$$

注意到 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \epsilon_2 = 1$, 于是有

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\epsilon_2 x^T(t+\Delta) P_i x(t+\Delta) - x^T(t) P_i x(t)] =$$

$$\begin{aligned} & \dot{x}^T(t)P_i x(t) + x^T(t)P_i \dot{x}(t) + \\ & \pi_{ii}(h)x^T(t)P_i x(t), \end{aligned} \quad (22)$$

进而将式(21)–(22)代入式(20), 得到

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}[V_1(x(t), \theta(t))] = \\ & E\{\dot{x}^T(t)P_i x(t) + x^T(t)P_i \dot{x}(t)\} + \\ & \sum_{j=1}^N \bar{\pi}_{ij} x^T(t)P_j x(t). \end{aligned} \quad (23)$$

定义 $\tilde{x}^T(t) = [x^T(t) \ e^T(t) \ \omega^T(t)]$, 并根据式(4)(6)(9)(16)(23), 可以得到

$$\begin{aligned} & E\{\mathcal{L}[V(x(t), \theta(t))] - \\ & \alpha V(x(t), \theta(t)) - e^{-\alpha t} \|\omega(t)\|^2\} = \\ & E\{\dot{x}^T(t)P_i x(t) + x^T(t)P_i \dot{x}(t)\} + \\ & \sum_{j=1}^N \bar{\pi}_{ij} x^T(t)P_j x(t) + e^{\alpha t} \left(\frac{1}{\delta(t)} - \eta\right) e^t(t) \Phi e(t) - \\ & \alpha x^T(t)P_i x(t) - e^{-\alpha t} \omega^T(t) \omega(t) \leq \\ & \sum_{r=1}^M \tau_{ir} \dot{x}^T(t)P_i x(t) + \sum_{r=1}^M \tau_{ir} x^T(t)P_i \dot{x}(t) + \\ & \sum_{j=1}^N \bar{\pi}_{ij} x^T(t)P_j x(t) + e^{\alpha t} x^T(t) \Phi x(t) - \\ & e^{\alpha t} \eta e^T(t) \Phi e(t) - \alpha x^T(t)P_i x(t) - \\ & e^{-\alpha t} \omega^T(t) \omega(t) = \tilde{x}^T(t) \Xi_{ir} \tilde{x}(t), \end{aligned} \quad (24)$$

由条件(13), 可以得到下面的关系式:

$$\begin{aligned} & E\{\mathcal{L}[V(x(t), \theta(t))] - \alpha V(x(t), \theta(t)) - \\ & e^{-\alpha t} \|\omega(t)\|^2\} < 0, \end{aligned} \quad (25)$$

对式(25)两边同时乘以 $e^{-\alpha t}$, 得到

$$E\{\mathcal{L}[V(x(t), \theta(t))e^{-\alpha t}] < e^{-\alpha t} e^{-\alpha T} \|\omega(t)\|^2, \quad (26)$$

再对两边同时从0到 $t \in [0, T]$ 取积分, 可得

$$\begin{aligned} & V(x(t), \theta(t))e^{-\alpha t} - V(x(0), \theta(0)) < \\ & e^{-\alpha T} \int_0^t e^{-\alpha s} \|\omega(s)\|^2 ds < \\ & e^{-\alpha T} \int_0^T \|\omega(s)\|^2 ds, \end{aligned} \quad (27)$$

进一步有(两边同时乘以 $e^{\alpha t}$)

$$\begin{aligned} & V(x(t), \theta(t)) < \\ & e^{\alpha T} V(x(0), \theta(0)) + \int_0^T \|\omega(s)\|^2 ds < \\ & e^{\alpha T} V(x(0), \theta(0)) + d^2, \end{aligned} \quad (28)$$

根据Lyapunov函数的定义有

$$\begin{aligned} & V(x(0), \theta(0)) = \\ & x^T(0)P_i x(0) + \frac{1}{2} \delta^2(0) (\forall i \in \mathcal{I}_N) = \\ & x^T(0)R^{\frac{1}{2}} \bar{P}_i R^{\frac{1}{2}} x(0) + \frac{1}{2} \delta^2(0) \leq \end{aligned}$$

$$\sup\{\lambda_{\max}(\bar{P}_i)\} x^T(0)R x(0) + \frac{1}{2}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & V(x(t), \theta(t)) = \\ & x^T(t)P_i x(t) + \frac{1}{2} \delta^2(t) = \\ & x^T(t)R^{\frac{1}{2}} \bar{P}_i R^{\frac{1}{2}} x(t) + \frac{1}{2} \delta^2(t) \geq \\ & \inf\{\lambda_{\min}(\bar{P}_i)\} x^T(t)R x(t), \end{aligned} \quad (30)$$

