

## 受扰多智能体系统有限时间分布式时变优化

朱文博, 张师峥, 王庆领<sup>†</sup>

(东南大学自动化学院, 复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室, 江苏 南京 210018)

**摘要:** 多智能体系统有限时间分布式优化, 即设计分布式控制算法使得多智能体系统能够在有限时间内达到一致, 且使得系统中的代价函数的加和最小. 其中, 每一个智能体只能获取到本地代价函数的信息. 在一些常见的应用场景中, 代价函数的值不仅取决于智能体自身的状态, 同时也与时间有关. 因此, 分布式时变优化算法在实际多智能体系统中具有更好的可用性. 现有的多智能体系统分布式时变优化算法大多为渐近优化算法, 且要求系统具有无向图或者有向平衡图, 在算法实际部署中存在一定的局限性. 因此, 本文在任意强连通有向图下研究了受扰多智能体系统有限时间分布式时变优化问题. 首先, 本文基于有限时间稳定性理论和数值图论提出了一类新的有限时间分布式优化算法, 该算法可以在具有任意强连通有向图的受扰多智能体系统中实现分布式时变优化. 随后, 文章还将新提出的分布式优化算法进行了扩展, 用以解决具有有向切换拓扑的受扰多智能体系统有限时间分布式时变优化问题. 提出的两种分布式算法均可以对多智能体系统中的干扰进行抑制, 且不需要使用 Hessian 信息以及梯度对时间的偏导信息. 最后, 通过仿真实例验证了理论结果的正确性.

**关键词:** 分布式时变优化; 受扰多智能体系统; 有限时间稳定性; 有向图

**引用格式:** 朱文博, 张师峥, 王庆领. 受扰多智能体系统有限时间分布式时变优化. 控制理论与应用, 2025, 42(3): 433 – 441

DOI: 10.7641/CTA.2023.30060

## Finite-time distributed time-varying optimization of disturbed multi-agent systems

ZHU Wen-bo, ZHANG Shi-zheng, WANG Qing-ling<sup>†</sup>

(School of Automation, the Key Laboratory of Measurement and Control of Complex Systems of Engineering, Ministry of Education, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210018, China)

**Abstract:** Finite-time distributed optimization of multi-agent systems (MASs) refers that each agent of MASs can reach consensus at optimal state within finite-time, where optimal state is the unique minimizer of the sum of cost functions, and each cost function can be only accessed by local agent. In many practical scenarios, the cost function related to own state of agent is generally time-varying. Therefore, the distributed time-varying optimization algorithms are more desirable. Most of the existing distributed time-varying optimization algorithms for MASs are with asymptotic convergence, and the graphs are generally required to be undirected or weight-balanced, which may bring obstacles in the actual deployments. Therefore, in this paper, we study the finite-time distributed time-varying optimization problems for disturbed MASs under arbitrary strongly connected directed graph. Firstly, based on finite-time stability theory and graph theory, we propose a new class of finite-time distributed optimization algorithms which can realize distributed time-varying optimization of disturbed MASs under arbitrary strongly connected directed graphs. In addition, we extend the new distributed optimization algorithms to address the finite-time distributed time-varying optimization problems for disturbed MASs under switched directed graphs. Both of the proposed distributed algorithms can suppress the interference in multi-agent systems without using the Hessian information and the partial derivatives information of gradient with respect to time. Finally, the simulation examples are given to verify the correctness of the theoretical results.

**Key words:** distributed time-varying optimization; disturbed multi-agent systems; finite-time stability; directed graphs

**Citation:** ZHU Wenbo, ZHANG Shizheng, WANG Qingling. Finite-time distributed time-varying optimization of disturbed multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2025, 42(3): 433 – 441

收稿日期: 2023-02-14; 录用日期: 2023-12-26.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: qlwang@seu.edu.cn; Tel.: +86 15295588075.

本文责任编辑: 王龙.

国家自然科学基金项目(62373102, 61973074), 江苏省自然科学基金项目(BK20221455), 安徽省重点研究与开发计划项目(2022i01020013)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62373102, 61973074), the Jiangsu Natural Science Foundation (BK20221455) and the Anhui Provincial Key Research and Development Project (2022i01020013).

## 1 引言

在过去的几十年内,多智能体系统分布式优化因其广泛的应用场景和部署领域而广受关注<sup>[1]</sup>.例如,智能电网、智慧交通和传感器网络<sup>[2-4]</sup>等.分布式优化的目标就是通过设计分布式控制算法,使得所有智能体的状态能够达到一致,且系统中的代价函数的和最小.在多智能体系统中,每一个智能体均对应一个本地代价函数.

在上述背景下,很多研究者针对多智能体系统分布式优化问题<sup>[5-10]</sup>进行了一系列研究.例如,文献[5]和文献[6]通过离散时间优化算法实现了多智能体系统分布式优化.此外,考虑到现有多智能体系统模型大多采用连续时间微分方程进行表述,因此,多智能体系统分布式优化问题可以通过连续时间分布式优化算法来解决.例如,文献[7]提出了一种基于代价函数梯度的连续时间优化算法.文献[8]则通过使用代价函数的Hessian信息实现分布式优化.此外,由于多智能体系统在实际部署中通常会受到干扰或者遭受网络攻击,因此针对含有干扰或者信息攻击的多智能体系统分布式优化<sup>[9-10]</sup>同样受到了人们的关注.值得注意的是,以上分布式优化方法都是渐近收敛的,即当时间趋向于无穷时可以实现分布式优化.然而,在实际应用场景中,人们通常希望能够在有限时间内实现分布式优化.

近年来,多智能体系统有限时间分布式优化算法<sup>[11-19]</sup>因其较快的收敛速度而受到了广泛的研究.例如,文献[11-14]在固定图下解决了具有固定代价函数的多智能体系统有限时间分布式优化问题.此外,由于多智能体之间的通信信道在实际场景中可能会受到一些干扰,例如电磁干扰,当干扰超过信道的抗干扰阈值后,通信信道可能会出现断连,而当干扰减弱后,通信信道又会重新连接.上述现象会导致多智能体系统的通信拓扑切换.为了适应这一现象,文献[15-16]针对具有切换拓扑的多智能体系统有限时间分布式优化进行了研究.上述研究成果<sup>[11,16]</sup>均考虑了具有固定代价函数的多智能体系统有限时间分布式优化.然而在实际场景中也会遇到智能体具有时变代价函数的情况.因此,为了提高优化算法的通用性,多智能体系统有限时间分布式时变优化同样获得了广泛的关注<sup>[17-18]</sup>.此外,文献[19]进一步研究了多智能体系统的代价函数和通信拓扑都是时变的场景.综上所述可知,许多现存的有限时间分布式优化算法<sup>[11,14]</sup>可以在具有固定通信图和固定代价函数的多智能体系统中实现分布式优化.此外,一些研究者也针对具有切换图和固定代价函数的多智能体系统<sup>[15-16]</sup>,以及具有固定图和时变代价函数的多智能体系统<sup>[17-18]</sup>中的有限时间分布式优化进行了研究.但是,针对具有切换

图和时变代价函数的多智能体系统有限时间分布式优化问题仍然值得探索.

