

状态触发随机脉冲布尔控制网络的能控性

周俊岚, 周荣佩[†]

(南昌大学 信息工程学院, 江西 南昌 330031)

摘要: 本文基于混杂指标模型, 研究了一类由状态触发的随机脉冲布尔控制网络的能控性. 在该模型下, 脉冲触发依赖于当前时刻的状态, 而网络的状态受到跳变概率因子的调控. 首先运用矩阵半张量积工具, 得到随机脉冲布尔控制网络的混杂指标模型的代数形式. 为避免产生芝诺现象, 本文引入了前向完备性, 并推导了网络前向完备的充要条件. 基于能控性的定义, 通过构造新的矩阵幂运算, 导出最大状态转移概率矩阵, 进而得到随机脉冲布尔控制网络的能控性的等价判据. 最后通过仿真算例验证了所得结果的有效性.

关键词: 布尔控制网络; 能控性; 状态触发的随机脉冲; 矩阵半张量积

引用格式: 周俊岚, 周荣佩. 状态触发随机脉冲布尔控制网络的能控性. 控制理论与应用, 2025, 42(4): 787–795

DOI: 10.7641/CTA.2023.30171

Controllability of state-triggered random impulsive Boolean control networks

ZHOU Jun-lan, ZHOU Rong-pei[†]

(School of Information Engineering, Nanchang University, Nanchang Jiangxi 330031, China)

Abstract: Based on a hybrid-index model, this paper investigates the controllability of a class of random impulsive Boolean control networks triggered by states. In this model, the condition of impulse triggering depends on the current state, while the state of the network is regulated by the factor of jumping probability. Firstly, using the semi-tensor product of matrices, we obtain the algebraic form of the hybrid-index model for random impulse Boolean control networks. In order to avoid Zeno phenomenon, this paper introduces forward completeness and derives the necessary and sufficient condition for the forward completeness of the network. On the basis of the definition of controllability, a new matrix power operation is constructed to derive the maximum state transfer probability matrix, and then an equivalent criterion for the controllability of the random impulse Boolean control network is obtained. Finally, the validity of the results is verified by simulations.

Key words: Boolean control networks; controllability; state-triggered random impulses; semi-tensor product of matrices

Citation: ZHOU Junlan, ZHOU Rongpei. Controllability of state-triggered random impulsive Boolean control networks. *Control Theory & Applications*, 2025, 42(4): 787–795

1 引言

布尔网络 (Boolean networks, BNs) 是一类简单的逻辑动态系统, 由Kauffman^[1]于1969年首次提出. 在布尔网络中, 基因间的相互作用可以用布尔函数来描述, 节点的当前状态由与其过去状态相关联的布尔函数确定. 布尔网络有着简单、计算成本低等特点, 经过Albert^[2], Shmulevich^[3], Farrow^[4]以及相关学者的发展, 布尔网络已成为用于描述、分析、模拟复杂非线性生物系统的强有力工具.

具有外部输入的布尔网络被称为布尔控制网络 (Boolean control networks, BCNs)^[5]. 布尔控制网络不

仅具有布尔网络的特性, 还可以通过改变输入实现一定的调控功能. 在过去的几十年里, 布尔网络和布尔控制网络均受到了相关领域研究者的广泛关注. 然而, 由于在逻辑系统的处理上缺乏强大的数学工具, 此类研究在很长一段时间内都受到了一定程度的限制. 直到2009年中科院程代展研究员提出了一种新的矩阵乘法——矩阵半张量积 (semi-tensor product of matrices, STP)^[6]. 矩阵半张量积可实现两个任意维度矩阵的相乘, 并能将布尔网络的逻辑表达式等效转换为代数形式. 基于该方法可解决如布尔控制网络的能控性与能观性^[7–9]、稳定性^[10–13]、同步问题^[14–16]、系统的

收稿日期: 2023–03–28; 录用日期: 2023–12–27.

[†]通信作者. E-mail: zhourp@ncu.edu.cn; Tel.: +86 18711090028.

本文责任编辑: 左志强.

国家自然科学基金项目(62103178)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62103178).

分解与解耦^[17-20]、最优控制^[21-23]等经典控制问题。

在生物系统和细胞网络中,由于节点之间相互联系的突然变化或网络中环境的突然变化,许多系统或网络的状态可能会发生突变^[24]。这种状态突变可在一定的时间内由特定的事件或状态触发。例如在增添某类药剂后,细菌的数目会发生突然变化,或者在基因调控网络中,单个细胞的脱氧核糖核酸(DNA)的数量在细胞生长过程中恒定,但在细胞分裂S期翻倍,又在每个子细胞分裂后立即减半。当在一个相对较大的时间尺度上观测时,此类行为都可以被视作系统上一个理想的脉冲扰动。近年来,具有脉冲效应的布尔控制网络一直是相关领域的研究热点^[25-27]。

脉冲不仅可以通过时间和状态触发,还可以通过环境因素触发^[28-30],环境因素的不确定性为状态触发的脉冲增加了随机性。综述大量有关脉冲布尔网络的研究文献,发现其刻画模型主要分为传统的基于时间触发的脉冲布尔网络模型^[31-33]和基于混杂指标的脉冲布尔网络模型^[34-37]。相较于时间触发模型,混杂指标模型不仅能有效刻画脉冲过程的瞬时性,而且能表征更为复杂的动力学特性。在混杂指标模型中,网络的动态行为有向前步进和瞬时跳变两种。将所有能够触发跳变行为的状态集合称为跳变集,所有能够触发步进行为的状态集合称为步进集。一般来说,状态空间可分为步进集和跳变集这两个不相交的子集,只有当状态落在跳变集中时会触发脉冲。然而在基因调控网络的真实环境中,由于基因表达的随机性和不可避免的噪声干扰,网络处于任意状态下都会以一定概率发生步进或跳变行为。本文基于发生跳变行为概率的大小将状态分为3类,即跳变概率为零的完全步进状态集合、跳变概率为1的完全跳变状态集合和跳变概率介于两者之间的重叠状态集合。当网络处于重叠状态时,步进行为和跳变行为都有一定概率发生,即步进集和跳变集之间存在交集,从而引出状态触发的随机脉冲布尔网络(state-triggered random impulsive BNs, SRIBNs)^[35]。在混杂指标模型中,节点状态由 $X(t, j)$ 定义,其中指标 t 和 j 分别表示系统的时间步长和脉冲数量。当状态发生跳变行为时,触发一次脉冲,时间步长 t 不变,脉冲数量 j 递增为 $j + 1$ 。当状态发生步进行为时,系统没有发生脉冲,则脉冲数量 j 不变,时间步长 t 递增为 $t + 1$ 。因此,该模型不仅可以体现状态触发脉冲的特性,而且可以直观地表征脉冲行为的瞬时性。

能控性是控制系统理论中的一个基本概念,主要考察系统在控制作用下状态向量的转移能力。如果对状态触发的随机脉冲布尔网络外加控制输入,可以得到状态触发的随机脉冲布尔控制网络(state-triggered random impulsive BCNs, SRIBCNs)。基于时间触发脉冲布尔网络的能控性已取得了较为成熟的研究结果,

Liu等^[32]研究了一类含有脉冲效应和禁止状态的布尔网络能控性问题,利用矩阵半张量积将分段脉冲布尔网络转化为统一的脉冲离散时间系统,基于构造的能控性矩阵得到了网络能控的充要条件;Chen等^[33]分别讨论了脉冲布尔网络在网络化控制和自由控制序列下的能控性问题,基于状态转移矩阵给出了两种能控性问题的等价判据。然而针对基于混杂指标脉冲布尔网络的能控性分析却仍是一个亟待解决的难题。由于这两类模型之间存在较大差异,基于时间触发脉冲布尔网络的能控性研究结果并不能直接应用于基于混杂指标脉冲布尔网络的能控性分析。

