

# 带有时滞脉冲的非线性随机系统的稳定性分析

谢本旺<sup>1</sup>, 姚凤麒<sup>1†</sup>, 程培<sup>2</sup>

(1. 安徽工业大学 电气与信息工程学院, 安徽 马鞍山 243000; 2. 安徽大学 数学科学学院, 安徽 合肥 230601)

**摘要:** 本文研究带有时滞脉冲效应的非线性随机微分系统的  $p$  阶矩指数稳定性和几乎指数稳定性问题. 基于脉冲控制理论和平均脉冲间隔的思想, 利用伊藤公式, 得到了系统基于 Lyapunov 理论的  $p$  阶矩指数稳定和几乎指数稳定的充分条件. 结果表明, 时滞脉冲的存在除了破坏系统的稳定性外, 还可以用来镇定不稳定的连续系统. 最后, 通过数值例子说明了理论结果的有效性.

**关键词:** 时滞脉冲; 平均脉冲区间;  $p$  阶矩指数稳定; 几乎指数稳定

**引用格式:** 谢本旺, 姚凤麒, 程培. 带有时滞脉冲的非线性随机系统的稳定性分析. 控制理论与应用, 2025, 42(3): 563 – 568

DOI: 10.7641/CTA.2023.30190

## Stability analysis of nonlinear stochastic systems with delayed impulses

XIE Ben-wang<sup>1</sup>, YAO Feng-qi<sup>1†</sup>, CHENG Pei<sup>2</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Anhui University of Technology, Maanshan Anhui 243000, China;

2. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei Anhui 230601, China)

**Abstract:** In this paper, the  $p$ th moment exponential stability and almost exponential stability of nonlinear stochastic differential system with delayed impulsive effect are studied. On the foundation of the impulsive control theory and the idea of average impulsive interval, using the Itô formula, some sufficient conditions for the  $p$ th exponential stability and the almost exponential stability based on the Lyapunov theory are obtained. The results show that the existence of impulsive delay can not only destroy the stability of the system, but also be used to stabilize the unstable continuous dynamics. Finally, some numerical simulations are presented to illustrate our proposed results.

**Key words:** delayed impulse; average impulsive interval;  $p$ th moment exponential stability; almost exponential stability

**Citation:** XIE Benwang, YAO Fengqi, CHENG Pei. Stability analysis of nonlinear stochastic systems with delayed impulses. *Control Theory & Applications*, 2025, 42(3): 563 – 568

## 1 引言

由于某些外力因素, 系统的运动状态可能在短时间内发生突变或扰动, 从而改变了原来的运动轨迹. 这种突变是瞬间发生的, 以脉冲的形式出现, 即脉冲现象. 脉冲现象在现实生活中广泛存在于如力学、电信、金融市场等领域中<sup>[1–6]</sup>. 众所周知, 在很多实际应用中随机噪声的存在是无法规避的, 随机模型在科学和控制工程的许多分支中发挥着越来越重要的作用, 随机微分系统已经受到了大量研究者的研究<sup>[7–14]</sup>. 那么, 同时受脉冲效应和随机扰动影响的脉冲随机微分系统因其重要的理论意义引起了人们的广泛关注, 许多稳定性结果已见报道, 见文献<sup>[15–22]</sup>和其中的参考

文献.

近年来, 随着对脉冲现象的深入研究, 人们对涉及时滞的脉冲越来越感兴趣. 时滞脉冲描述了一种现象, 即脉冲瞬态不仅依赖于系统的当前状态, 还依赖于过去的状态. 在许多实际系统中, 对脉冲信息的采样、处理和传输过程中, 时滞是不可避免的. 例如, 在渔业生态系统中, 合理的脉冲控制策略(如捕捞成熟鱼、放生鱼苗等)不仅与当前的鱼类数量有关, 而且还取决于鱼类的历史数量, 所以考虑时滞脉冲是极具有现实意义的. 一些学者考虑带有时滞脉冲的随机微分方程是有必要的. 近些年已经有了一些理论成果<sup>[23–25]</sup>. 然而, 现有的稳定性结果大部分都是基于脉冲区间的上下

收稿日期: 2023–04–05; 录用日期: 2023–12–05.

†通信作者. E-mail: yaofengqi\_ahut@163.com.

本文责任编辑: 刘志新.