受上述讨论的启发,本文研究了受扰多智能体系统有限时间分布式时变优化问题.首先,本文利用有限时间稳定性理论和图论构建了一个辅助系统,并基于该辅助系统提出了一种新的有限时间分布式优化算法,该算法可以在具有任意强连通有向图的受扰多智能体系统中实现分布式时变优化.随后,文章将新提出的分布式优化算法进行了扩展,用以解决具有有向切换拓扑的受扰多智能体系统中的有限时间分布式时变优化问题.新提出的两种分布式算法均可以对系统中的干扰进行抑制,且不需要使用Hessian信息和梯度对时间的偏导信息.本文主要创新点如下:

1) 本文提出了两类新的具有干扰抑制功能的有限时间分布式时变优化算法,算法分别适用于具有任意强连通固定/切换有向图的多智能体系统.此外,新提出的分布式算法均不需要使用Hessian信息和梯度对时间的偏导数信息,从而降低计算的复杂度.

2) 本文在有向图下研究了受扰多智能体系统有限时间分布式时变优化问题.与文献[5,10]相比,新提出的算法可以在有限时间内实现分布式优化.不同于文献[11,18],新提出的算法可以在具有任意强连通有向切换图的多智能体系统中实现分布式时变优化.此外,相较于文献[17,19],本文提出的有限时间分布式优化算法不需要使用Hessian信息和梯度对时间的偏导数信息.

本文其余部分结构安排如下:第2节给出了符号说明、图论和基础知识;在第3节中,文章首先提出了一种新的适用于固定有向图的有限时间分布式时变优化算法,然后,将算法进行了扩展,解决了具有有向切换图的多智能体系统有限时间分布式时变优化问题;第4节给出了仿真实验结果,证实了所提出的分布式优化算法的有效性;第5节为本文的结论.

## 2 基础知识和问题描述

### 2.1 符号说明

在本文中,用 $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{R}^{++}$ 分别表示实数集、非负实数集和正实数集.  $W = [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_N]^T \in \mathbb{R}^N$ 表示 $N$ 维列向量,其中 $w_i \in \mathbb{R}$ . 符号 $1_N \in \mathbb{R}^N$ 和 $0_N \in \mathbb{R}^N$ 分别代表元素全为1和0的列向量.  $M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示 $N \times N$ 维矩阵,其中 $m_{ij} \in \mathbb{R}$ 表示矩阵 $M$ 中第 $i$ 行第 $j$ 列的元素.  $S = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ 代表 $N$ 维对角矩阵,其中 $s_i \in \mathbb{R}$ 是对角线的第 $i$ 个元素.此外,对于一个时变函数 $f(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,符号 $\nabla_x f(x, t)$ 代表函数 $f(x, t)$ 关于状态变量 $x$ 的梯度.符号 $\nabla_{xx} f(x, t)$ 和 $\nabla_{xt} f(x, t)$ 分别代表 $\nabla_x f(x, t)$ 关于状态变量 $x$ 和时间 $t$ 的偏导数.

## 2.2 图论

多智能体系统中智能体之间的通信拓扑<sup>[20-21]</sup>用有向图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$  表示, 其中:  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$  是系统中智能体的集合,  $\mathcal{E} \subseteq \{\mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$  是多智能体系统中有向通信信道的集合,  $A = [a_{ij}]$  是邻接矩阵. 若矩阵元素  $a_{ij} > 0$ , 则代表智能体  $i$  可以接受来自智能体  $j$  的信息, 即智能体  $j$  是智能体  $i$  的一个入邻居, 且智能体  $i$  是智能体  $j$  的一个出邻居. 若元素  $a_{ij} = 0$ , 则代表智能体  $i$  不能接收来自智能体  $j$  的信息. 此外, 图  $\mathcal{G}$  的入度矩阵定义为  $D^{\text{in}} = \text{diag}\{d_1^{\text{in}}, d_2^{\text{in}}, \dots, d_N^{\text{in}}\}$ , 其中  $d_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ . 图  $\mathcal{G}$  的出度矩阵定义为  $D^{\text{out}} = \text{diag}\{d_1^{\text{out}}, d_2^{\text{out}}, \dots, d_N^{\text{out}}\}$ , 其中  $d_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ . 图  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵定义为  $L = D^{\text{in}} - A$ . 如果在任意两个智能体之间至少存在一条有向路径, 那么  $\mathcal{G}$  是一个强连通有向图. 定义一个有向图的集合  $\{\mathcal{G}_1(t), \mathcal{G}_2(t), \dots, \mathcal{G}_s(t)\}$ , 集合中的每个图  $\mathcal{G}_s(t)$  ( $s = 1, 2, \dots, S$ ) 的边的权值均可以是时变的; 定义一个分段常数函数  $\pi(t) : t \rightarrow s$ , 其中  $s \in \{1, 2, \dots, S\}$ . 若有向图  $\mathcal{G}(t)$  根据分段常数函数  $\pi(t)$  进行切换, 即  $\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_{\pi(t)}(t)$ , 则  $\mathcal{G}(t)$  是一个有向切换图.

## 2.3 基础知识

为了研究有限时间分布式优化问题, 首先介绍以下引理和定义:

**引理 1** (有限时间稳定性)<sup>[22]</sup> 考虑动态系统  $\dot{\vartheta}(t) = f(\vartheta(t))$ , 其中  $f(\vartheta(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的零点为 0. 假设光滑标量函数  $V(\vartheta(t))$  是正定的, 如果  $\dot{V}(\vartheta(t)) \leq -\alpha \times V^\beta(\vartheta(t))$ , 其中  $\alpha > 0$  且  $\beta \in [0, 1)$ , 那么,  $\vartheta(t)$  可以在有限时间内收敛到 0.

**定义 1** (Clarke 广义梯度)<sup>[23]</sup> 定义

$$\partial_C V(\tau) \triangleq \mathcal{C}\{\lim_{\tau_i \rightarrow \tau, \tau_i \notin \Theta_V \cup Q} \nabla V(\tau_i)\}, \quad (1)$$

其中:  $V(\tau) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  是局部 Lipschitz 连续函数,  $\mathcal{C}$  代表凸包; 符号  $\Theta_V$  表示 Lebesgue 测度零点集, 即这个集合中  $V(\tau_i)$  的梯度不存在;  $Q$  是一个测度零点的任意集合.