无数个脉冲行为在某一个瞬时时刻连续发生的现象称为芝诺现象,这表明当前动态系统不能向前演化,而是在某个时刻不停跳跃,出现紊乱。显然,一个实用的系统不能存在芝诺现象。为了避免芝诺行为的发生,本文引入了前向完备性的概念。

本文基于混杂指标模型分析状态触发脉冲布尔控制网络的能控性,利用可行控制路径方法,将状态间的能控性问题转化为状态间可行控制路径的存在性问题,进一步利用构造的矩阵幂运算方法推导出网络能控的充分必要条件。最后基于数值算例和生物学实例验证了本文结果的有效性。

本文其余内容的结构安排如下:第2部分列出一些预备知识并提出问题;第3部分研究了状态触发的随机脉冲布尔控制网络在控制作用下的能控性问题,并给出本文的主要结果;第4部分通过具体的例子验证得到结果的正确性和有效性;第5部分给出本文的简要结论。

2 预备知识和问题提出

2.1 预备知识

为了便于叙述及查阅,在此列出本文所用到的一些符号及其说明:

- 1) \mathcal{D} : 逻辑域 $\{0, 1\}$, $\mathcal{D}^n := \underbrace{\mathcal{D} \times \cdots \times \mathcal{D}}_n$;
- 2) \mathbb{N}, \mathbb{Z}^+ : 自然数、正整数的集合;
- 3) $[n : m]$: 大于等于 n , 小于等于 m 的整数;
- 4) I_n : $n \times n$ 的单位矩阵;
- 5) δ_n^i : I_n 的第 i 列;
- 6) Δ_n : I_n 的列的集合;
- 7) $\mathcal{L}_{n \times m}$: $n \times m$ 的逻辑矩阵;
- 8) $\mathcal{B}_{n \times m}$: $n \times m$ 的布尔矩阵;
- 9) $\text{Col}_i(A)$: 矩阵 A 的第 i 列;
- 10) $\text{Col}(A)$: 矩阵 A 的列的集合;
- 11) $\text{Row}_i(A)$: 矩阵 A 的第 i 行;
- 12) $[A]_{i,j}$: 矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素;
- 13) A^T : 矩阵 A 的转置;
- 14) $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$: 集合 $\{x \in \mathcal{M} \mid x \notin \mathcal{N}\}$;

- 15) \otimes : 克罗内克(Kronecker)积;
- 16) \ltimes : STP;
- 17) $\sup\{A\}$: 集合 A 的上确界;
- 18) $\max\{a, b\}$: 取元素 a 和 b 中的较大值;
- 19) $\text{diag}(\mathbf{x})$: 以向量 \mathbf{x} 的元素为主对角线元素生成的对角矩阵.

定义 1^[6] 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}_{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}_{p \times q}$, 则矩阵 A 与矩阵 B 的 STP 定义为

$$A \ltimes B := (A \otimes I_{l_n})(B \otimes I_{l_p}).$$

其中: l 为 n 和 p 的最小公倍数, \otimes 表示矩阵的克罗内克积. 传统的矩阵乘积 AB 是 $A \ltimes B$ 中 $n = p$ 的特殊情况.

引理 1^[6] $l(X_1, X_2, \dots, X_k)$ 表示一个逻辑函数, 任意该形式的逻辑函数都可由多元线性形式 $l(x_1, x_2, \dots, x_k) = L \ltimes x_1 \ltimes x_2 \ltimes \dots \ltimes x_k$ 表示. 其中: $x_i \in \Delta$ 是逻辑变量 $X_i \in \mathcal{D}$, $i \in [1 : k]$ 的向量形式, $L \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$ 是 l 的结构矩阵, 由 l 唯一确定.

定义 2^[6] 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}_{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}_{m \times n}$, 定义矩阵运算 $C := A \vee B \in \mathbb{R}_{m \times n}$, 其中 C 的元素满足 $[C]_{i,j} = \max\{[A]_{i,j}, [B]_{i,j}\}$, $\forall i \in [1 : m], j \in [1 : n]$.

2.2 随机脉冲布尔控制网络的混杂指标模型

如果一个布尔控制网络具有 n 个节点, m 个控制输入, 那么它的第 i 个节点的状态可以被描述为

$$X_i(t+1) = f_i[X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t); U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)], \quad (1)$$

其中: $X_i \in \mathcal{D} (i \in [1 : n])$ 为第 i 个节点的状态变量, $U_k \in \mathcal{D} (k \in [1 : m])$ 为第 k 个控制变量; $f_i : \mathcal{D}^{m+n} \rightarrow \mathcal{D} (i \in [1 : n])$ 是一个逻辑函数. 为了区分系统的脉冲过程与非脉冲过程, 引入混杂指标模型. 一个状态触发的脉冲布尔控制网络可以被描述为如下形式:

$$\begin{cases} X(t+1, j) = f(X(t, j), U(t)), & X(t, j) \in \mathcal{S}, \\ X(t, j+1) = g(X(t, j)), & X(t, j) \in \mathcal{J}, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $X(t, j) = [X_1(t, j) \ X_2(t, j) \ \dots \ X_n(t, j)]^T \in \mathcal{D}^n$, $U(t) = [U_1(t) \ U_2(t) \ \dots \ U_m(t)]^T \in \mathcal{D}^m$, n 和 m 分别代表状态节点和输入节点的数量; $f : \mathcal{D}^{m+n} \rightarrow \mathcal{D}^n$ 和 $g : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$ 为逻辑函数; $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}^n$ 是状态触发脉冲的集合, 即跳变集; 步进集 $\mathcal{S} := \mathcal{D}^n \setminus \mathcal{J}$ 则是状态空间中去掉跳变集后余下状态的集合; 状态 $X(t, j)$ 具有二维指标, 其中 t 和 j 分别表示时间步长和脉冲数量.

根据矩阵半张量积理论^[6], 该模型可以表达成等价的代数形式, 即

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1, j) = \mathbf{F}\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t, j), & \mathbf{x}(t, j) \in \mathcal{S}, \\ \mathbf{x}(t, j+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t, j), & \mathbf{x}(t, j) \in \mathcal{J}, \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\mathbf{x} := \mathbf{x}_1 \ltimes \mathbf{x}_2 \ltimes \dots \ltimes \mathbf{x}_n \in \Delta_{2^n}$, $\mathbf{x}_i := \delta_2^{2-X_i} \in \Delta_{2^n}$ 表示状态变量 X_i 的向量形式; 逻辑矩阵 $\mathbf{F} \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^{n+m}}$, $\mathbf{G} \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$; $\mathcal{J} \subset \Delta_{2^n}$ 表示 \mathcal{J} 中元素的向量形式的集合, $\mathcal{S} \subset \Delta_{2^n}$ 表示 \mathcal{S} 中元素的向量形式的集合.

区别于一般的布尔控制网络, 本文认为随机脉冲布尔控制网络的跳变集和步进集之间存在重叠部分, 即 $\mathcal{J} \cup \mathcal{S} = \Delta_{2^n}$, $\mathcal{J} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. 当状态落在这个重叠部分上时, 系统将随机进入跳变过程或步进过程. 这种情况下, 状态 $\mathbf{x}(t, j) = \delta_{2^n}^i$ 按如下规则进行更新:

1) 当 $\mathbf{x}(t, j) \in \mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ 时, 系统以 $p_i (0 < p_i < 1)$ 的概率进入跳变过程, 以 $q_i := 1 - p_i$ 的概率进入步进过程;

2) 当 $\mathbf{x}(t, j) \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{S}$ 时, 系统进入跳变过程;

3) 当 $\mathbf{x}(t, j) \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{J}$ 时, 系统进入步进过程.