根据式(30)得到

$$x^T(t)R x(t) \leq \frac{V(x(t), \theta(t))}{\inf\{\lambda_{\min}(\bar{P}_i)\}}, \quad (31)$$

将式(28)–(29)代入式(31)得到

$$\begin{aligned} & x^T(t)R x(t) \leq \\ & \frac{e^{\alpha T} \sup\{\lambda_{\max}(\bar{P}_i)\} x^T(0)R x(0) + \frac{1}{2} e^{\alpha T} + d^2}{\inf\{\lambda_{\min}(\bar{P}_i)\}}, \end{aligned} \quad (32)$$

若式(32)中 $x^T(0)R x(0) \leq c_1$, 再将式(15)代入式(32)得到

$$\begin{aligned} & x^T(t)R x(t) \leq \\ & \frac{e^{\alpha T} \sup\{\lambda_{\max}(\bar{P}_i)\} c_1 + \frac{1}{2} e^{\alpha T} + d^2}{\inf\{\lambda_{\min}(\bar{P}_i)\}} \leq c_2, \end{aligned} \quad (33)$$

因此有 $E\{x^T(t)R x(t)\} \leq c_2$, 根据定义1得到系统是有限时间有界的。

下面证明 L_2 – L_∞ 性能: 由式(14)得到

$$\begin{aligned} & x^T(t)C_i^T C_i x(t) < \gamma^2 x^T(t)P_i x(t) < \\ & \gamma^2 [x^T(t)P_i x(t) + \frac{1}{2} e^{\alpha t} \delta^2(t)], \end{aligned} \quad (34)$$

注意到式(9)中 $z(t) = C_i x(t)$, 由式(34)得到

$$z^T(t)z(t) < \gamma^2 V(x(t), \theta(t)), \quad (35)$$

注意到初始条件 $x(0) = 0$, 由式(27)有

$$\begin{aligned} & \|z(t)\|^2 \leq \gamma^2 V(x(t), \theta(t)) \leq \\ & \gamma^2 [e^{\alpha T} V(x(0), \theta(0)) + \int_0^T \|\omega(t)\|^2 ds] \leq \\ & \gamma^2 \int_0^T \|\omega(t)\|^2 ds, \end{aligned} \quad (36)$$

根据定义2, 系统是 L_2 – L_∞ 有限时间有界的。证毕。

虽然定理1中给出了 L_2 – L_∞ 有限时间有界的条件, 但由于耦合项的存在, 现有工具箱无法有效求取控制器参数, 因此需对定理1中的条件进一步线性化。

定理 2 给定的常数 $\mu > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \eta > 0$. 如果存在正定矩阵 $\Phi > 0$ 和 $P_i > 0, \alpha > 0$ 使得式(14)和下列不等式有解:

$$\Upsilon_{ir} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} \\ * & -\mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

$$\beta_1 R - P_i < 0, \quad (38)$$

$$P_i - \beta_2 R < 0, \quad (39)$$

$$c_1 e^{\alpha T} \beta_2 + \frac{1}{2} e^{\alpha T} + d^2 \leq c_2 \beta_1, \quad (40)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, N, r = 1, 2, \dots, M$, 并且

$$\mathcal{Y}_{11} = \begin{bmatrix} \Psi - 2P_i + \mu I & 0 & P_i \bar{E}_{ir} \\ * & -e^{\alpha T} \eta \Phi & 0 \\ * & * & -e^{-\alpha T} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Y}_{12}^T = [\mu \bar{A}_{ir} + P_i \quad \mu \bar{B}_{ir} \quad 0],$$

$$\bar{A}_{ir} = \sum_{r=1}^M \tau_{ir} (A_i + B_i K_r), \quad \bar{B}_{ir} = \sum_{r=1}^M \tau_{ir} B_i K_r,$$

$$\bar{E}_{ir} = \sum_{r=1}^M \tau_{ir} E_i, \quad \Psi = \sum_{j=1}^N \bar{\pi}_{ij} P_j + e^{\alpha T} \Phi - \alpha P_i$$

那么系统(9)是L₂-L_∞有限时间有界的.