**引理 2** (链式法则)<sup>[24]</sup> 若  $V(\omega(t)) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  是一个局部 Lipschitz 连续函数, 且变量  $\omega(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  也连续, 则对于每一时刻  $t$  均存在  $\mu \in \partial_C V(\omega(t))$ , 使得

$$\frac{dV(\omega(t))}{dt} = \mu^T \dot{\omega}(t). \quad (2)$$

**引理 3**<sup>[25]</sup> 在图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$  中考虑如下多智能体系统:

$$\dot{x}(t) = -\eta \text{sgn}(Lx(t)) + q(t), \quad (3)$$

其中:  $x(t)$  是状态向量,  $q(t)$  是系统的外部干扰. 若图  $\mathcal{G}$  包含至少一条有向生成树, 且系统中智能体没有达到一致状态, 则向量  $\text{sgn}(Lx(t))$  中至少有一个元素不是 0, 且  $\text{sgn}(Lx(t))^T L \text{sgn}(Lx(t)) \geq 1$ .

**引理 4**<sup>[26]</sup> 若图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$  是强连通的, 则存在向量  $r = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_N]^T$  使得  $r^T L = 0_N$ , 其中  $L$  是图  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵, 且向量  $r$  的每一个元素均为正数.

## 2.4 问题描述

考虑如下受扰多智能体系统:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) + q_i(t), \quad (4)$$

其中:  $x_i(t) \in \mathbb{R}$  表示第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 个智能体的状态,  $u_i(t) \in \mathbb{R}$  表示第  $i$  个智能体的控制器输入,  $q_i(t)$  表示未知干扰. 有限时间分布式时变优化的目标为

$$\lim_{t \rightarrow \tau_c} x(t) = x^*(t),$$

$$\text{s.t. } x^*(t) = \arg \min_{x(t) \in \mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N f_i(x_i(t), t), \quad (5)$$

其中:  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_N(t)]^T$  为系统的状态向量,  $x^*(t) = \tilde{x}^*(t) \otimes \mathbf{1}_N$  为全局最优状态,  $\tau_c$  为某一正常数,  $f_i(x_i(t), t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  为第  $i$  个智能体的时变代价函数. 关于多智能体系统中的代价函数以及外部干扰, 有如下两个假设:

**假设 1** 多智能体系统中的每个智能体  $i$  的代价函数  $f_i(x_i, t)$  是时变的, 且均满足  $\rho \leq \nabla_{xx} f_i(x_i, t)$  和  $|\nabla_{xt} f_i(x_i, t)| \leq M$ , 其中  $\rho \in \mathbb{R}^{++}$  且  $M \in \mathbb{R}^+$ .

**假设 2** 每一个智能体受到的未知干扰  $q_i(t)$  是有界的, 即  $|q_i(t)| \leq \bar{q} \in \mathbb{R}^+$ .

**注 1** 在文献[18]中, 假设

$$\begin{cases} \sup_{t \in [0, \infty)} |\nabla_{xt} f_i(x_i, t) - \nabla_{xt} f_j(x_j, t)|, \\ \sup_{t \in [0, \infty)} |\nabla_{xxt} f_i(x_i, t) - \nabla_{xxt} f_j(x_j, t)|, \\ \sup_{t \in [0, \infty)} |\nabla_{xtt} f_i(x_i, t) - \nabla_{xtt} f_j(x_j, t)|, \end{cases}$$

均有上界. 相比之下, 本文仅仅假设  $|\nabla_{xt} f_i(x_i, t)|$  有上界. 所以说, 假设 1 是一个相对宽松的假设. 此外, 文献[27]指出, 在实际系统中, 许多类型的干扰都满足假设 2, 包括恒定的干扰、正弦干扰等. 文献[27-28]中均采用了相似的假设.

在下一章节, 文章提出适用于有向图且代价函数时变的多智能体系统分布式优化算法, 可以实现分布式优化目标(5).

## 3 主要成果

在本节中, 研究基于有向图的多智能体系统分布式时变优化问题. 首先, 设计一个辅助系统, 并基于该辅助系统提出一种新的有限时间分布式优化算法. 该算法不依赖于代价函数的二阶偏导数信息(见第

3.1节),其中二阶偏导数信息包括 $\nabla_{xx}f_i(x_i(t),t)$ 和 $\nabla_{xt}f_i(x_i(t),t)$ .此外,将该算法拓展到具有有向切换拓扑的多智能体系统中(见第3.2节),用以解决多智能体系统有限时间分布式时变优化问题.

### 3.1 适用于有向固定拓扑的有限时间分布式时变优化算法

在本小节,文章提出一种新的不依赖于代价函数二阶偏导数信息的有限时间分布式优化算法,可以在受扰多智能体系统中实现分布式优化目标(5).多智能体系统的通信图假设如下:

**假设3** 多智能体系统的有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$ 是强连通的.

为了实现有限时间分布式时变优化(5),文章提出了如下有限时间分布式优化算法:

**定理1** 在假设1-3下考虑多智能体系统(4),通过部署分布式控制算法(6)-(8)可以在有限时间内实现分布式时变优化目标(5),即

$$u_i(t) = -\eta_1 \operatorname{sgn} \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) \right] - \eta_2 \varphi_i(t), \quad (6)$$

$$\dot{e}_i(t) = \eta_3 \left[ r_i \left( \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_i(t) - \sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_j(t) \right) \right], \quad (7)$$

$$\begin{cases} \varphi_i(t) = \operatorname{sgn} \varepsilon_i(t), \\ \varepsilon_i(t) = \nabla_x f_i(x_i(t), t) - e_i(t), \end{cases} \quad (8)$$

其中: $x_i(t), e_i(t), \varepsilon_i(t), \varphi_i(t)$ 分别是智能体 $i$ 的状态、辅助变量、误差变量和符号变量; $r = [r_1(t) \ r_2(t) \ \cdots \ r_N(t)]^T$ 是图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵 $L$ 的左特征向量.控制器参数需要满足 $\eta_1 \geq (\eta_2 + \bar{q})d_{\max}^{\text{in}} + \kappa_1$ ,  $\eta_2 \geq \rho^{-1}M + \bar{q} + \kappa_2$ ,  $\eta_3 > 0$ ,其中 $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0, d_{\max}^{\text{in}} = \max\{d_1^{\text{in}}, d_2^{\text{in}}, \dots, d_N^{\text{in}}\}$ .此外,辅助变量 $e_i(t)$ 的初始值应当满足 $\sum_{i=1}^N e_i(0) = 0$ .