基于式(3), 更改方程对应的触发条件, 即可得到状态触发的随机脉冲布尔控制网络的混杂指标模型的代数形式, 即

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1, j) = \mathbf{F}\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t, j), & \gamma_{i,j} = 0, \\ \mathbf{x}(t, j+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t, j), & \gamma_{i,j} = 1, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\gamma_{i,j}$ 是具有二维指标的布尔变量, 作为状态更新的判定条件, 满足下述的概率定义:

$$p_i = \Pr\{\gamma_{i,j} = 1 | \mathbf{x}(t, j) = \delta_{2^n}^i\}, \quad i \in [1 : 2^n]. \quad (5)$$

显然, 当 $\gamma_{i,j} = 0$ 时, 系统发生步进过程, 系统状态根据式(4)第1个方程更新; 当 $\gamma_{i,j} = 1$ 时, 系统发生跳变过程, 系统状态根据式(4)第2个方程更新.

定义 3 若 $\mathbf{x}(t_k, j_k; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0)$ 是初始状态为 \mathbf{x}_0 , 输入序列为 $\mathbf{u} := \{u(t)\}$ 的 SRIBCN(4) 的混杂域解, 则其满足以下规则:

1) 若 $\gamma_{i,j} = 0$, 则 $\mathbf{x}(t_{k+1}, j_{k+1}) = \mathbf{F}\mathbf{u}(t_k)\mathbf{x}(t_k, j_k)$, 其中 $t_{k+1} = t_k + 1, j_{k+1} = j_k$;

2) 若 $\gamma_{i,j} = 1$, 则 $\mathbf{x}(t_{k+1}, j_{k+1}) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t_k, j_k)$, 其中 $t_{k+1} = t_k, j_{k+1} = j_k + 1$.

混杂域解不仅关注时间步长, 还记录脉冲触发的次数.

2.3 前向完备性

用 $\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 表示 $\mathbf{x}(t_k, j_k; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0)$ 的混杂域, 则混杂域解的混杂指数对 (t, j) 属于 $\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0)$. 定义 $\tau(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) := \sup\{t | \exists j \text{ s.t. } (t, j) \in \mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0)\}$ 为任意初始状态 \mathbf{x}_0 在任意控制序列 \mathbf{u} 作用下混杂域解的时间指标 t 的上确界, 那么集合 $\mathcal{T} \times (\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) := \{0, 1, 2, \dots, \tau(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) - 1\}$ 可以用来表示混杂域解 $\mathbf{x}(t_k, j_k; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0)$ 的时域. 显然, 当 $\tau(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = +\infty$ 时, $\mathcal{T}(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) := \mathbb{N}$. 此时表明网络从 \mathbf{x}_0 出发, 在控制序列 \mathbf{u} 作用下, 其混杂域解 $\mathbf{x}(t_k, j_k; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0)$ 的时间指标 t 可取遍所有自然数, 并能延伸至无穷大.

定义 4 若 $\tau(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = +\infty$, 即 $\mathcal{T}(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = \mathbb{N}$,

则称混杂域解 $\mathbf{x}(t_k, j_k; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0)$ 是前向完备的. 若从任意初始状态 \mathbf{x}_0 引出、受控于任意控制序列 \mathbf{u} 的混杂域解均是前向完备的, 则称此网络是前向完备的.

注1 芝诺现象是描述在某一个瞬时时刻连续发生无数个脉冲行为的现象, 在混杂指标模型中表现为在某一时刻一直处于跳变过程中, 而无法进入步进过程(即时间步长 t 有界). 而前向完备性则是以时间步长 t 无上界为基础来定义的. 从芝诺现象和前向完备性的定义来看, 两者是互斥的, 若网络满足前向完备性, 则在任意时刻均不会发生无限次连续跳变行为, 即芝诺现象不会出现.

状态 $\delta_{2^n}^i$ 进入跳变过程的概率可以等价地表述为

$$p_i = \Pr\{t_{k+1} = t_k | \mathbf{x}(t_k, j_k) = \delta_{2^n}^i\}, i \in [1: 2^n]. \quad (6)$$

为了便于叙述与计算, 用一个向量表示各个状态触发脉冲的概率 $\mathbf{p}_J = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_{2^n}]$. 由于 $q_i = 1 - p_i$, 各个状态进入步进过程的概率可以类似地表示为 $\mathbf{p}_S = [1 - p_1 \ 1 - p_2 \ \cdots \ 1 - p_{2^n}]$. 进而, 可将跳变过程的一步状态转移概率矩阵 \mathbf{P}_J 定义为如下形式:

$$[\mathbf{P}_J]_{i,s} := \Pr\{\gamma_{t_k, j_k} = 1, \mathbf{x}(t_{k+1}, j_{k+1}) = \delta_{2^n}^i | \mathbf{x}(t_k, j_k) = \delta_{2^n}^s\}, \forall k \in \mathbb{Z}^+, \forall i, s \in [1: 2^n],$$

则有

$$[\mathbf{P}_J]_{i,s} = (\delta_{2^n}^i)^T \times \mathbf{G} \times \delta_{2^n}^s \times [\mathbf{p}_J]_s = (\delta_{2^n}^i)^T \times \mathbf{G} \times \text{diag}\{\mathbf{p}_J\} \times \delta_{2^n}^s = [\mathbf{G} \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_J\}]_{i,s},$$

因此可得 $\mathbf{P}_J = \mathbf{G} \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_J\}$.

类似地, 可定义步进过程的一步状态转移概率矩阵 \mathbf{P}_S , 其任意元素满足

$$[\mathbf{P}_S^l]_{i,s} := \Pr\{\gamma_{t_k, j_k} = 0, \mathbf{x}(t_{k+1}, j_{k+1}) = \delta_{2^n}^i | \mathbf{x}(t_k, j_k) = \delta_{2^n}^s, \mathbf{u}(t_k) = \delta_{2^m}^l\},$$

其中: \mathbf{P}_S^l 表示矩阵 $\mathbf{P}_S := [\mathbf{P}_S^1 \ \mathbf{P}_S^2 \ \cdots \ \mathbf{P}_S^{2^m}]$ 的第 l 个矩阵块. 从而有 $[\mathbf{P}_S^l]_{i,s} = [\mathbf{F}_l \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_S\}]_{i,s}$, 其中 \mathbf{F}_l 表示矩阵 $\mathbf{F} := [\mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2 \ \cdots \ \mathbf{F}_{2^m}]$ 的第 l 个矩阵块, 即 $\mathbf{P}_S^l = \mathbf{F}_l \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_S\}$. 因此,

$$\mathbf{P}_S = [\mathbf{F}_1 \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_S\} \ \mathbf{F}_2 \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_S\} \ \cdots \ \mathbf{F}_{2^m} \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_S\}]. \quad (7)$$

命题1^[31] 脉冲布尔控制网络满足前向完备性的充要条件为 $\mathbf{P}_J^{2^n} = \mathbf{0}$.

2.4 能控性的定义

定义5 考虑SRIBCN(4),

1) 如果网络是前向完备的, 并且存在一个非负整数 k 和控制序列 $\mathbf{u} = \{u(0), u(1), \cdots, u(k-1)\}$, 使

得 \mathbf{x}_0 在 k 步内到达 \mathbf{x}_d 的概率为1, 即

$$\Pr\{\mathbf{x}(t_k, j_k; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_d\} = 1, t_k + j_k = k, \quad (8)$$

则称网络从 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x}_d 是能控的.

2) 如果网络是前向完备的, 并且从 \mathbf{x}_0 出发到任意状态 \mathbf{x}_d 都是能控的, 那么称此网络在 \mathbf{x}_0 处是能控的.

3) 如果网络是前向完备的, 并且对任意状态 \mathbf{x}_0 都是能控的, 那么称整个网络具有能控性, 或者称此网络是状态完全能控的.