证 式(13)可以等价改写为

$$\Xi_{ir} = \mathcal{Y}_{ir} + \Gamma_{ir}^T \bar{P} + \bar{P}^T \Gamma_{ir} < 0. \quad (41)$$

其中:

$$\mathcal{Y}_{ir} = \begin{bmatrix} \Psi & 0 & P_i \bar{E}_{ir} \\ * & -e^{\alpha T} \eta \Phi & 0 \\ * & * & -e^{-\alpha T} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{ir} = [\bar{A}_{ir} \quad \bar{B}_{ir} \quad 0], \quad \bar{P}_i = [P_i \quad 0 \quad 0].$$

根据式(41), 总是存在足够小的 $\mu > 0$ 使得

$$\mathcal{Y}_{ir} + \Gamma_{ir}^T \bar{P}_i + \bar{P}_i^T \Gamma_{ir} + \mu \Gamma_{ir}^T \Gamma_{ir} < 0, \quad (42)$$

即

$$\begin{bmatrix} \Psi - \mu^{-1} P_i P_i & 0 & P_i \bar{E}_{ir} \\ * & -e^{\alpha T} \eta \Phi & 0 \\ * & * & -e^{-\alpha T} \end{bmatrix} + [\mu \bar{A}_{ir} + P_i \quad \mu \bar{B}_{ir} \quad 0]^T \mu^{-1} [\mu \bar{A}_{ir} + P_i \quad \mu \bar{B}_{ir} \quad 0] < 0, \quad (43)$$

再根据Schur补引理, 得到

$$\begin{bmatrix} \Psi - \mu^{-1} P_i P_i & 0 & P_i \bar{E}_{ir} & \mu \bar{A}_{ir}^T + P_i \\ * & -e^{\alpha T} \eta \Phi & 0 & \mu \bar{B}_{ir}^T \\ * & * & -e^{-\alpha T} & 0 \\ * & * & * & -\mu I \end{bmatrix} < 0. \quad (44)$$

易得 $-\mu^{-1} P_i P_i < -2P_i + \mu I$. 从而式(13)的充分条件

$$\begin{bmatrix} \Psi - 2P_i + \mu I & 0 & P_i \bar{E}_{ir} & \mu \bar{A}_{ir}^T + P_i \\ * & -e^{\alpha T} \eta \Phi & 0 & \mu \bar{B}_{ir}^T \\ * & * & -e^{-\alpha T} & 0 \\ * & * & * & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow \mathcal{Y}_{ir} < 0. \quad (45)$$

另外, 因为 $\bar{P}_i = R^{-\frac{1}{2}} P_i R^{-\frac{1}{2}}$, 再由式(38)得到

$$\beta_1 I < R^{-\frac{1}{2}} P_i R^{-\frac{1}{2}} = \bar{P}_i, \quad (46)$$

进一步有 $\beta_1 < \inf\{\lambda_{\min}(\bar{P}_i)\}, \beta_2 > \sup\{\lambda_{\max}(\bar{P}_i)\}$, 结合式(15)得到左边 $c_1 e^{\alpha T} \sup\{\lambda_{\max}(\bar{P}_i)\} + \frac{1}{2} e^{\alpha T} +$

$d^2 < c_1 e^{\alpha T} \beta_2 + \frac{1}{2} e^{\alpha T} + d^2$ 右边 $c_2 \beta_1 < c_2 \inf\{\lambda_{\min}(\bar{P}_i)\}$. 因此, 式(15)成立的充分条件为式(38)-(40). 证毕.

4 仿真示例

本节给出如图2所示的RLC电路实例, 通过MATLAB验证上述控制算法的实用性和有效性.