**证** 证明过程分为两步,分别是 $x(t)$ 的有限时间一致性证明和算法(6)-(8)的有限时间优化.

**步骤1** 首先,定义如下的一致性误差向量:

$$\theta(t) = x(t) - \mathbf{1}_N \otimes x_c(t), \quad (9)$$

其中:向量 $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \cdots \ \theta_N(t)]^T \in \mathbb{R}^N$ ,  $x_c(t) \in \mathbb{R}$ .定义

$$\beta(t) = [\beta_1(t) \ \beta_2(t) \ \cdots \ \beta_N(t)]^T = L\theta(t), \quad (10)$$

则可得

$$\beta(t) = L\theta(t) = Lx(t). \quad (11)$$

根据上述定义,式(6)可以写成

$$\dot{\beta}(t) = L[-\eta_1 \operatorname{sgn} \beta(t) - \eta_2 \varphi(t) + q(t)], \quad (12)$$

其中:符号变量 $\varphi(t) = [\varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \ \cdots \ \varphi_N(t)]^T$ ,未

知干扰 $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \cdots \ q_N(t)]^T$ .定义Lyapunov函数如下:

$$V(\beta(t)) = \sum_{i=1}^N |\beta_i(t)|, \quad (13)$$

故可得

$$\dot{V}(\beta(t)) = \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn} \beta_i(t) \dot{\beta}_i(t). \quad (14)$$

由于式(14)包含符号函数 $\operatorname{sgn} \beta_i(t)$ ,所以零点不是 $\dot{V}(\beta(t))$ 的平凡解.因此,采用文献[25]中的分析方法,定义集合 $\Psi_{\neq} = \{i \in \mathcal{V} : \beta_i(t) \neq 0\}$ 和 $\Psi_0 = \{i \in \mathcal{V} : \beta_i(t) = 0\}$ ,并在Filippov意义下对非连续微分方程及其解进行讨论.考虑Lyapunov函数的Clarke广义梯度可得

$$\partial_C V(\beta(t)) = \mu^T(t), \quad (15)$$

其中 $\mu(t) = [\mu_1(t) \ \mu_2(t) \ \cdots \ \mu_N(t)]^T$ ,且 $\mu_i(t)$ 满足

$$\mu_i(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \beta_i(t), & \text{若 } i \in \Psi_{\neq}, \\ \operatorname{sgn} \beta_i(t), & \text{若 } i \in \Psi_0. \end{cases} \quad (16)$$

注意, $V(\beta(t))$ 是局部Lipshitz连续函数,故根据引理2可知

$$\dot{V}(\beta(t)) \in \sum_{i \in \Psi_{\neq}} \operatorname{sgn} \beta_i(t) \dot{\beta}_i(t) + \sum_{i \in \Psi_0} \operatorname{sgn} \beta_i(t) \dot{\beta}_i(t), \quad (17)$$

其中

$$\operatorname{sgn} \beta_i(t) = \begin{cases} 1, & \beta_i(t) > 0, \\ [-1, 1], & \beta_i(t) = 0, \\ -1, & \beta_i(t) < 0, \end{cases} \quad (18)$$

很明显,如果某一 $\beta_i(t) = 0$ 成立,则其微分 $\dot{\beta}_i(t)$ 在Filippov意义下存在且取0.因此,式(17)可以写为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\beta(t)) &\in \\ &\sum_{i \in \Psi_{\neq}} \operatorname{sgn} \beta_i(t) \dot{\beta}_i(t) + \\ &\sum_{i \in \Psi_0} \operatorname{sgn} \beta_i(t) \dot{\beta}_i(t) = \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn} \beta_i(t) \dot{\beta}_i(t) = \\ &\operatorname{sgn}(\beta(t))^T L[-\eta_1 \operatorname{sgn} \beta(t) - \eta_2 \varphi(t) + q(t)]. \end{aligned} \quad (19)$$

显然,当 $\beta(t) \neq 0_N$ 时,根据引理3可知

$$\begin{cases} V(\beta(t)) > 0, \\ \dot{V}(\beta(t)) \leq -[\eta_1 - (\eta_2 + \bar{q})d_{\max}^{\text{in}}] \leq -\kappa_1 \end{cases} \quad (20)$$

成立;当 $\beta(t) = 0_N$ 时,

$$\begin{cases} V(\beta(t)) = 0, \\ \dot{V}(\beta(t)) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

成立.因此,当 $\eta_1 \geq (\eta_2 + \bar{q})d_{\max}^{\text{in}} + \kappa_1$ 时,多智能体

系统的一致性可以在有限时间 $t_x$ 内实现, 即 $x(t) = 1_N \otimes x_c(t)$ 可以在有限时间 $t_x$ 内实现.

**步骤 2** 在本步骤中, 证明 $\sum_{i=1}^N \nabla_x f_i(x_i(t), t)$ 可以在有限时间内收敛到0. 当 $t > t_x$ 时, 式(6)可以写作

$$\dot{x}_i(t) = -\eta_2 \text{sgn} \varepsilon_i(t) + q_i(t). \quad (22)$$

选择Lyapunov函数为

$$V(\varepsilon_i(t)) = \sum_{i=1}^N |\varepsilon_i(t)|, \quad (23)$$

故可得

$$\dot{V}(\varepsilon_i(t)) = \sum_{i=1}^N \text{sgn} \varepsilon_i(t) \dot{\varepsilon}_i(t). \quad (24)$$

采用与步骤1中相似的分析方法, 根据式(7)–(8)可得

$$\begin{aligned} & \text{sgn} \varepsilon_i(t) \dot{\varepsilon}_i(t) = \\ & \text{sgn} \varepsilon_i(t) [\nabla_{xx} f_i(x_i(t), t) \dot{x}_i(t) + \\ & \nabla_{xt} f_i(x_i(t), t) - \dot{e}_i(t)] = \\ & \text{sgn} \varepsilon_i(t) [\nabla_{xx} f_i(x_i(t), t) (-\eta_2 \text{sgn} \varepsilon_i(t) + \\ & q_i(t)) + \nabla_{xt} f_i(x_i(t), t) - \\ & \eta_3 r_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \text{sgn} \varepsilon_j(t) + \\ & \eta_3 r_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \text{sgn} \varepsilon_j(t)] \leq \\ & -\rho(\eta_2 - \bar{q}) + M. \end{aligned} \quad (25)$$

显然, 若 $\eta_2 \geq \rho^{-1}M + \bar{q} + \kappa_2$ ,  $\varepsilon(t)$ 可以在有限时间内收敛到 $0_N$ . 由于 $\sum_{i=1}^N e_i(0) = 0$ , 且由式(7)可知 $\sum_{i=1}^N e_i(t) = 0$ 对任意时刻都成立. 因此,  $\varepsilon(t)$ 在有限时间内收敛到0意味着 $\sum_{i=1}^N \nabla_x f_i(x_i(t), t)$ 可以在有限时间内收敛到0. 证毕.