注2 上述定义是在混杂域上进行的, 这意味着无论系统发生的过程是步进过程还是跳变过程, 它都被看作是 k 步中的一步, 系统状态的转移过程应在 k 个步骤内完成.

3 能控性分析

如果不区分网络的步进过程和跳变过程, 可以用一组 $k := t_k + j_k \in \mathbb{N}$ 的序列来描述SRIBCN(4)的混杂域解, 即 $\mathbf{z}(k; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0) := \mathbf{x}(t_k, j_k; \mathbf{u}, \mathbf{x}_0)$, 则

$$\mathbf{z}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{x}(t+1, j), & \gamma_{i,j} = 0, \\ \mathbf{x}(t, j+1), & \gamma_{i,j} = 1 \\ \mathbf{F}\mathbf{u}(t)\mathbf{x}(t, j), & \gamma_{i,j} = 0, \\ \mathbf{G}\mathbf{x}(t, j), & \gamma_{i,j} = 1. \end{cases}$$

进而, SRIBCN(4)可以转换为

$$\mathbf{z}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{F}\mathbf{u}_H(k)\mathbf{z}(k), & \gamma_{i,j} = 0, \\ \mathbf{G}\mathbf{z}(k), & \gamma_{i,j} = 1, \end{cases} \quad (9)$$

其中: $\mathbf{z}(0) := \mathbf{x}_0$, $\mathbf{u}_H(k) := \mathbf{u}(t)$, $k = t + j_t^+$. 系统(9)可以被看作是一个不区分步进动作和跳变动作的切换逻辑控制系统(logical control system, LCS), 被称为 k 域逻辑控制系统.

由于网络的跳变过程不受控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 的影响, k 域LCS(9)中的 $\mathbf{u}_H(k)$ 在 $k \neq t + j_t^+$ 处无定义. 为了统一形式, 把 $\mathbf{u}_H(k)$ 的定义范围扩展到在 \mathbb{N} 上均有定义的输入序列, 此时 $\mathbf{u}(t)$ 是 $\mathbf{u}_H(k)$ 的一个子序列, 即

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_H(t + j_t^+), \quad (10)$$

那么 k 域LCS(9)可以转换为

$$\mathbf{z}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{F}\mathbf{u}_H(k)\mathbf{z}(k), & \gamma_{i,j} = 0, \\ \bar{\mathbf{G}}\mathbf{u}_H(k)\mathbf{z}(k), & \gamma_{i,j} = 1, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\bar{\mathbf{G}} = [\underbrace{\mathbf{G} \ \cdots \ \mathbf{G}}_{2^m}]$. 根据式(7)的结果, 可类似地得到 k 域LCS(11)跳变过程的一步状态转移概率矩阵

$$\bar{\mathbf{P}}_J = [\underbrace{\mathbf{G} \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_J\} \ \cdots \ \mathbf{G} \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_J\}}_{2^m}].$$

因此, 该系统完整的一步状态转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}_J + \mathbf{P}_S = [\mathbf{G} \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_J\} + \mathbf{F}_1 \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_S\} \ \cdots \ \mathbf{G} \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_J\} + \mathbf{F}_{2^m} \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_S\}]. \quad (12)$$

可见, 系统在动态演化的过程中, 受到控制序列 \mathbf{u} 的作用, 从 $\{P_1, P_2, \dots, P_{2^m}\}$ (P_i 表示 P 的第 i 个矩阵块) 中选择一步状态转移概率矩阵. 也就是说, 在 $\mathbf{u}(t) = \delta_{2^m}^i$ 的作用下, P_i 是系统在第 t 步的一步状态转移概率矩阵. 由此不难看出

$$[P_i]_{z,r} = \Pr\{\mathbf{x}(t+1) = \delta_{2^n}^z | \mathbf{u}(t) = \delta_{2^m}^i, \mathbf{x}(t) = \delta_{2^n}^r\}, \quad (13)$$

其中: $i \in [1 : 2^m], z, r \in [1 : 2^n]$.

基于上述构造, SRIBCN(4) 转化成了一个能根据控制序列不断切换一步状态转移概率矩阵的网络模型.

如果对任意两个状态 $\delta_{2^n}^{i_s}, \delta_{2^n}^{i_{s+1}}, s \in [0 : k-1]$ 均存在控制 $\delta_{2^m}^{\beta_s} \in \Delta_{2^m}$ 使得 $[P_{\beta_s}]_{i_{s+1}, i_s} = 1$ 成立, 那么称状态链

$$\mathbf{x}_0 = \delta_{2^n}^{i_0} \rightarrow \delta_{2^n}^{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow \delta_{2^n}^{i_k} = \mathbf{x}_d$$

为从状态 \mathbf{x}_0 到状态 \mathbf{x}_d 的长度为 k 的可行控制路径. 由于状态链中各个状态的转移概率均为 1, 则从 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x}_d 的转移概率也为 1.

基于定义 5 可知, 判断任意两个状态间是否能达或能控等价于判断这两个状态间是否存在长度有限、概率为 1 的可行控制路径. 为了直观体现此类可行控制路径的存在性, 本文定义了一种新的矩阵幂运算. 令

$$M := P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_{2^m} = \bigvee_{i=1}^{2^m} P_i, \quad (14)$$

则 $M^{(2)}$ 的各元素按如下公式计算得到:

$$[M^{(2)}]_{i,j} := \bigvee_{z=1}^{2^n} [M]_{i,z} \cdot [M]_{z,j}, \quad (15)$$

其中 $i, j \in [1 : 2^n]$. 若 $[M^{(2)}]_{i,j} = 1$, 则状态链 $\mathbf{x}_0 = \delta_{2^n}^i \rightarrow \delta_{2^n}^z \rightarrow \delta_{2^n}^j = \mathbf{x}_d$ 是从 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x}_d 的一条长度为 2、概率为 1 的可行控制路径. 类似地, 定义 $M^{(s)}$ 满足

$$[M^{(s)}]_{i,j} := \bigvee_{z=1}^{2^n} [M^{(s-1)}]_{i,z} \cdot [M]_{z,j}, \quad (16)$$

其中任意的 $i, j \in [1 : 2^n]$. 若 $[M^{(s)}]_{i,j} = 1$, 则状态链 $\mathbf{x}_0 = \delta_{2^n}^i \rightarrow \dots \rightarrow \delta_{2^n}^j = \mathbf{x}_d$ 是从 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x}_d 的一条长度为 s 、概率为 1 的可行控制路径.

注 3 由于 SRIBCN(4) 的状态空间有限, 即 $|\Delta_{2^n}| = 2^n < \infty$; 若从状态 $\mathbf{x}_0 = \delta_{2^n}^i$ 到 $\delta_{2^n}^j = \mathbf{x}_d$ 存在一条概率为 1 的可行控制路径, 则两者之间一定存在一条长度不超过 $2^n - 1$ 、概率为 1 的可行控制路径. 一旦从 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x}_d 的可行控制路径长度超过 $2^n - 1$, 则路径中至少存在两个相同的状态; 通过不断删去两个相同状态之间的状态, 最终必定可以得到一条长度不超过 $2^n - 1$ 的可行控制路径.

命题 2 考虑 SRIBCN(4), 从状态 $\mathbf{x}_0 = \delta_{2^n}^i$ 到状态 $\mathbf{x}_d = \delta_{2^n}^j$ 能控的充要条件为: 1) 网络前向完备; 2) 满足

$$\left[\bigvee_{k=1}^{2^n} M^{(k)}\right]_{i,j} = 1, \quad (17)$$

$$\text{其中 } M = P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_{2^m} = \bigvee_{i=1}^{2^m} P_i.$$

证 1) 充分性. 满足前向完备性确保了系统不会出现芝诺现象, 控制输入是有意义的.