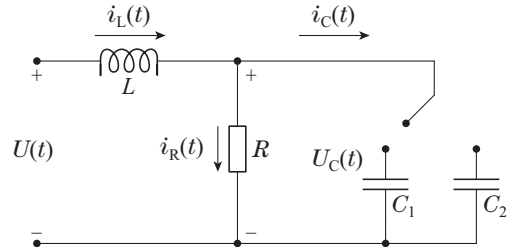


图2 RLC电路图

Fig. 2 RLC circuit

该电路可通过切换电容改变系统参数, $U_C(t)$ 为电容器电压, $i_L(t)$ 为电感电流, $i_R(t)$ 为电阻电流, $i_C(t)$ 为电容器电流, 定义系统状态 $x(t) = [U_C(t) \quad i_L(t)]^T$, 控制输入 $u(t) = U(t)$, 得到状态方程

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix},$$

$$E_1 = [2.0 \quad -2.0], \quad C_1 = [1.0 \quad -1.0],$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_2 R} & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix},$$

$$E_2 = [2.0 \quad -2.0], \quad C_2 = [1.0 \quad -1.0].$$

本例中, SMJS 和控制器均有两个模态, $M = 2, N = 2$. 被控对象的模态切换由SMP控制, 其转移率矩阵如下:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{11}(h) & \pi_{12}(h) \\ \pi_{21}(h) & \pi_{22}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}h & \frac{1}{2}h \\ 3h^2 & -3h^2 \end{bmatrix},$$

假定模态驻留时间服从威布尔分布, 则概率密度函数

$$f_m(h) = \frac{c}{b^c} h^{c-1} e^{-(\frac{h}{b})^c}, \quad m = 1, 2,$$

当 $m = 1$ 时, b 和 c 分别取值为 $b = 2$ 和 $c = 2$; 当 $m = 2$ 时, b 和 c 分别取值为 $b = 1$ 和 $c = 3$, 则有

$$f_1(h) = \frac{1}{2} h e^{-0.25h^2}, \quad f_2(h) = 3h^2 e^{-h^3}.$$

进而得到转移率的数学期望

$$\bar{\pi}_{12} = \int_0^\infty \frac{1}{2} h dh \approx 0.89, \quad \bar{\pi}_{21} = \int_0^\infty 3h^2 dh \approx 2.71.$$

得到期望转移率矩阵 $\bar{\Pi}_1$, 给定式(7)中转移概率矩阵

$$\bar{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\pi}_{11} & \bar{\pi}_{12} \\ \bar{\pi}_{21} & \bar{\pi}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.89 & 0.89 \\ 2.71 & -2.71 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

假设干扰信号 $\omega(t) = 2\sin(0.7t)e^{-0.5t}$, 系统参数 $L = 1\text{ H}, R = 0.5\ \Omega, C_1 = 1\text{ F}, C_2 = 2\text{ F}$, 其他参数取值为 $d = 2.5, \eta = 5, T = 10\text{ s}, \mu = 0.05, \gamma = 3.5, \alpha = 0.001, c_1 = 1, c_2 = 10, \beta_1 = 1.0, \beta_2 = 2.0, R = 0.1\text{ I}$. 系统的初始条件 $x(0) = [0.7 \ -0.5]^T, \delta(0) = 0.02$. 并且, 由定理2可得AETS的加权参数矩阵和状态反馈矩阵分别为

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.0396 & 0.0214 \\ 0.0214 & 0.0720 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = [0.9150 \ -5.8079], K_2 = [0.4296 \ -5.2426].$$

图3表示系统模态 $\theta(t)$ 和控制器模态 $\sigma(t)$ 的变化情况, 在4s到6s内能够明显看出系统与控制器之间存在异步变化关系.

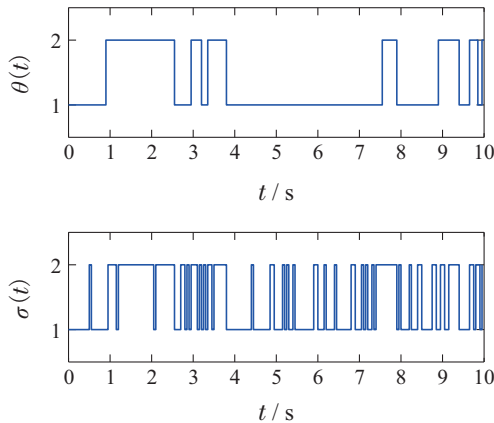


图3 系统和控制器的模态切换

Fig. 3 The mode jump of system and controller

图4-5分别以灰色曲线描述了1000次独立仿真下系统状态 x_1, x_2 和 $x^T(t)Rx(t)$ 在有限时间内的变化情况, 并以黑色曲线代表它们的平均值. 当 $t = 0$ 时, $x^T(t)Rx(t) \leq c_2 = 1$, 且当 $t \in [0, T]$ 时, $x^T(t)Rx(t) \leq c_2 = 2$, 说明系统是有限时间有界的.