**注 2** 对于分布式优化算法(6)–(8), 辅助变量 $e_i(t)$ 的初始值应当满足 $\sum_{i=1}^N e_i(0) = 0$ , 该条件用以保证算法可以实现最优, 即代价函数的梯度和为0. 最简单的初值设置方式就是将每一个智能体的辅助变量 $e_i(t)$ 的初值均设置为0. 此外, 当图 $G(t)$ 为无向图的或者有向平衡图时, 由于 $1_N^T L = 0_N$ 成立, 所以此时不需要参数 $r_i$ .

### 3.2 适用于有向切换拓扑的有限时间分布式时变优化算法

本小节提出一种新的适用于有向切换拓扑的有限时间分布式时变优化算法, 多智能体系统的网络拓扑假设如下:

**假设 4** 多智能体系统具有切换有向拓扑 $\mathcal{G}(t) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(t), A(t))$ , 且 $\mathcal{G}(t)$ 在任意时刻都是强连通的.

此外, 在提出算法前, 还需要介绍如下引理:

**引理 5**<sup>[29]</sup> 考虑动态系统 $\dot{\zeta}(t) = u(t) \in \mathbb{R}^N$ , 令

$$\begin{cases} \bar{\zeta}(t) = \{i \in \mathcal{V} | \zeta_i(t) = \max\{\zeta_1(t), \dots, \zeta_N(t)\}\}, \\ \underline{\zeta}(t) = \{i \in \mathcal{V} | \zeta_i(t) = \min\{\zeta_1(t), \dots, \zeta_N(t)\}\} \end{cases} \quad (26)$$

为 $\zeta(t)$ 的最大状态变量和最小状态变量的索引集合, 则状态变量之间的最大误差为

$$\Delta(t) \triangleq \zeta_{i_{\max}}(t) - \zeta_{i_{\min}}(t), \quad (27)$$

其中:  $i_{\max} \in \bar{\zeta}(t)$ ,  $i_{\min} \in \underline{\zeta}(t)$ . 如果能够通过设计控制器输入 $u_i(t)$ 使得 $\dot{\Delta}(t) \leq -c$ , 其中 $c \in \mathbb{R}^{++}$ , 那么,  $\zeta(t)$ 可以在有限时间达到一致.

为了具有有向切换拓扑的多智能体系统有限时间分布式时变优化(5), 首先, 利用智能体 $i$ 的出度信息<sup>[30]</sup>设计一个辅助系统, 然后, 基于该辅助系统提出如下有限时间分布式优化算法.

**定理 2** 在假设1, 2和4下考虑多智能体系统(4), 通过部署分布式控制算法(28)–(30)可以在有限时间内实现分布式时变优化目标(5).

$$\begin{aligned} u_i(t) = & \\ & -\eta_4 \text{sgn} \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) (x_i(t) - x_j(t)) \right] - \eta_5 \varphi_i(t), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\dot{e}_i(t) = \eta_6 \left[ \sum_{j=1}^N a_{ji}(t) \varphi_j(t) - \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \varphi_j(t) \right], \quad (29)$$

$$\begin{cases} \varphi_i(t) = \text{sgn} \varepsilon_i(t), \\ \varepsilon_i(t) = \nabla_x f_i(x_i(t), t) - e_i(t), \end{cases} \quad (30)$$

其中:  $x_i(t)$ ,  $e_i(t)$ ,  $\varepsilon_i(t)$ ,  $\varphi_i(t)$ 分别是智能体 $i$ 的状态、辅助变量、误差变量和符号变量. 参数满足 $\eta_4 \geq \eta_5 + \bar{q} + \kappa_1$ ,  $\eta_5 \geq \rho^{-1}M + \bar{q} + \kappa_2$ ,  $\eta_6 > 0$ , 其中:  $\kappa_1 > 0$ ,  $\kappa_2 > 0$ . 此外, 辅助变量 $e_i(t)$ 的初始值应当满足 $\sum_{i=1}^N e_i(0) = 0$ .

**证** 证明过程由两个步骤组成, 包括 $x(t)$ 的有限时间一致性证明和算法(28)–(30)的有限时间优化.

**步骤 1** 在本步骤中, 文章证明 $x(t)$ 能够在有限时间内达到一致性. 首先, 定义最大状态变量和最小状态变量的索引集如下:

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = \{i \in \mathcal{V} | x_i(t) = \max\{x_1(t), \dots, x_N(t)\}\}, \\ \underline{x}(t) = \{i \in \mathcal{V} | x_i(t) = \min\{x_1(t), \dots, x_N(t)\}\}, \end{cases} \quad (31)$$

两个状态变量之间的最大误差为

$$\Delta_x(t) \triangleq x_{i_{\max}}(t) - x_{i_{\min}}(t), \quad (32)$$

其中:  $i_{\max} \in \bar{x}(t)$ 为最大状态值的索引,  $i_{\min} \in \underline{x}(t)$ 为最小状态值的索引. 由于 $i_{\max} \in \underline{x}(t)$ 和 $i_{\min} \in \bar{x}(t)$ 都代表着 $x(t)$ 的一致性, 所以只需要研究 $i_{\max} \notin \underline{x}(t)$

且  $i_{\min} \notin \bar{x}(t)$  的情况. 很明显, 根据式(28)可知

$$\begin{cases} \dot{x}_{i_{\max}}(t) \leq -\eta_4 + \eta_5 + \bar{q}, \\ \dot{x}_{i_{\min}}(t) \geq \eta_4 - \eta_5 - \bar{q}, \end{cases} \quad (33)$$

故可知  $\dot{\Delta}_x(t) \leq 2(-\eta_4 + \eta_5 + \bar{q}) \leq -2\kappa_1$ . 因此, 由引理5可知状态  $x(t)$  可以在有限时间  $t_x$  内达到收敛.

**步骤2** 在本步骤, 文章证明了  $\sum_{i=1}^N \nabla_x f_i(x_i(t), t)$  可以在有限时间内收敛到0. 当  $t > t_x$  时, 式(28)可以写作

$$\dot{x}_i(t) = -\eta_5 \operatorname{sgn} \varepsilon_i(t) + q_i(t), \quad (34)$$

选择Lyapunov函数为

$$V(\varepsilon_i(t)) = \sum_{i=1}^N |\varepsilon_i(t)|, \quad (35)$$

故可得

$$\dot{V}(\varepsilon_i(t)) = \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn} \varepsilon_i(t) \dot{\varepsilon}_i(t). \quad (36)$$