系统发生步进过程时, 第 k 步的状态可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= F\mathbf{u}(k-1)\mathbf{x}(k-1) = \\ &F\mathbf{u}(k-1)F\mathbf{u}(k-2)\mathbf{x}(k-2) = \dots = \\ &F\mathbf{u}(k-1)F\mathbf{u}(k-2)\dots F\mathbf{u}(0)\mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (18)$$

令 $\mathbf{u}(t) = \delta_{2^m}^{i_t}, t \in [0 : k-1]$, 根据矩阵半张量积的定义可得 $F\mathbf{u}(t) = F\delta_{2^m}^{i_t} = F_{i_t}$. 由于 SRIBCN(4) 在跳变集的边界也有概率发生步进过程, 结合式 (13) 和式 (18) 可推出

$$R_k(\mathbf{x}_0) = \{P_{i_{k-1}}P_{i_{k-2}}\dots P_{i_0}\mathbf{x}_0 | 1 \leq i_{k-1}, i_{k-2}, \dots, i_0 \leq 2^m\}, \quad (19)$$

其中 $R_k(\mathbf{x}_0)$ 为该网络在 k 步内的完全能达集, 即 k 步内一定能到达的状态的集合, 等价于

$$R_k(\mathbf{x}_0) = \{\delta_{2^n}^i | \text{Row}_i(C_k)\mathbf{x}_0 \geq 1\}, \quad (20)$$

其中 C_k 表示网络的状态转移概率矩阵.

基于 $M^{(k)}$ 的构造原理, 可用 $M^{(k)}$ 来表示 k 步后网络的状态转移概率矩阵. 那么式 (20) 可改写为

$$R_k(\mathbf{x}_0) = \{\delta_{2^n}^i | \text{Row}_i(M^{(k)})\mathbf{x}_0 \geq 1\}. \quad (21)$$

由于 $R(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k(\mathbf{x}_0)$, 即网络步进过程中能够到达的状态都可看成是能达集中的元素, 结合式 (21) 可得

$$R(\mathbf{x}_0) = \{\delta_{2^n}^i | \text{Row}_i(\bigvee_{k=1}^{+\infty} M^{(k)})\mathbf{x}_0 \geq 1\}. \quad (22)$$

根据注 3 所述, 从初始状态 \mathbf{x}_0 出发的能达集可简化为

$$R(\mathbf{x}_0) = \{\delta_{2^n}^i | \text{Row}_i(\bigvee_{k=1}^{2^n} M^{(k)})\mathbf{x}_0 \geq 1\}. \quad (23)$$

式 (23) 描述了从 \mathbf{x}_0 出发能到达的状态. 在 SRIBCN(4) 中, 系统的能控性与能达性是等价的, 从而也可以得到满足能控性的条件. 由于逻辑矩阵中的元素、状态进入跳变过程的概率均不大于 1, 网络的一步状态转移概率矩阵中的元素最大为 1. 根据 $M^{(k)}$ 的定义可知, $M^{(k)}$ 中的元素最大为 1. 因此, 可以简化如式 (23) 的判定条件, 即将 “ ≥ 1 ” 的条件简化为 “ $= 1$ ”. 针对命题 2, 如果满足 $\left[\bigvee_{k=1}^{2^n} M^{(k)}\right]_{i,j} = 1$, 则说明从 $\mathbf{x}_0 = \delta_{2^n}^i$ 出发能在有限步内到达 $\mathbf{x}_d = \delta_{2^n}^j$, 也就是说从 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x}_d 是能控的.

2) 必要性. 由定义 5 可知具有能控性的前提是系统具有前向完备性. 当系统从 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x}_d 能控时, 显然在 k 步内的状态转移概率矩阵中第 i 行第 j 列的值是等于 1 的. 证毕.

根据命题 2, 可以直接推出以下定理:

定理 1 考虑SRIBCN(4), 在状态 $\mathbf{x}_0 = \delta_{2^n}^j$ 处具有能控性的充要条件为: 1) 网络前向完备; 2) 满足

$$\text{Col}_j\left(\bigvee_{k=1}^{2^n} M^{(k)}\right) = \mathbf{1}_{2^n}, \quad (24)$$

其中 $M = P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_{2^m} = \bigvee_{i=1}^{2^m} P_i$.

定理 2 考虑SRIBCN(4), 其具有完全能控性的充要条件为: 1) 网络前向完备; 2) 满足

$$\bigvee_{k=1}^{2^n} M^{(k)} = \mathbf{1}_{2^n \times 2^n}, \quad (25)$$

其中 $M = P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_{2^m} = \bigvee_{i=1}^{2^m} P_i$.

注 4 仅当系统进行步进过程时, 控制序列才能发挥作用, 因此系统前向完备是十分必要的. 这意味着系统不会滞留在某个时刻而无法跳出, 系统的能控性才能够得以实现.

4 算例

例 1 考虑含有3个状态节点($n = 3$)和两个输入节点($m = 2$)的状态触发随机脉冲布尔控制网络, 且 $\mathcal{J} = \{\delta_8^1, \delta_8^3, \delta_8^4, \delta_8^7, \delta_8^8\}$, $\mathcal{S} = \{\delta_8^2, \delta_8^4, \delta_8^5, \delta_8^6, \delta_8^8\}$, $p_4 = 0.4, p_8 = 0.5$.

$$\begin{aligned} F &= \delta_8[2 \ 8 \ 6 \ 2 \ 6 \ 5 \ 3 \ 6 \ 7 \ 5 \ 3 \ 8 \ 7 \ 2 \ 1 \ 2 \\ &\quad 4 \ 4 \ 2 \ 6 \ 1 \ 3 \ 4 \ 8 \ 3 \ 6 \ 7 \ 4 \ 8 \ 7 \ 6 \ 4], \\ G &= \delta_8[6 \ 8 \ 2 \ 6 \ 1 \ 4 \ 5 \ 2]. \end{aligned}$$

首先考虑该系统是否具有前向完备性. 具有随机动态行为的状态有 $\mathcal{J} \cap \mathcal{S} = \{\delta_8^4, \delta_8^8\}$, 那么 $\mathcal{J} \setminus \mathcal{S} = \{\delta_8^1, \delta_8^3, \delta_8^7\}$, $\mathcal{S} \setminus \mathcal{J} = \{\delta_8^2, \delta_8^5, \delta_8^6\}$, 各个状态进入跳变过程的概率为 $\mathbf{p}_J = [1 \ 0 \ 1 \ 0.4 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0.5]$, 则可计算出跳变过程的一步状态转移概率矩阵

$$\begin{aligned} P_J &= G \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_J\} = \\ &\delta_8[6 \ 8 \ 2 \ 6 \ 1 \ 4 \ 5 \ 2] \times \\ &\text{diag}\{1, 0, 1, 0.4, 0, 0, 1, 0.5\} = \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因为 $P_J^8 = \mathbf{0}$, 此网络具有前向完备性.

根据输入 $\mathbf{u}(t)$ 的维数, 可以将 F 均分为4个矩阵块. 由第1个矩阵块控制的系统的一步状态转移概率矩阵为

$$\begin{aligned} P_1 &= P_J + P_S^1 = P_J + F_1 \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_S\} = \\ &P_J + \delta_8[2 \ 8 \ 6 \ 2 \ 6 \ 5 \ 3 \ 6] \times \\ &\text{diag}\{0, 1, 0, 0.6, 1, 1, 0, 0.5\} = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

同理可分别求出 P_2, P_3, P_4 , 则可计算出此网络的最大一步状态转移概率矩阵

$$\begin{aligned} M &= P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee P_4 = \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.6 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

那么 $\bigvee_{k=1}^4 M^{(k)} = \mathbf{1}_{8 \times 8}$. 可见状态转移4步时, 网络的最大状态转移概率矩阵已经满足定理2, 说明这个随机脉冲布尔控制网络是完全能控的, 通过控制序列可以在最多4步内实现任意两个状态之间的转移.