国家自然科学基金项目(11771001), 安徽省高校自然科学基金重点项目(2022AH050108)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11771001) and the Key Natural Science Research Project of Universities in Anhui Province (2022AH050108)

限,即利用  $\inf_{k \in \mathbb{Z}_+} (t_k - t_{k-1})$  或  $\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (t_k - t_{k-1})$  对脉冲间隔加以限制,很明显这类条件更适用于脉冲间隔相对均匀的脉冲序列.但间隔不均匀的脉冲序列,该类条件则会过于保守.基于此,参考文献[26]提出了平均脉冲区间的概念,平均脉冲区间在脉冲间隔不均匀的情况保守性更小.

结合上述讨论,受文献[26–27]的启发,本文研究带有时滞脉冲的随机微分系统的  $p$  阶矩指数稳定性和几乎指数稳定性,所讨论的脉冲时滞是基于脉冲区间的,脉冲的时滞是小于脉冲间隔的.分别考虑了镇定型脉冲和反镇定型脉冲对系统稳定性的影响,相对于以往的文献,本文利用Lyapunov函数法和平均脉冲区间以及一致指数稳定函数的概念,建立了系统  $p$  阶矩指数稳定和几乎指数稳定的充分条件.该结果对于相关系统的李亚普诺夫函数的导数取  $R$  值的情况,可以放宽一些约束,减少先前文献中存在的一些限制性.本文的研究结果表明,带有时滞的脉冲也可以对随机系统的稳定性有益.

## 2 预备知识

在本文中,除非另有说明,将使用以下符号:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{Z}_+$  分别表示实数集、非负实数集和正整数集,  $\mathbb{R}^n$  和  $\mathbb{R}^{n \times m}$  分别表示  $n$  维和  $n \times m$  维实矩阵空间,  $|\cdot|$  指向量的欧几里得范数,  $\alpha \wedge \beta$  表示  $\alpha$  和  $\beta$  中的最小值.设带有  $\sigma$  代数流  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  的  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  是一个完备的概率空间,  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  满足通常条件,即  $\mathcal{F}_t$  是右连续的,且  $\mathcal{F}_0$  包含所有的  $P$  中的空集.  $E$  是关于概率测度  $P$  的期望算子,  $w(t) = (w_1(t) \cdots w_d(t))^T$  是定义在该概率空间上的  $d$  维布朗运动.

考虑如下非线性脉冲随机系统:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t)) dt + g(t, x(t)) dw(t), \\ \quad \quad \quad t \neq t_k, t \geq t_0, \\ x(t) = I_k(x((t - \tau_k)^-)), t = t_k, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  是系统的状态向量.  $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ ,  $I_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 为了防止类似芝诺现象的出现,假设脉冲序列  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$  满足  $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k \rightarrow +\infty$ , 即是一个严格递增序列.序列  $\{\tau_k\}: \tau_k = (1 - \delta)(t_k - t_{k-1})$  同时依赖于脉冲序列  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$  和常数  $\delta \in (0, 1]$ , 描述了一个系统在脉冲瞬间  $t_k$  时的状态跳变是依赖于它在  $(t_{k-1}, t_k]$  时的过去状态,是发生在两个连续脉冲时刻之间的一类时滞脉冲.本文中,函数  $f, g, I_k$  是 Borel 可测函数,并且满足一类利普希茨条件和线性增长条件,在此条件下可以保证系统(1)存在唯一解,记  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$  为系统(1),满足初始值  $x(t_0) = x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  的解.进一步,假设  $f(t, 0) \equiv 0$ ,  $g(t, 0) \equiv 0$ ,  $I_k(0) \equiv 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , 则系统(1)存在一个平凡解  $x(t) \equiv 0$ .