采用与定理1证明中步骤2相似的分析方法, 根据式(29)–(30)可得

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn} \varepsilon_i(t) \dot{\varepsilon}_i(t) = \\ & \operatorname{sgn} \varepsilon_i(t) [\nabla_{xx} f_i(x_i(t), t) \dot{x}_i(t) + \\ & \nabla_{xt} f_i(x_i(t), t) - \dot{e}_i(t)] = \\ & \operatorname{sgn} \varepsilon_i(t) [\nabla_{xx} f_i(x_i(t), t) (-\eta_5 \operatorname{sgn} \varepsilon_i(t) + \\ & q_i(t)) + \nabla_{xt} f_i(x_i(t), t)] + \\ & \eta_6 [d_i^{\text{out}}(t) - d_i^{\text{in}}(t)] \leq \\ & -\underline{\rho}(\eta_5 - \bar{q}) + M + \eta_6 [d_i^{\text{out}}(t) - d_i^{\text{in}}(t)], \end{aligned} \quad (37)$$

故可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon_i(t)) &= \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn} \varepsilon_i(t) \dot{\varepsilon}_i(t) \leq \\ & -N[\underline{\rho}(\eta_5 - \bar{q}) + M] < -N\kappa_2. \end{aligned} \quad (38)$$

显然, 若  $\eta_5 \geq \underline{\rho}^{-1}M + \bar{q} + \kappa_2$ , 则  $\varepsilon(t)$  可以在有限时间内收敛到0. 由于  $\sum_{i=1}^N e_i(0) = 0$ , 且由式(29)可知  $\sum_{i=1}^N e_i(t) = 0$  对任意时刻都成立. 因此,  $\varepsilon(t)$  在有限时间内收敛到0意味着  $\sum_{i=1}^N \nabla_x f_i(x_i(t), t)$  可以在有限时间内收敛到0. 证毕.

**注3** 对于分布式优化算法(28)–(30), 辅助变量  $e_i(t)$  的初始值同样需要满足  $\sum_{i=1}^N e_i(0) = 0$ , 用以保证算法可以实现全局最优. 当图  $\mathcal{G}(t)$  为无向切换图的或者是有向平衡切换图的时候, 由于对于每一个智能体  $i$  均存在  $d_i^{\text{in}}(t) = d_i^{\text{out}}(t)$ , 因此不需要智能体的出度信息. 此外, 注意到算法(6)–(8)中的参数  $\eta_1$  的选取依赖于最大入度值信息, 且辅助系统(7)依赖于拉普拉斯矩阵的左特征向量, 故算法(6)–(8)不是一种完全分

布式优化算法. 而算法(28)–(30)针对这一点进行了改进, 消除了对于图的全局信息的依赖.

### 4 仿真实例

在本节中, 文章对两种新提出的有限时间分布式时变优化算法(6)–(8)和(28)–(30)分别进行仿真验证. 其中多智能体系统的固定有向图如图1所示, 有向切换图如图2所示. 每个智能体  $i$  受到的干扰  $d_i(t) = \sin(i \times t), i = 1, 2, \dots, 6$ .

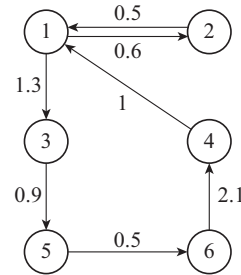


图1 多智能体系统的固定有向图

Fig. 1 The fixed digraphs of multi-agent systems

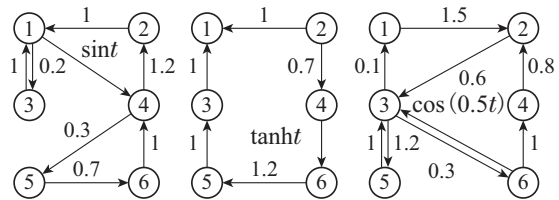


图2 多智能体系统的有向切换图

Fig. 2 The switching digraphs of multi-agent systems

此外, 每个智能体  $i$  的时变代价函数为

$$\begin{aligned} f_1(x_1, t) &= 2x_1^2 + (\sin t + 7)x_1 + 13, \\ f_2(x_2, t) &= (\sin(0.1t) + 1)x_2^2 + 10x_2 + 6, \\ f_3(x_3, t) &= 3x_3^2 + 2 \cos(0.5t)x_3 - 11, \\ f_4(x_4, t) &= 2x_4^2 + 13x_4 + 2, \\ f_5(x_5, t) &= x_5^2 + 2x_5 + \tanh(0.1t)e^{0.1x_5}, \\ f_6(x_6, t) &= \tanh(t + 0.3)x_6^2 + 6x_6 + 8. \end{aligned}$$

#### 4.1 有向固定拓扑下的有限时间分布式时变优化算法仿真

在本小节, 文章在固定有向图(见图1)下验证有限时间分布式优化算法(6)–(8). 控制器参数设置为  $\eta_1 = 12, \eta_2 = 5, \eta_3 = 7, r_1 = 0.3593, r_2 = 0.2994, r_3 = 0.2764, r_4 = 0.1711, r_5 = 0.3992, r_6 = 0.7185$ . 系统初始状态为  $x(0) = [3 \ -7.3 \ -1.1 \ 6.2 \ -1.5 \ 12]^T$ , 辅助变量初始值为  $e(0) = [-3 \ 3 \ 10 \ -5 \ -1.5 \ -3.5]^T$ . 在上述仿真条件下, 状态  $x(t)$  和辅助变量  $e(t)$  的曲线如图3和图4所示. 此外, 误差变量  $\varepsilon(t)$  与梯度加和  $\sum_{i=1}^6 \nabla_x f_i(x_i(t), t)$  的曲线如图5和图6所示. 通过仿真结果可知,  $x(t)$  可以在有限时间内收敛到一致

值 $x^*(t)$ . 此外, 从图6可知,  $\sum_{i=1}^6 \nabla_x f_i(x_i(t), t)$ 可以在有限时间内收敛到0, 这说明 $x^*(t)$ 是最优轨迹. 因此, 分布式算法(6)–(8)可以实现有限时间分布式时变优化(5).