定义函数

$$\gamma(t) \triangleq \frac{\|z(t)\|_{L_\infty}}{\|\omega(t)\|_{L_2}} = \sqrt{\frac{\sup\{\|z(t)\|^2\}}{\int_0^T \|\omega(s)\|^2 ds}}.$$

图6以灰色曲线表示1000次独立仿真下系统 L_2-L_∞ 性能并以黑色曲线代表平均值, 可以看出在有限时间内 $\gamma(t) < \gamma$, 系统 L_2-L_∞ 性能满足预期.

图7表示一次仿真中自适应阈值参数 $\delta(t)$ 在有限时间内的变化过程. 图中 $\delta(t)$ 的变化存在快速和放缓的不同情况, 说明 $\delta(t)$ 能够根据系统运行状态进行调整. 另外, 通过设定不同初值和参数可以调节 $\delta(t)$ 的变化情况, 如图7(a)-7(b)所示, $\delta(t)$ 从初值收敛到 $\frac{1}{\eta}$, 若

系统在 $\delta(t)$ 到达 $\frac{1}{\eta}$ 前已经稳定, $\delta(t)$ 将停留在某值.

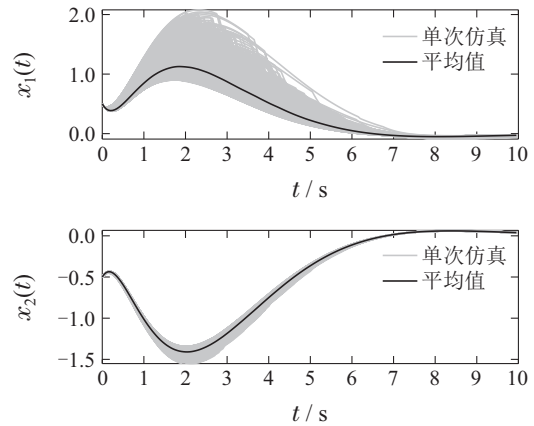


图4 仿真1000次的系统状态 $x_1(t), x_2(t)$

Fig. 4 System states $x_1(t), x_2(t)$ with 1000 realizations

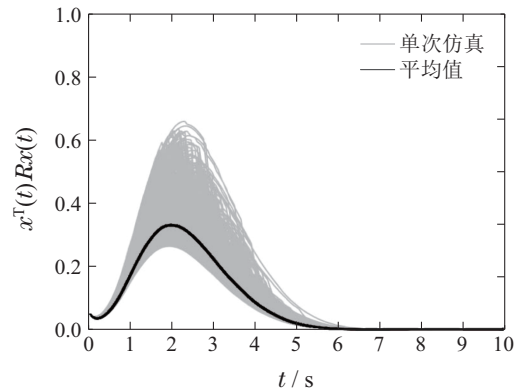


图5 仿真1000次的 $x^T(t)Rx(t)$

Fig. 5 $x^T(t)Rx(t)$ with 1000 realizations

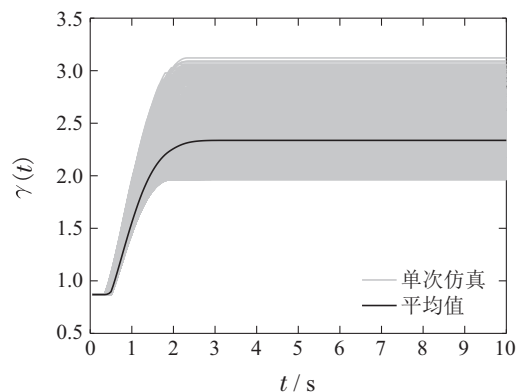


图6 仿真1000次的 $\gamma(t)$ 的值及其平均值

Fig. 6 The ratio of $\gamma(t)$ with 1000 realizations

图7(a)中 $\delta(0) = 0.05, \eta = 5$, 图7(b)中 $\delta(0) = 0.6, \eta = 10$.