$C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$  表示  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  上所有非负实

值函数  $V(x, t)$  的全体,其中  $V(x, t)$  关于  $x$  二次连续可微,关于  $t$  一次连续可微.对于给定的  $V(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ , 沿着系统(1)的解,定义两个算子  $\mathcal{L}V, \mathcal{H}V$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, t) &= V_t(x, t) + V_x(x, t) f(x, t) + \\ &\quad \frac{1}{2} \text{trace}(g^T(x, t) V_{xx}(x, t) g(x, t)), \\ \mathcal{H}V(x, t) &= V_x(x, t) g(x, t), \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} V_t(x, t) &= \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}, \\ V_x(x, t) &= \left[ \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_n} \right], \\ V_{xx}(x, t) &= \left[ \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{n \times n}. \end{aligned}$$

**定义 1**<sup>[26]</sup> 对于脉冲序列  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ , 若存在正整数  $N_0$  和正数  $\tau_a$ , 使得对于任意的  $t > s > 0$ , 有下式成立:

$$\frac{t - s}{\tau_a} - N_0 \leq N(t, s) \leq \frac{t - s}{\tau_a} + N_0, \quad (2)$$

则称该序列满足平均脉冲区间条件,其中:  $N(t, s)$  表示脉冲序列在时间间隔  $(s, t]$  中的脉冲发生次数,  $\tau_a$  为脉冲序列的平均脉冲区间;

**定义 2**<sup>[27]</sup> 若存在一对正常数  $\lambda$  和  $C$ , 使得

$$E|x(t)|^p \leq C|x_0|^p e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad (3)$$

则称系统(1)是  $p$  阶矩指数稳定的,特别地,当  $p = 2$  时,又称系统为均方指数稳定的.

**定义 3**<sup>[28]</sup> 若存在一对正常数  $\lambda \geq 0$  和  $M \geq 1$ , 使得

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq M|x_0| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad (4)$$

则称系统(1)是几乎指数稳定的.

**定义 4**<sup>[29]</sup> 标量函数  $\alpha(t)$  称为一致指数稳定函数,当且仅当存在正常数  $\gamma$  和非非常数  $c$ , 使得

$$\int_s^t \alpha(u) du \leq -\gamma(t - s) + c, \quad \forall t \geq s. \quad (5)$$

## 3 稳定性分析

**定理 1** 若存在  $c \in \mathbb{R}_+$ ,  $\gamma > 0$  使得  $\alpha(t)$  为一致指数稳定函数,且存在函数  $v \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$  和常数  $p > 0, c_1 > 0, c_2 > 0, \mu > 0, \lambda > 0, d \in \mathbb{R}$  且  $\mu \geq c$ , 使得

$$\begin{cases} c_1 |x|^p \leq v(x, t) \leq c_2 |x|^p, & \forall x \in \mathbb{R}^n; \\ E\mathcal{L}v(x(t), t) \leq \alpha(t) E v(x(t), t), & t \neq t_k; \\ E v(x(t), t) \leq e^d E v(x((t - \tau_k)^-), t - \tau_k), & t = t_k; \\ (d + c)N(t, s) - (\gamma\delta - \lambda)(t - s) \leq \mu - c, \end{cases} \quad (6)$$

那么系统(1)是  $p$  阶矩指数稳定的.

**证** 为了方便起见, 本文记  $v(t) = v(x(t), t), \forall t \in [t_{k-1}, t_k], k \in \mathbb{Z}_+$ , 由伊藤公式可得

$$dv(t) = \mathcal{L}v(t) dt + \mathcal{H}v(t) dw(t), \quad (7)$$

两边同时积分并取期望, 即

$$Ev(t) \leq Ev(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t \alpha(s) Ev(s) ds. \quad (8)$$

根据 Gronwall 不等式可得

$$Ev(t) \leq e^{\int_{t_{k-1}}^t \alpha(s) ds} Ev(t_{k-1}). \quad (9)$$

当  $t \in [t_0, t_1)$  时, 取  $k = 1$ , 有

$$Ev(t) \leq e^{\int_{t_0}^t \alpha(s) ds} Ev(t_0), \quad (10)$$

由于  $\tau_1 = (1 - \delta)(t_1 - t_0)$ , 若如文中假设  $\delta \in (0, 1]$ , 应有  $(t_1 - \tau_1) \in [t_0, t_1)$ , 在脉冲时刻  $t = t_1$  时, 由定理 1 的条件 3) 和式 (10) 可得

$$Ev(t_1) \leq e^d Ev((t_1 - \tau_1)^-) \leq e^d Ev(t_0) e^{\int_{t_0}^{t_1 - \tau_1} \alpha(s) ds}. \quad (11)$$