图1描述了例1的一种状态转移情况. 白色节点是 $\mathcal{S} \setminus \mathcal{J}$ 中的状态, 浅灰色节点是 $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ 中的状态, 深灰色节点是 $\mathcal{J} \setminus \mathcal{S}$ 中的状态. 实线表示步进过程, 虚线表示跳变过程. 实线旁标注的状态表明此步选择的控制序列, 实线或虚线旁标注的数字表明此过程发生的概率, 未标注数字则表示概率为1. 可以看到, 仅凭图中的控制序列就能够实现系统的能控性, 且任意两个状态之间转移的步长不超过4.

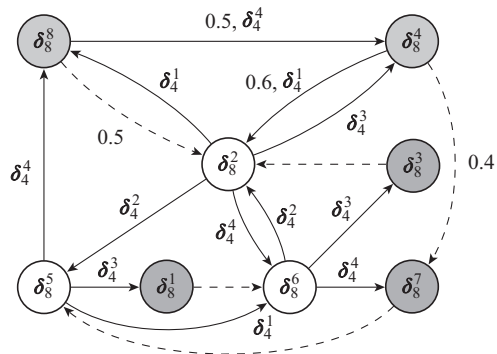


图 1 例1的状态转移图

Fig. 1 State transfer diagram for Example 1

图2为例1的状态转移轨迹仿真图. 为了使图示相对直观清晰, 本文没有选择最短步长, 而只是保证初始状态可以在8步内到达其它所有状态, 并且只完整展示其中一条可能序列. 以初始状态 δ_8^1 为例, 其中一条状态链为 $\delta_8^1 \rightarrow \delta_8^6 \rightarrow \delta_8^3 \rightarrow \delta_8^2 \rightarrow \delta_8^8 \rightarrow \delta_8^4 \rightarrow \delta_8^7 \rightarrow \delta_8^5$. 但在 δ_8^4 和 δ_8^8 处是概率发生跳变过程的, 故在仿真图中进行到下一步时会有两个分支. 在此状态链中, $\delta_8^4, \delta_8^5, \delta_8^7$ 不是概率为1到达的, 因此分别在图中步长为1和3时增添控制得到状态链 $\delta_8^6 \rightarrow \delta_8^7 \rightarrow \delta_8^5$ 和 $\delta_8^2 \rightarrow \delta_8^4$, 以实现状态的完全能控. 注意, 多条线段重叠时只显示其中一条线, 但所有形状的点会被完整表达.

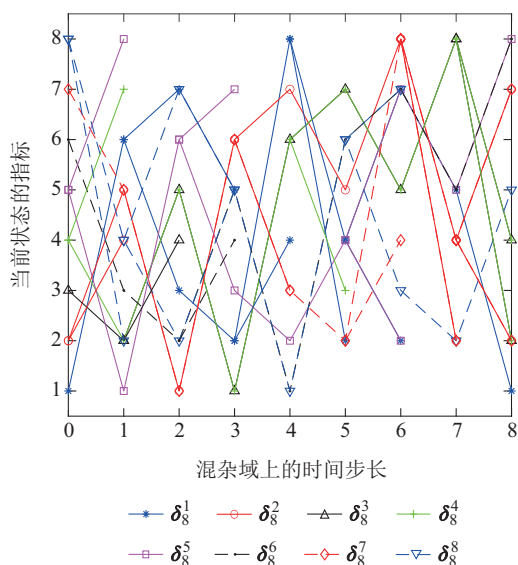


图2 例1的解轨迹仿真图

Fig. 2 Simulation diagram of the solution trajectory for Example 1

例2 考虑含有3个状态节点($n = 3$)和两个输入节点($m = 2$)的状态触发随机脉冲布尔控制网络, 且 $\mathcal{J} = \{\delta_8^1, \delta_8^3, \delta_8^4, \delta_8^7, \delta_8^8\}$, $\mathcal{S} = \{\delta_8^2, \delta_8^3, \delta_8^5, \delta_8^6, \delta_8^8\}$, $p_3 = 0.4, p_7 = 0.6$.

$$F = \delta_8[[5 \ 8 \ 6 \ 4 \ 5 \ 7 \ 3 \ 8] \ [1 \ 5 \ 4 \ 7 \ 4 \ 8 \ 3 \ 2] \\ [6 \ 3 \ 4 \ 2 \ 1 \ 5 \ 3 \ 1] \ [6 \ 2 \ 6 \ 7 \ 5 \ 4 \ 8 \ 3]],$$

$$G = \delta_8[2 \ 4 \ 7 \ 6 \ 4 \ 8 \ 3 \ 1].$$

具有随机动态行为的状态有 $\mathcal{J} \cap \mathcal{S} = \{\delta_8^3, \delta_8^7\}$, 那么 $\mathcal{J} \setminus \mathcal{S} = \{\delta_8^1, \delta_8^4, \delta_8^8\}$, $\mathcal{S} \setminus \mathcal{J} = \{\delta_8^2, \delta_8^5, \delta_8^6\}$, 各状态进入跳变过程概率为 $p_j = [1 \ 0 \ 0.4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0.6 \ 1]$, 则

$$P_J^8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0033 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由此可见, 这个随机脉冲布尔控制网络不具有前向完备性, 因此这个系统不具备能控性. 图3为例2的状态转移图. 可以看到状态 δ_8^3 和 δ_8^7 之间均会发生跳变过程, 这说明此网络有概率发生芝诺现象, 不具备前向完备性. 这与本文之前的计算结果相符.

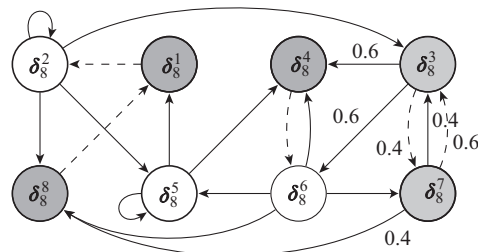


图3 例2的状态转移图

Fig. 3 State transfer diagram for Example 2

例3 文献[38]给出了一个 λ 噬菌体的切换模型. λ 噬菌体是一种生长在细菌上的病毒, 可以在细菌感染后将其染色体注射到细菌细胞中, 随后遵循溶源和溶解两种途径进行大量增殖. 溶源和溶解是表达不同基因集的结果. 在这个过程中, 5个噬菌体基因($cro, cI, cII, cIII, N$)和环境变量发挥着重要作用.

细菌感染后, cro 和 N 基因立即被激活, 其诱导的蛋白质开始积累. N 基因对 cII 和 $cIII$ 基因施加正控制, 并且自身处于 cII 和 cro 的负控制之下. 同时, 包括营养浓度、生长速度、温度和感染的多样性等环境条件, 都会影响 cII 和 $cIII$ 基因的活性. 如果环境条件有利, 那么 cII 和 $cIII$ 基因具有高度活性, cII 基因产物能够激活 cI 基因. cI 基因抑制包括 cro 在内的所有其他基因, 建立溶源状态. 如果环境条件不利, 则 $cII, cIII$ 基因不被激活, cro 基因保持活性, 并且其产物抑制 cI 基因, 从而建立溶解状态.