为了更清晰地展示对网络带宽产生的影响, 定义

$$\text{触发率} \triangleq \frac{\text{触发次数}}{\text{采样数据的数量}}.$$

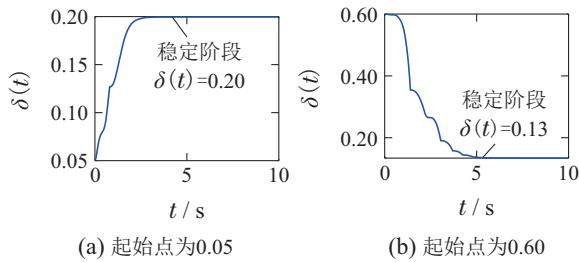


图7 自适应阈值参数 $\delta(t)$
Fig. 7 Adaptive parameter $\delta(t)$

图8表示在1000次独立仿真下,系统分别受ETS影响和AETS影响的触发率(灰色)和平均触发率(黑色),从图8(a)–(b)可以看出AETS的平均触发率要低于ETS,经计算,基于AETS的系统平均触发率为8.2%,而基于ETS的系统平均触发率为17.8%.

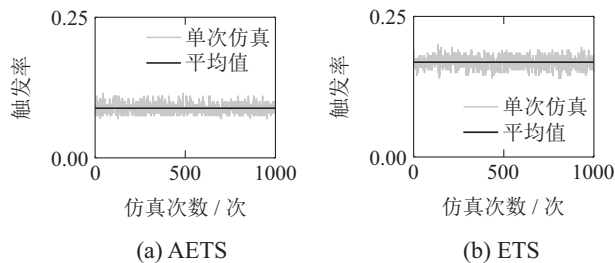


图8 仿真1000次的平均触发率
Fig. 8 Average trigger rate with 1000 realizations

图9表示系统在ETS和AETS下的触发时刻与触发间隔,每条数据的横坐标代表一次仿真中事件触发时刻,纵坐标代表与上一次触发时刻的时间间隔。可以看出AETS的数据密集程度更低,触发间隔更长,也体现了AETS相较于ETS的优势。

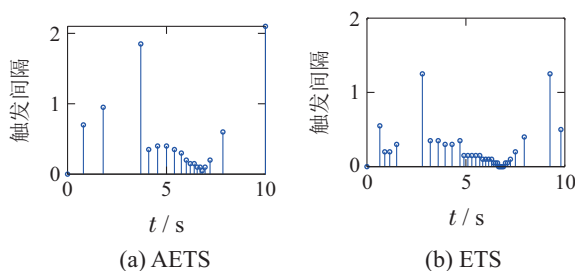


图9 触发实例和时间间隔
Fig. 9 Triggering instants and intervals

5 总结

本文研究了连续时间,异步模式下的SMJS的有限时间控制问题。为了减轻网络通信负担,引入了AETS,此外还讨论了 L_2-L_∞ 性能问题。在控制器设计中考虑了系统模态和控制器模态之间的异步切换。通过建立依赖于模态的Lyapunov函数,得到一组求解控制器及触发条件参数的条件。最后以RLC电路为例对所设计的方法进行了验证。该方法的主要特点是:1) 解决有限时间状态反馈控制问题;2) 引入了异步控制方案;

3) 验证了引入的AETS相对于传统ETS更具优势。另外,本文的SMP是齐次的,SMJS是线性的,是连续状态下的,在未来的工作中,可以将这些结果扩展到更一般的SMP当中。而且如何降低本文算法的保守性也是一个需要考虑的问题。还可以进一步考虑网络中断攻击、网络虚假数据攻击等。

参考文献:

- [1] XIONG Weihua, DONG Ruihua, WU Zhihao. Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems. *Control and Decision*, 2020, 35(11): 2780–2786. (熊卫华,董瑞华,吴之昊. 自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性. *控制与决策*, 2020, 35(11): 2780–2786.)
- [2] REN Chengcheng, SONG Jun, HE Shuping. Extended-state-observer-based finite-time asynchronous control of a class of stochastic positive hidden Markov jump systems. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(11): 1891–1900. (任乘乘,宋军,何舒平. 基于扩展状态观测器的随机隐Markov正跳变系统有限时间异步控制. *控制理论与应用*, 2021, 38(11): 1891–1900.)
- [3] LIU Yue, ZHOU Ping. Recent status and progress in optimal control of Markov jump linear systems. *Information and Control*, 2022, 51(1): 54–68. (刘越,周平. 马尔科夫跳变线性系统最优控制的研究现状与进展. *信息与控制*, 2022, 51(1): 54–68.)
- [4] TARTAGLIONE G, ARIOLA M, AMATO F. An observer-based output feedback controller for the finite-time stabilization of Markov jump linear systems. *IEEE Control Systems Letters*, 2019, 3(3): 763–768.
- [5] SHEN H, LI F, YAN H C, et al. Finite-time event-triggered H_∞ control for T-S fuzzy Markov jump systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(5): 3122–3135.
- [6] SAN H M, KEPING Y, TAKURO S. Modeling and analysis of error process in 5G wireless communication using two-state Markov chain. *IEEE Access*, 2019, 7: 26391–26401.
- [7] DAI J T, GUO G. Exponential consensus of non-linear multiagent systems with semi-Markov switching topologies. *IET Control Theory Applications*, 2017, 11(18): 3363–3371.
- [8] CHE W W, JIN X Z, YE D. Quantized state-feedback H-infinity control of networked control systems with Markov dropouts. *IEEE 2012 24th Chinese Control and Decision Conference*. New York, USA: IEEE, 2012: 406–411.
- [9] REN H L, ZONG G D, KARIMI H R. Asynchronous finite-time filtering of Markov jump nonlinear systems and its applications. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(3): 1725–1734.
- [10] CHENG P, HE S P, CHENG J, et al. Asynchronous output feedback control for a class of conic-type nonlinear hidden Markov jump systems within a finite-time interval. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 51(12): 7644–7651.
- [11] ZHU S Q, WANG B, ZHANG C H. Delay-dependent stochastic finite-time L_1 -gain filtering for discrete-time positive Markov jump linear systems with time-delay. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(15): 6894–6913.
- [12] ZHANG H, XU S. Finite-time almost sure stability of a Markov jump fuzzy system with delayed inputs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022, 30(6): 1801–1808.
- [13] ZHOU Shaowei, CHEN Bing, LIU Hongxia. Finite-time stability for nonhomogeneous Markov jump systems with multiplicative noises. *Control and Decision*, 2018, 33(3): 565–570.