那么, 当  $t \in [t_1, t_2)$ , 由式 (9) 和式 (11), 有

$$Ev(t) \leq Ev(t_1) e^{\int_{t_1}^t \alpha(s) ds} \leq Ev(t_0) e^d e^{\int_{t_0}^{t_1 - \tau_1} \alpha(s) ds} e^{\int_{t_1}^t \alpha(s) ds}. \quad (12)$$

类似于式 (11), 当  $t = t_2$  时, 由定理 1 的条件 3) 和式 (12) 可得

$$Ev(t_2) \leq e^d Ev((t_2 - \tau_2)^-) \leq Ev(t_0) e^{2d} e^{\int_{t_0}^{t_1 - \tau_1} \alpha(s) ds} e^{\int_{t_1}^{t_2 - \tau_2} \alpha(s) ds}, \quad (13)$$

由于  $\tau_2 = (1 - \delta)(t_2 - t_1)$ , 显然  $(t_2 - \tau_2) \in [t_1, t_2)$ , 当  $t \in [t_2, t_3)$  时, 结合式 (10) 和式 (13) 有

$$Ev(t) \leq Ev(t_2) e^{\int_{t_2}^t \alpha(s) ds} \leq Ev(t_0) e^{2d} e^{\int_{t_0}^{t_1 - \tau_1} \alpha(s) ds} e^{\int_{t_1}^{t_2 - \tau_2} \alpha(s) ds}. \quad (14)$$

递归地重复这个过程, 当  $t \in [t_k, t_{k+1})$  时,  $k = N(t, t_0)$ , 可得

$$\begin{aligned} Ev(t) &\leq \\ Ev(t_0) e^{dN(t, t_0)} e^{\int_{t_k}^t \alpha(s) ds + \sum_{i=1}^{N(t, t_0)} \int_{t_{i-1}}^{t_i - \tau_i} \alpha(s) ds} &\leq \\ Ev(t_0) e^{dN(t, t_0) - \gamma(t - t_{N(t, t_0)}) + c} \times & \\ e^{\sum_{i=1}^{N(t, t_0)} [-\gamma(t_i - \tau_i - t_{i-1}) + c]} = & \\ Ev(t_0) e^{(d+c)N(t, t_0) - \gamma(t - t_0) + c + \gamma \sum_{i=1}^{N(t, t_0)} \tau_i} &, \quad (15) \end{aligned}$$

根据  $\tau_k$  定义, 当  $t \in [t_k, t_{k+1})$  时,  $k = N(t, t_0)$ , 可得

$$\begin{aligned} \gamma \sum_{i=1}^{N(t, t_0)} \tau_i &= \gamma \sum_{i=1}^{N(t, t_0)} (t_i - t_{i-1}) = \\ \gamma(1 - \delta)(t_{N(t, t_0)} - t_0), & \quad (16) \end{aligned}$$

显然  $\gamma(1 - \delta)(t - t_{N(t, t_0)}) \geq 0$ , 结合式 (16) 和定理 1

的条件 4), 那么下式成立:

$$\begin{aligned} (d + c)N(t, t_0) - \gamma(t - t_0) + \gamma \sum_{i=1}^{N(t, t_0)} \tau_i + c &= \\ (d + c)N(t, t_0) - \gamma(t - t_0) + & \\ \gamma(1 - \delta)(t_{N(t, t_0)} - t) + \gamma(1 - \delta)(t - t_0) + c &= \\ (d + c)N(t, t_0) - \gamma\delta(t - t_0) - & \\ \gamma(1 - \delta)(t - t_{N(t, t_0)}) + c \leq & \\ (d + c)N(t, t_0) - \gamma\delta(t - t_0) + c \leq & \\ \mu - \lambda(t - t_0). & \quad (17) \end{aligned}$$

将式 (17) 代入式 (15) 得

$$Ev(t) \leq Ev(t_0) e^{\mu - \lambda(t - t_0)}, \quad (18)$$

最后根据定理 1 的条件 1) 有

$$E|x(t)|^p \leq \frac{C_2}{C_1} e^{\mu} |x_0|^p e^{-\lambda(t - t_0)}, t \geq t_0, \quad (19)$$

即系统 (1) 是  $p$  阶矩指数稳定的. 证毕.