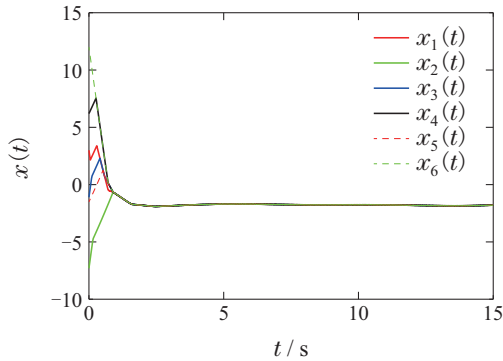


图 3 每个智能体*i*的状态变量 $x_i(t)$ 曲线

Fig. 3 The trajectories of state variables  $x_i(t)$  for each agent  $i$

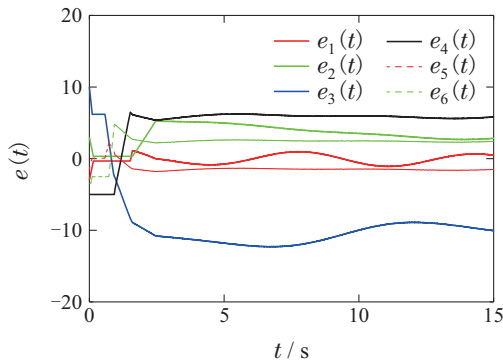


图 4 每个智能体*i*的辅助变量 $e_i(t)$ 曲线

Fig. 4 The trajectories of auxiliary variables  $e_i(t)$  for each agent  $i$

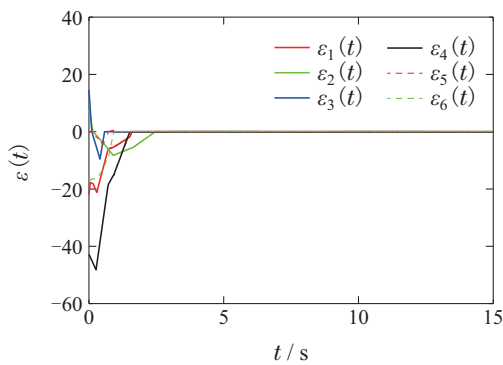


图 5 每个智能体*i*的误差变量 $\varepsilon_i(t)$ 曲线

Fig. 5 The trajectories of error variables  $\varepsilon_i(t)$  for each agent  $i$

#### 4.2 有向切换拓扑下的有限时间分布式时变优化算法仿真

在本小节, 文章在有向切换图(见图2)下验证有限时间分布式优化算法(28)–(30). 控制器参数设置为 $\eta_4 = 11, \eta_5 = 7, \eta_6 = 6$ . 图7和图8展示的是状态 $x(t)$

和辅助变量 $e(t)$ 的曲线, 其中系统的初始状态为 $x(0) = [2.9 \ 5.2 \ -3 \ 8.2 \ -0.7 \ 15]^T$ , 辅助变量初始值为 $e(0) = [0 \ 12 \ -3 \ -1 \ -5.5 \ -2.5]^T$ . 此外, 误差变量 $\varepsilon(t)$ 与梯度和 $\sum_{i=1}^6 \nabla_x f_i(x_i(t), t)$ 的曲线如图9和图10所示. 通过上述仿真图可知,  $x(t)$ 在有限时间内一致收敛到曲线 $x^*(t)$ . 此外, 图10表明 $\sum_{i=1}^6 \nabla_x f_i(x_i(t), t)$ 可以在有限时间内收敛到0, 这也说明 $x^*(t)$ 是全局最优轨迹. 由此可以说明, 有限时间分布式优化算法(28)–(30)是有效的.

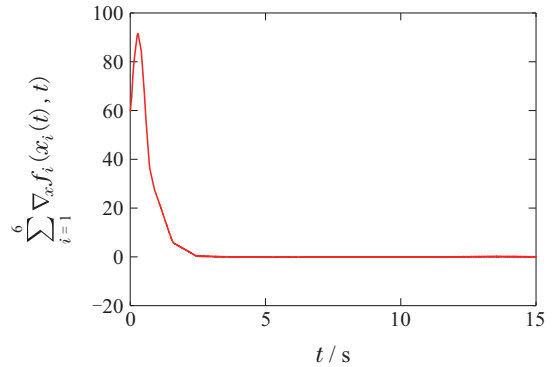


图 6 多智能体系统代价函数的梯度加和的曲线

Fig. 6 The trajectory of gradient sum of cost functions for multi-agent systems

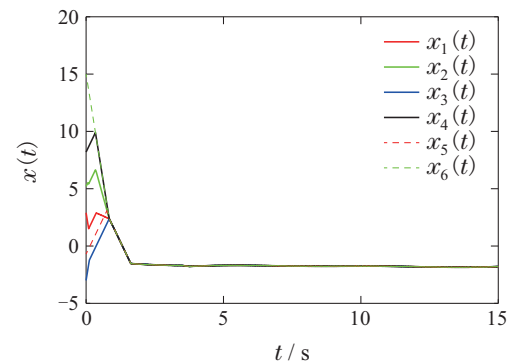


图 7 每个智能体*i*的状态变量 $x_i(t)$ 曲线

Fig. 7 The trajectories of state variables  $x_i(t)$  for each agent  $i$

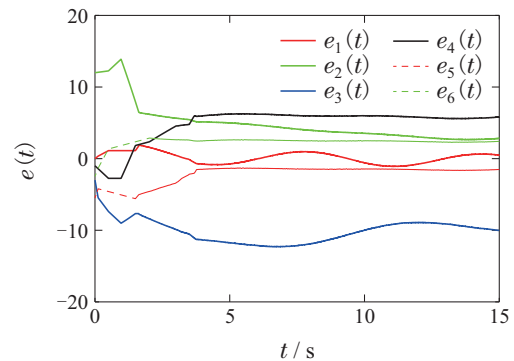


图 8 每个智能体*i*的辅助变量 $e_i(t)$ 曲线

Fig. 8 The trajectories of auxiliary variables  $e_i(t)$  for each agent  $i$



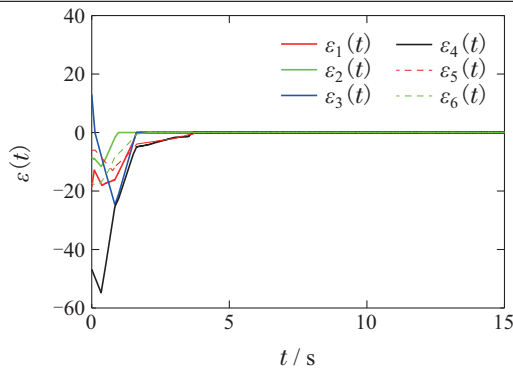
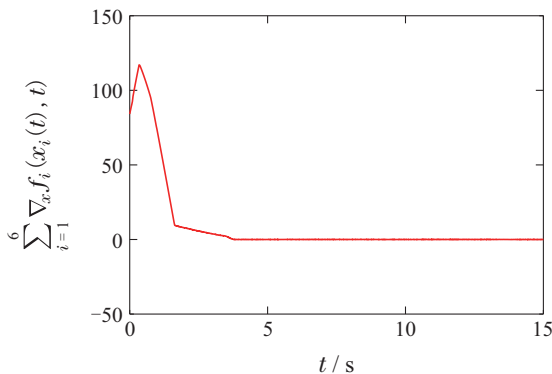
图9 每个智能体 $i$ 的误差变量 $\varepsilon_i(t)$ 曲线Fig. 9 The trajectories of error variables  $\varepsilon_i(t)$  for each agent  $i$ 

图10 多智能体系统代价函数的梯度加和的曲线

Fig. 10 The trajectory of gradient sum of cost functions for multi-agent systems

## 5 结论

本文在有向图下研究了受扰多智能体系统有限时间分布式时变优化问题。首先,基于有限时间稳定性理论和图论提出了一种适用于固定有向图的有限时间分布式时变优化算法;然后,本文对新提出的算法进行了扩展,用以解决具有有向切换拓扑的受扰多智能体系统有限时间分布式时变优化问题。两种新提出的分布式算法均可以对多智能体系统中的干扰进行抑制。此外,新提出的算法不需要使用Hessian信息和梯度对时间的偏导数信息,这降低了计算的复杂度;最后,通过仿真实验对新提出的两种分布式时变优化算法进行了验证,实验结果也证明了算法的有效性。

## 参考文献:

[1] ZHENG Y, LIU Q, ZHAO J. A review of distributed optimization: Problems, models and algorithms. *Neurocomputing*, 2022, 483: 446 – 459.