基因之间的作用包括激活和抑制. 假设这两种作用无法相加, 并且抑制作用占主导地位. 使用布尔变量对每个基因建模, 其中基因的状态ON(OFF)对应于变量的逻辑状态True(False). 那么可以用如下简化的布尔模型来说明噬菌体基因之间的相互作用:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t+1, j) = (\neg \mathbf{x}_2(t, j)) \wedge (\neg \mathbf{x}_5(t, j)), \\ \mathbf{x}_2(t+1, j) = (\neg \mathbf{x}_5(t, j)) \wedge (\mathbf{x}_2(t, j) \vee \mathbf{x}_3(t, j)), \\ \mathbf{x}_3(t+1, j) = (\neg \mathbf{x}_2(t, j)) \wedge \mathbf{u}(t) \wedge (\mathbf{x}_1(t, j) \vee \mathbf{x}_4(t, j)), \\ \mathbf{x}_4(t+1, j) = (\neg \mathbf{x}_2(t, j)) \wedge \mathbf{u}(t) \wedge \mathbf{x}_1(t, j), \\ \mathbf{x}_5(t+1, j) = (\neg \mathbf{x}_2(t, j)) \wedge (\neg \mathbf{x}_3(t, j)), \end{cases}$$

其中: \neg 表示逻辑否定; $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5$ 和 \mathbf{u} 分别表示噬菌体基因 $N, cI, cII, cIII, cro$ 和环境条件的总和; 控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 为True(False)时, 表示环境条件在时间 t 对基因的表达是有利的(不利的).

在基因表达过程中, 由于紫外线、X射线、激光等物理因素的影响, 许多基因可能在某个时刻发生状态

突变. 由于持续时间很短, 这些突变可被视作以脉冲形式瞬时发生的, 并且具有随机性. 在这种变化下, 基因间的相互作用可以被动态地描述为^[39]

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t, j+1) = (\mathbf{x}_1(t, j) \vee \mathbf{x}_3(t, j)) \leftrightarrow \mathbf{x}_5(t, j), \\ \mathbf{x}_2(t, j+1) = (\neg \mathbf{x}_1(t, j)) \vee \mathbf{x}_3(t, j), \\ \mathbf{x}_3(t, j+1) = \neg \mathbf{x}_4(t, j), \\ \mathbf{x}_4(t, j+1) = (\mathbf{x}_1(t, j) \wedge \mathbf{x}_2(t, j)) \vee \mathbf{x}_3(t, j), \\ \mathbf{x}_5(t, j+1) = \mathbf{x}_1(t, j) \leftrightarrow (\mathbf{x}_3(t, j) \vee \mathbf{x}_4(t, j)). \end{cases} \quad (26)$$

运用矩阵半张量积, 计算 $\mathbf{x}(t) = \underset{i=1}{\overset{5}{\times}} \mathbf{x}_i(t)$, 可以将系统(26)转换为形如SRIBC(4)的代数形式, 其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \delta_{32} [32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 26 \ 2 \ 26 \ 2 \ 25 \ 9 \ 25 \ 9 \\ &\quad 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 28 \ 4 \ 32 \ 8 \ 27 \ 11 \ 31 \ 15 \\ &\quad 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 8 \ 32 \ 8 \ 31 \ 15 \ 31 \ 15 \\ &\quad 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 24 \ 32 \ 8 \ 32 \ 8 \ 31 \ 15 \ 31 \ 15], \\ \mathbf{G} &= \delta_{32} [5 \ 21 \ 1 \ 17 \ 13 \ 29 \ 10 \ 26 \ 5 \ 21 \ 1 \ 17 \ 15 \ 31 \ 12 \ 28 \\ &\quad 6 \ 22 \ 2 \ 18 \ 24 \ 8 \ 19 \ 3 \ 6 \ 22 \ 2 \ 18 \ 24 \ 8 \ 19 \ 3]. \end{aligned}$$

此外, $\mathcal{J} = \{\delta_{32}^1, \delta_{32}^2, \delta_{32}^3, \delta_{32}^6, \delta_{32}^{12}, \delta_{32}^{13}, \delta_{32}^{15}, \delta_{32}^{17}, \delta_{32}^{19}, \delta_{32}^{24}, \delta_{32}^{29}, \delta_{32}^{31}\}$, $\mathcal{S} = (\Delta_{32} \setminus \mathcal{J}) \cup \{\delta_{32}^2, \delta_{32}^3, \delta_{32}^{13}, \delta_{32}^{15}, \delta_{32}^{19}, \delta_{32}^{24}, \delta_{32}^{31}\}$, $p_{19} = 0.8, p_2 = p_{15} = 0.5, p_3 = p_{13} = 0.4, p_{24} = p_{31} = 0.2$.

根据各个状态进入跳变过程的概率可得 $\mathbf{p}_J = [1 \ 0.5 \ 0.4 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0.4 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0.8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0.2 \ 0]$, 那么 $\mathbf{P}_J = \mathbf{G} \times \text{diag}\{\mathbf{p}_J\}$, 通过计算得 $\mathbf{P}_J^{10} = \mathbf{0}$, 表明此系统具备前向完备性.

在本例中, 输入节点为1, 对应有2个步进过程的状态转移概率矩阵, 则

$$\begin{aligned} M &= \mathbf{P}_1 \vee \mathbf{P}_2 = (\mathbf{P}_J + \mathbf{P}_S^1) \vee (\mathbf{P}_J + \mathbf{P}_S^2) = \\ &(\mathbf{P}_J + \mathbf{F}_1 \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_S\}) \vee (\mathbf{P}_J + \mathbf{F}_1 \cdot \text{diag}\{\mathbf{p}_S\}), \end{aligned}$$

计算得 $\underset{k=1}{\overset{32}{\vee}} M^{(k)} \neq \mathbf{1}_{32 \times 32}$. 这表明该生物学系统不是状态完全能控的. 事实上在本例中, 也不存在具有能控性的状态.

可以通过图4来直观地展现本例中部分状态转移的过程. 分别选取 $\delta_{32}^1, \delta_{32}^9, \delta_{32}^{22}, \delta_{32}^{30}$ 作为初始状态, 绘制出的状态转移仿真图如图4所示. 不同线段颜色表示从不同初始状态出发的状态演化过程. 由于进行一定的步长后, 状态转移过程重复, 本文只仿真了前16步的状态转移情况. 此外, 为了使图示更简洁, 本文选择完整显示其中一条状态链, 舍弃了其他分支下与主状态链具有相同转移过程的状态链, 并且用红色虚线标注出了4个初始状态在网络演化过程中从未到达过的状态. 显然, 这4个状态不具备能控性.