**注 1** 定理 1 的条件 4) 可以写成如下形式:

$$(d + c)N(t, s) \leq (\gamma\delta - \lambda)(t - s) + \mu - c. \quad (20)$$

**情形 1**  $d + c < 0$ , 脉冲属于镇定脉冲. 脉冲可以看作是用于镇定不稳定随机系统或加速稳定随机系统收敛速度的脉冲控制器.

若  $\gamma\delta - \lambda \geq 0$ , 显然不等式左边为负, 右边为正, 式 (20) 自然成立.

若  $\gamma\delta - \lambda < 0, 0 < \gamma < \frac{\lambda}{\delta}, \forall t \geq s \geq t_0$ , 式 (20) 可以写成如下:

$$N(t, s) \geq \frac{(\gamma\delta - \lambda)(t - s)}{d + c} - \frac{\mu - c}{-(d + c)}, \quad (21)$$

其中:  $\tau_a \leq |\frac{d + c}{\gamma\delta - \lambda}|, N_0 \geq \frac{\mu - c}{|d + c|}$ , 为了利用脉冲的积极作用, 稳定的脉冲应该发生得足够频繁, 脉冲序列的平均脉冲区间应该足够小, 所以平均脉冲区间会被施加一个上界. 很容易看出, 脉冲时滞的存在 ( $0 < \delta < 1$ ) 会使平均脉冲区间大于无时滞脉冲的情况 ( $\delta = 1$ ). 稳定的时滞脉冲可能有助于系统的稳定性.

**情形 2**  $d + c > 0$ , 脉冲属于反镇定脉冲. 此时, 脉冲可以被视为破坏随机系统稳定性的扰动.

若  $\gamma\delta - \lambda \geq 0, \gamma \geq \frac{\lambda}{\delta}$ , 取  $s = t_0$ , 令  $t \rightarrow \infty$ , 则不等式左边  $\rightarrow +\infty$ , 右边  $\rightarrow -\infty$ , 或常数  $\mu - c$ , 式 (20) 不可能成立.

若  $\gamma\delta - \lambda < 0, \forall t \geq s \geq t_0$ , 式 (21) 可以写成如下:

$$N(t, s) \leq \frac{(\gamma\delta - \lambda)(t - s)}{d + c} + \frac{\mu - c}{d + c}, \quad (22)$$

其中:  $\tau_a \geq |\frac{d + c}{\gamma\delta - \lambda}|, N_0 \leq \frac{\mu - c}{|d + c|}$ , 为了减少脉冲的负面影响, 不允许不稳定的脉冲发生得太频繁, 脉冲次数不应该过多, 即平均脉冲区间不能过小. 所以平均脉冲区间被施加了一个下界. 请注意, 这样的条件也表明, 当  $\delta$  在区间  $(0, 1]$  上变小时, 脉冲发生次数的上界会变小, 即脉冲的发生次数应该减少. 也就是说, 在不稳定脉冲中存在的时间延迟有破坏稳定性的倾向.

**情形 3**  $d + c = 0$  时, 脉冲的存在对系统的稳定性既没

有益处也没有害处. 粗略地说, 此时的系统相当于一个没有脉冲的连续系统. 系统的稳定性只和连续动力学有关系.

若  $\gamma\delta - \lambda \geq 0$ , 式(20)自然成立; 若  $\gamma\delta - \lambda < 0$ , 式(20)不可能成立; 当  $\delta = 1$  时, 即无脉冲时滞; 当  $\gamma > \lambda$ , 式(20)自然成立.

当  $0 < \gamma < \lambda$ , 式(20)可以写成式(21), 其中  $\tau_a = \left| \frac{d+c}{\gamma\delta-\lambda} \right|$ ,  $N_0 = \frac{\mu-c}{|d+c|}$ . 从分析可见:  $d+c$  相当于脉冲,  $\gamma\delta-\lambda$  相当于连续运动学的导数.

如果不考虑一致稳定函数约束, 有下面定理成立:

**定理 2** 若存在常数  $p > 0, c_1 > 0, c_2 > 0, \mu > 0, \lambda > 0, c_3 \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}$  和函数  $v \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ , 使得

$$\begin{cases} c_1 |x|^p \leq v(x, t) \leq c_2 |x|^p, & \forall x \in \mathbb{R}^n; \\ \mathcal{E} \mathcal{L} v(x(t), t) \leq c_3 \mathcal{E} v(x(t), t), & t \neq t_k; \\ \mathcal{E} v(x(t), t) \leq e^d \mathcal{E} v(x((t-\tau_k)^-), t-\tau_k), & t = t_k; \\ dN(t, s) + (c_3\delta + \lambda)(t-s) \leq \\ \mu + ((-c_3) \wedge 0)(1-\delta)\tau_{\max}, \end{cases} \quad (23)$$

其中  $\tau_{\max}$  表示最大的脉冲间隔, 即  $\tau_{\max} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (t_k - t_{k-1})$ . 那么系统(1)满足  $p$  阶矩指数稳定的.