- (周绍伟, 陈兵, 刘洪霞. 带乘性噪声的非齐次Markov跳跃系统有限时间稳定性. 控制与决策, 2018, 33(3): 565 – 570.)
- [14] LUO M H, MU X W, WU X H, et al. Event-triggered non-fragile finite-time H_∞ control for semi-Markovian jump systems with actuator saturation. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(15): 10626 – 10647.
- [15] XIN B, ZHAO D. Generalized H_2 control of the linear system with semi-Markov jumps. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 31(3): 1005 – 1020.
- [16] QI W H, ZONG G D, AHN C K. Input-output finite-time asynchronous SMC for nonlinear semi-Markov switching systems with application. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(8): 5344 – 5353.
- [17] RAN G T, LIU J, LI C J, et al. Finite-time filtering for fuzzy nonlinear semi-Markov jump systems with deception attacks and a periodical transmission. *Journal of the Franklin Institute*, 2023, 360(16): 12576 – 12597.
- [18] WANG J, RU T, XIA J W, et al. Asynchronous event-triggered sliding mode control for semi-Markov jump systems within a finite-time interval. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2021, 68(1): 458 – 468.
- [19] HE S P, LIU F. Finite-time boundedness of uncertain time-delayed neural network with Markovian jumping parameters. *Neurocomputing*, 2013, 103(1): 87 – 92.
- [20] LIU J, RAN G T, HUANG Y Q, et al. Adaptive event-triggered finite-time dissipative filtering for interval type-2 fuzzy Markov jump systems with asynchronous modes. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 52(9): 9709 – 9721.
- [21] ZHANG Y, SHI P, NGUANG S K, et al. Finite-time boundedness for uncertain discrete neural networks with time-delays and Markovian jumps. *Neurocomputing*, 2014, 140(9): 1 – 7.
- [22] LIU H T, WANG G, ZHANG T. Finite-time H_∞ control for high-precision tracking in robotic Manipulators using backstepping control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(9): 5501 – 5513.
- [23] ZHANG Weihai, LIU Heming. Finite-time control of stochastic Markovian jump systems. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(3): 334 – 340.
(张维海, 刘鹤鸣. 随机马尔科夫跳跃系统有限时间控制. 控制理论与应用, 2015, 32(3): 334 – 340.)
- [24] LU Chengtian, YU Sheng, CHENG Pei. Finite-time stability of the impulsive stochastic neural networks with delay. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(1): 187 – 192.
(鲁成甜, 喻圣, 程培. 具有时滞的脉冲随机神经网络的有限时间稳定性. 控制理论与应用, 2020, 37(1): 187 – 192.)
- [25] YAN H C, TIAN Y X, LI H Y, et al. Input-output finite-time mean square stabilization of nonlinear semi-Markovian jump systems. *Automatica*, 2019, 104(1): 82 – 89.
- [26] WANG J, RU T T, SHEN H, et al. Stochastic finite-time H_∞ state estimation for discrete-time semi-Markovian jump neural networks with time-varying delays. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(12): 5456 – 5467.
- [27] QI W H, ZONG G D, ZHENG W X. Adaptive event-triggered SMC for stochastic switching systems with semi-Markov process and application to boost converter circuit model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2021, 68(2): 786 – 796.
- [28] ZHU F Z, PARK J H, PENG L. Adaptive event-triggered quantized communication-based distributed estimation over sensor networks with semi-Markovian switching topologies. *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, 2022, 8: 258 – 272.
- [29] GU Z, TIAN E G, LIU J L. Adaptive event-triggered control of a class of nonlinear networked systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, 354(9): 3854 – 3871.
- [30] GAO X B, LI X M, LIN W S, et al. Event-triggered finite-time H_∞ control for discrete-time Markov jump systems with nonhomogeneous processes. *2018 3rd International Conference on Robotics and Automation Engineering*. Guangzhou: IEEE, 2018: 107 – 111.
- [31] ZENG P Y, DENG F Q, GAO X B, et al. Event-triggered and self-triggered L_∞ control for Markov jump stochastic nonlinear systems under DoS attacks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, 53(2): 1170 – 1183.
- [32] TAO Y Y, WU Z G. Asynchronous control of two-dimensional Markov jump roesser systems: An event-triggering strategy. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, 9(4): 2278 – 2289.
- [33] GU Z, YUE D, TIAN E G. On designing of an adaptive event-triggered communication scheme for nonlinear networked interconnected control systems. *Information Sciences*, 2018, 422: 257 – 270.
- [34] GONG C, ZHU G P, SHI P. Adaptive event-triggered and double-quantized consensus of leader-follower multiagent systems with semi-Markovian jump parameters. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(9): 5867 – 5879.
- [35] ZHANG L C, LIANG H J, SUN Y H, et al. Adaptive event-triggered fault detection scheme for semi-Markovian jump systems with output quantization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(4): 5867 – 5879.
- [36] RAN G T, LI C J, SAKTHIVEL R, et al. Adaptive event-triggered asynchronous control for interval type-2 fuzzy Markov jump systems with cyberattacks. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2022, 9(1): 88 – 99.
- [37] LIU Y J, GUO B Z, PARK J H, et al. Event-based reliable dissipative filtering for T-S fuzzy systems with asynchronous constraints. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(4): 2089 – 2098.
- [38] ZHANG H, WANG Z, YAN H. Adaptive event-triggered transmission scheme and H_∞ filtering co-design over a filtering network with switching topology. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 49(12): 4296 – 4307.
- [39] CAO Z R, NIU Y G, SONG J. Finite-time sliding-mode control of Markovian jump cyber-physical systems against randomly occurring injection attacks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(3): 1264 – 1271.
- [40] XU Z W, WU Z G, SU H Y, et al. Energy-to-peak filtering of semi-Markov jump systems with mismatched modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(10): 4356 – 4361.

作者简介:

徐文灏 硕士研究生, 目前研究方向为半马尔科夫跳变系统控制,

E-mail: xuwenhao292@163.com;

石厅 副教授, 目前研究方向为预测控制、事件触发、随机系

统, E-mail: tingshi@hdu.edu.cn.