[2] ZHANG Zeyu, ZHANG Xiaoshun, YU Tao. Collaborative consensus algorithm for automatic generation control in an islanded smart distribution grid. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(5): 599 – 607.  
(张泽宇, 张孝顺, 余涛. 孤岛智能配电网下的快速自动发电控制机组一致性协同控制算法. *控制理论与应用*, 2016, 33(5): 599 – 607.)

[3] XU Y L, YANG Z Y, GU W, et al. Robust real-time distributed optimal control based energy management in a smart grid. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2017, 8(4): 1568 – 1579.

[4] SUN Miaoping, JIANG Bo. Design of distributed power economic dispatch algorithm considering communication delay. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(11): 2303 – 2311.  
(孙妙平, 姜波. 考虑通信时滞的分布式电力经济调度算法设计. *控制理论与应用*, 2020, 37(11): 2303 – 2311.)

[5] VIEGAS D, BATISTA P, OLIVEIRA P, et al. Distributed controller design and performance optimization for discrete-time linear systems. *Optimal Control Application & Methods*, 2021, 42(1): 126 – 143.

[6] ALAVIANI S S, ELIA N. Distributed multiagent convex optimization over random digraphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(3): 986 – 998.

[7] GHARESIFARD B, CORTES J. Distributed continuous-time convex optimization on weight-balanced digraphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(3): 781 – 786.

[8] LU J, TANG C. Zero-gradient-sum algorithms for distributed convex optimization: The continuous-time case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(9): 2348 – 2354.

[9] WANG X F, TEEL A, LIU K Z, et al. Stability analysis of distributed convex optimization under persistent attacks: A hybrid systems approach. *Automatica*, 2020, 111: 108607.

[10] WANG X H, HONG Y G, YI P, et al. Distributed optimization design of continuous-time multiagent systems with unknown-frequency disturbances. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(8): 2058 – 2066.

[11] ZHU Wenbo, WANG Qingling. Gradient estimations based distributed finite-time optimization for multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(4): 615 – 623.  
(朱文博, 王庆领. 基于梯度估计的多智能体系统有限时间分布式优化. *控制理论与应用*, 2023, 40(4): 615 – 623.)

[12] ZHONG Z J, ZHAO Y, XIAN C X, et al. Finite-time distributed optimal tracking for multiple heterogeneous linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 68(4): 1258 – 1262.

[13] MA W L, FU M Y, CUI P, et al. Finite-time average consensus based approach for distributed convex optimization. *Asian Journal of Control*, 2020, 22(1): 323 – 333.

[14] HU Z L, YANG J Y. Distributed optimal formation algorithm for multi-satellites system with time-varying performance function. *International Journal of Control*, 2020, 93(5): 1015 – 1026.

[15] WU Z Z, LI Z K, YU J Z. Designing zero-gradient-sum protocols for finite-time distributed optimization problem. *IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics-Systems*, 2022, 52(7): 4569 – 4577.

[16] MAYANK B, KUNAL G, DIMITRA P, et al. Robust distributed fixed-time economic dispatch under time-varying topology. *IEEE Control Systems Letter*, 2021, 5(4): 1183 – 1188.

[17] HU Z L, YANG J Y. Distributed finite-time optimization for second order continuous-time multiple agents systems with time-varying cost function. *Neurocomputing*, 2018, 287: 173 – 184.

[18] LI Y, HE X, XIA D W. Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems with time-varying objective function. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, 32(11): 6523 – 6538.

[19] HONG H F, BALDI S, YU W W, et al. Distributed time-varying optimization of second-order multiagent systems under limited interaction ranges. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(12): 13874 – 13886.

[20] WANG Q L, SUN C Y. Distributed asymptotic consensus in directed networks of nonaffine systems with nonvanishing disturbance. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2021, 8(6): 1133 – 1140.

[21] WANG Qingling, WANG Xuerao. Adaptive NN consensus of nonlinear multi-agent systems under switching topologies. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(4): 633 – 640.  
(王庆领, 王雪娆. 切换拓扑下非线性多智能体系统自适应神经网络一致性. *控制理论与应用*, 2023, 40(4): 633 – 640.)



- [22] HONG Y, HUANG J, XU Y. On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(2): 305 – 309.
- [23] CLARKE F. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York: Wiley-Interscience, 1983.
- [24] PADEN B, SASTRY S. A calculus for computing filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1987, 34(1): 73 – 82.
- [25] FRANCESCHELLI M, PISANO A, GIUA A, et al. Finite-time consensus with disturbance rejection by discontinuous local interactions in directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(4): 1133 – 1138.
- [26] ZHU Y, YU W W, WEN G H, et al. Continuous-time coordination algorithm for distributed convex optimization over weight-unbalanced directed networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 66(7): 1202 – 1206.
- [27] FENG Z, HU G Q, CASSANDRAS C G. Finite-time distributed convex optimization for continuous-time multiagent systems with disturbance rejection. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2020, 7(2): 686 – 698.
- [28] HUA Y Z, DONG X W, HAN L, et al. Finite-time time-varying formation tracking for high-order multiagent systems with mismatched disturbances. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(10): 3795 – 3803.
- [29] LI C, QU Z. Distributed finite-time consensus of nonlinear systems under switching topologies. *Automatica*, 2014, 50(6): 1626 – 1631.
- [30] YUE D, BALDI S, CAO J D, et al. Distributed adaptive optimization with weight-balancing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(4): 2068 – 2075.

#### 作者简介:

**朱文博** 博士研究生, 目前研究方向为多智能体系统分布式优化, E-mail: wb\_zhu@seu.edu.cn;

**张师峥** 硕士研究生, 目前研究方向为多智能体系统协同控制、强化学习, E-mail: zhangshizheng@seu.edu.cn;

**王庆领** 教授, 目前研究方向为多智能体系统自适应控制、分布式协同控制, E-mail: qlwang@seu.edu.cn.