**证**  $\forall t \in [t_{k-1}, t_k], k \in \mathbb{Z}_+$ , 可以将式(9)转化如下:

$$\mathcal{E} v(t) \leq e^{c_3(t-t_{k-1})} \mathcal{E} v(t_{k-1}), \quad (24)$$

结合式(10)–(15), 当  $t \in [t_k, t_{k+1})$  时,  $k = N(t, t_0)$ , 可得

$$\mathcal{E} v(t) \leq \mathcal{E} v(t_0) e^{N(t, t_0)d} e^{c_3(t - \sum_{i=1}^{N(t, t_0)} \tau_i - t_0)}. \quad (25)$$

根据  $\tau_k$  定义下式成立:

$$-c_3(1-\delta)(t-t_{N(t, t_0)}) \geq (-c_3 \wedge 0)(1-\delta)\tau_{\max}, \quad (26)$$

当  $-c_3 > 0$  时, 式(27)显然成立;  $-c_3 < 0$  时,  $(t-t_{N(t, t_0)}) \leq \tau_{\max}$ , 故式(27)成立. 结合式(16)(27)和定理2的条件4), 下式成立:

$$\begin{aligned} & dN(t, t_0) + c_3(t-t_0) - c_3 \sum_{i=1}^{N(t, t_0)} \tau_i = \\ & dN(t, t_0) + c_3(t-t_0) - c_3(1-\delta)(t_{N(t, t_0)} - t_0) = \\ & dN(t, t_0) + c_3(t-t_0) - \\ & c_3(1-\delta)(t_{N(t, t_0)} - t) - c_3(1-\delta)(t-t_0) = \\ & dN(t, t_0) + c_3\delta(t-t_0) + c_3(1-\delta)(t-t_{N(t, t_0)}) \leq \\ & dN(t, t_0) + c_3\delta(t-t_0) - (-c_3 \wedge 0)(1-\delta)\tau_{\max} \leq \\ & \mu - \lambda(t-t_0). \end{aligned} \quad (27)$$

将式(28)代入式(26)得

$$\mathcal{E} v(t) \leq \mathcal{E} v(t_0) e^{\mu - \lambda(t-t_0)}. \quad (28)$$

最后, 根据定理2的条件1)有

$$\mathcal{E}|x(t)|^p \leq \frac{c_2}{c_1} e^{\mu} |x_0|^p e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad (29)$$

即系统(1)是  $p$  阶矩指数稳定的. 证毕.

**注 2** 此时用平均脉冲区间的方法分析: 当  $d < 0$ , 脉冲起镇定作用, 例如当  $c_3 > 0$ , 即连续运动学可能不稳定, 定理2条件4)可以替换如下:

$$N(t, s) \geq \frac{-(c_3\delta + \lambda)(t-s) - \frac{\mu - c_3(1-\delta)\tau_{\max}}{-d}}{d}. \quad (30)$$

此时, 脉冲可以看作是镇定不稳定随机系统或加速稳定随机系统收敛速度的脉冲控制器. 脉冲应该发生得足够频繁, 即脉冲次数应该有个下界. 当  $d > 0$ , 脉冲属于反镇定脉冲, 例如当  $c_3 < 0$ , 即连续运动学稳定, 定理2条件4)可以替换如下:

$$N(t, s) \leq \frac{-(c_3\delta + \lambda)(t-s) + \frac{\mu}{d}}{d}. \quad (31)$$

不稳定的脉冲是不利于系统稳定的, 为了减少它们的负面影响, 不允许不稳定的脉冲发生得太频繁, 即脉冲次数应该有个上界. 如果时滞是一个小于脉冲区间的常时滞, 那么定理2会变成以下推论:

**推论 1** 假设系统(1)中的时滞满足  $\tau > 0$  是常数延迟, 且  $\tau < (t_k - t_{k-1}), n \in \mathbb{Z}^+$ . 将定理2中的条件3)–4)替换成如下:

$$\begin{cases} \mathcal{E} v(x(t), t) \leq e^d \mathcal{E} v(x((t-\tau)^-), t-\tau), & t = t_k, \\ N(t, s)(d - c_3\tau) + (c_3 - \lambda)(t-s) \leq \mu. \end{cases} \quad (32)$$

那么系统(1)满足  $p$  阶矩指数稳定的.