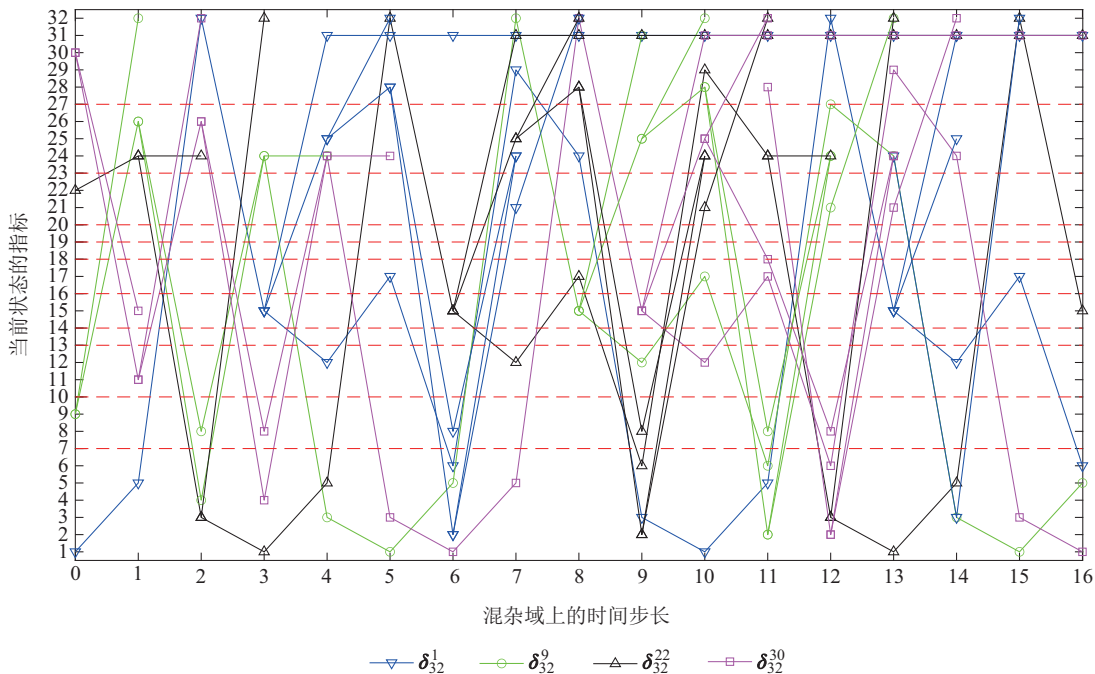


图4 例3的解轨迹仿真图
Fig. 4 Simulation diagram of the solution trajectory of Example 3

5 结论

本文主要研究了状态触发的随机脉冲布尔控制网络的能控性. 引入了混杂指标模型来描述随机脉冲布尔控制网络, 该模型能够充分阐述系统脉冲的瞬时性

和随机性. 基于矩阵半张量积理论, 本文给出了前向完备性的定义以及判定条件, 并在此基础上, 推导了状态触发随机脉冲布尔控制网络能控性成立的充分必要条件. 最后, 通过仿真算例和生物学实例验证了

所得结果的有效性.

参考文献:

- [1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *Journal of Theoretical Biology*, 1969, 22(3): 437 – 467.
- [2] ALBERT R, BARABASI A L. Dynamics of complex systems: Scaling laws for the period of Boolean networks. *Physical Review Letters*, 2000, 84(24): 5660 – 5663.
- [3] SHMULEVICH I, DOUGHERTY E R, KIM S, et al. Probabilistic Boolean networks: A rule-based uncertainty model for gene regulatory networks. *Bioinformatics*, 2002, 18(2): 261 – 274.
- [4] FARROW C, HEIDEL J, MALONEY J, et al. Scalar equations for synchronous Boolean networks with biological applications. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, 15(2): 348 – 354.
- [5] DATTA A, CHOUDHARY A, BITTNER M L, et al. External control in Markovian genetic regulatory networks: The imperfect information case. *Bioinformatics*, 2004, 20(6): 924 – 930.
- [6] CHENG D Z, QI H S, LI Z Q. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach*. London: Springer, 2011.
- [7] CHENG D Z, QI H S. Controllability and observability of Boolean control networks. *Automatica*, 2009, 45(7): 1659 – 1667.
- [8] FORNASINI E, VALCHER M E. Observability, reconstructibility and state observers of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 58(6): 1390 – 1401.
- [9] ZHANG L J, ZHANG K Z. Controllability and observability of Boolean control networks with time-variant delays in states. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2013, 24(9): 1478 – 1484.
- [10] LI R, YANG M, CHU T G. State feedback stabilization for Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1853 – 1857.
- [11] BOF N, FORNASINI E, VALCHER M E. Output feedback stabilization of Boolean control networks. *Automatica*, 2015, 57: 21 – 28.
- [12] LU J Q, SUN L J, LIU Y, et al. Stabilization of Boolean control networks under aperiodic sampled-data control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2018, 56(6): 4385 – 4404.
- [13] GUO Y Q, WANG P, GUI W H, et al. Set stability and set stabilization of Boolean control networks based on invariant subsets. *Automatica*, 2015, 61: 106 – 112.
- [14] LIU Y, SUN L J, LU J Q, et al. Feedback controller design for the synchronization of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 27(9): 1991 – 1996.
- [15] ZHONG J, LU J Q, HUANG T W, et al. Controllability and synchronization analysis of identical-hierarchy mixed-valued logical control networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(11): 3482 – 3493.
- [16] MENG M, LAM J, FENG J E, et al. Stability and stabilization of Boolean networks with stochastic delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(2): 790 – 796.
- [17] ZOU Y L, ZHU J D. System decomposition with respect to inputs for Boolean control networks. *Automatica*, 2014, 50(4): 1304 – 1309.
- [18] CHENG D Z. Disturbance decoupling of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(1): 2 – 10.
- [19] YANG M, LI R, CHU T G. Controller design for disturbance decoupling of Boolean control networks. *Automatica*, 2013, 49(1): 273 – 277.
- [20] YU Y Y, FENG J E, PAN J F, et al. Block decoupling of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(8): 3129 – 3140.
- [21] ZHAO Y, LI Z Q, CHENG D Z. Optimal control of logical control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(8): 1766 – 1776.
- [22] FORNASINI E, VALCHER M E. Optimal control of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(5): 1258 – 1270.
- [23] WU Y H, SUN X M, ZHAO X D, et al. Optimal control of Boolean control networks with average cost: A policy iteration approach. *Automatica*, 2019, 100: 378 – 387.
- [24] SHAH V, GEORGE R K, SHARMA J, et al. Existence and uniqueness of classical and mild solutions of generalized impulsive evolution equation. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2018, 19(7/8): 775 – 780.
- [25] LI F, SUN J. Observability analysis of Boolean control networks with impulsive effects. *IET Control Theory & Applications*, 2011, 5(14): 1609 – 1616.
- [26] CHEN H W, WU B, LU J Q. A minimum-time control for Boolean control networks with impulsive disturbances. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 273: 477 – 483.
- [27] XU X J, LI H T, LI Y L, et al. Output tracking control of Boolean control networks with impulsive effects. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, 41(4): 1554 – 1564.
- [28] CHELLABOINA V, HADDAD W M. A unification between partial stability and stability theory for time-varying systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 2002, 22(6): 66 – 75.
- [29] AMBROSINO R, CALABRESE F, COSENTINO C, et al. On finite-time stability of state dependent impulsive dynamical systems. *American Control Conference*. Seattle, WA, USA: IEEE, 2008: 2897 – 2902.
- [30] JIAO T C, ZHENG W X. Noise-to-state stability of nonlinear systems with random disturbances and impulses. *IEEE 55th Conference on Decision and Control*. Las Vegas, NV, USA: IEEE, 2016: 7276 – 7281.
- [31] LI F F, SUN J T. Stability and stabilization of Boolean networks with impulsive effects. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(1): 1 – 5.
- [32] LIU Y, CHEN H W, WU B. Controllability of Boolean control networks with impulsive effects and forbidden states. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2013, 37(1): 1 – 9.
- [33] CHEN H, LI X D, SUN J T. Stabilization, controllability and optimal control of Boolean networks with impulsive effects and state constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 60(3): 806 – 811.
- [34] GUO Y Q, SHEN Y W, GUI W H. Stability analysis of state-triggered impulsive Boolean networks based on a hybrid index model. *Asian Journal of Control*, 2019, 21(6): 2624 – 2633.
- [35] SHEN Y W, GUO Y Q, GUI W H. Stability of Boolean networks with state-dependent random impulses. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 2020, 22: 222 – 231.
- [36] ZHOU R P, GUO Y Q, LIU X Z, et al. Stabilization of Boolean control networks with state-triggered impulses. *Science China Information Sciences*, 2022, 65(3): 132202.
- [37] ZHOU R P, GUO Y Q, WANG Y H, et al. Safe control of logical control networks with random impulses. *Neural Networks*, 2023, 165: 884 – 895.
- [38] LASCHOV D, MARGALIOT M. Minimum-time control of Boolean networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2013, 51(4): 2869 – 2892.
- [39] WANG Y, DING X Y, LIN L, et al. State-feedback set stabilization of Boolean networks with state-dependent random impulses. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 54(4): 2320 – 2331.

作者简介:

周俊岚 本科生, 目前研究方向为布尔网络的分析与控制, E-mail: 15167915727@163.com;

周荣佩 博士, 副教授, 目前研究方向为逻辑动态系统的分析与控制、博弈论以及复杂网络系统的优化, E-mail: zhourp@ncu.edu.cn.