**注 3** 同样可以用平均脉冲区间的方法进行分析: 当  $d - c_3\tau < 0$ , 脉冲属于镇定脉冲. 由于时滞的存在,  $d > 0$  时, 脉冲也可能镇定. 说明时滞的存在可能对系统稳定有益处. 为了系统的稳定, 脉冲发生的次数应该足够频繁, 所以脉冲次数有个下界. 在这种情况下, 定理2的条件4)可以被替换为如下:

$$N(t, s) \geq \frac{(\lambda + c_3)(t-s) + \frac{\mu}{(d - c_3\tau)}}{(d - c_3\tau)}, \quad (33)$$

当  $d - c_3\tau > 0$ , 即脉冲属于反镇定脉冲. 注意, 由于时滞的存在,  $d < 0$  时, 脉冲也可能不镇定, 值得一提的是, 如果  $c_3 > 0$  的话, 即连续运动学也可能不稳定的, 那系统几乎不可能稳定, 所以一般不考虑这种情况. 此时若想保持系统的稳定, 那么脉冲发生的次数应该足够少, 所以脉冲次数有个上界. 在这种情况下, 定理2的条件4)可以被替换为如下:

$$N(t, s) \leq \frac{(\lambda + c_3)(t-s) + \frac{\mu}{(d - c_3\tau)}}{(d - c_3\tau)}. \quad (34)$$

**定理 3** 假设  $p \geq 1$  且定理1或定理2中的条件成立, 存在一个常数  $L > 0$ , 使得

$$\mathcal{E}(|f(t, x)|^p \vee |g(t, x)|^p) \leq LE|x|^p, \quad (35)$$

则系统(1)是几乎指数稳定的.

相关证明可以参考文献[28]中相关证明, 该证明对时滞脉冲仍然适用.

### 4 数值算例

考虑如下一维时滞脉冲系统:

$$\begin{cases} dx(t) = ax(t)dt + \varepsilon(t)x(t)dw(t), \\ t \neq t_k, t \geq t_0, \\ x(t_k) = b(x(t_k - \tau_k))^{-}, t = t_k, \end{cases} \quad (36)$$

选择  $V(t, x) = x^2$  易得

$$\mathcal{L}V(t) \leq (2a + \varepsilon(t)^2)V(t) = \alpha(t)v(t),$$

$$V(t) \leq b^2x^2((t_k - \tau_k)^-) = b^2V(x(t - \tau_k)^-),$$

给定脉冲信号如下:  $\zeta = \{\varepsilon, 2\varepsilon, \dots, (N_0 - 1)\varepsilon, N_0T_a, N_0T_a + \varepsilon, N_0T_a + 2\varepsilon, \dots, N_0T_a + (N_0 - 1)\varepsilon, 2N_0T_a, \dots\}$ , 其中  $\varepsilon$  和  $T_a$  为正数, 满足  $\varepsilon < T_a$ .

取  $c_3(t) = 2a + \varepsilon(t)^2, d = \ln b^2$ . 下面将讨论系统(36)在不同的  $a$  和  $b$  值下的稳定性问题.

**情形 1**  $a = -\frac{7}{4}, \varepsilon(t) = e^{-t}, b = 2, N_0 = 1, \delta = 0.5$ .

$$\alpha(t) = 2a + \varepsilon(t)^2 = -\frac{7}{2} + e^{-2t},$$

$$\int_s^t \alpha(u) du = \int_s^t -\frac{7}{2} + e^{-2u} du = -\frac{7}{2}(t-s) - \frac{1}{2}(e^{-2t} - e^{-2s}) \leq -\frac{7}{2}(t-s) + \frac{1}{2}.$$

故取  $p = 2, c_1 = c_2 = 1, \gamma = \frac{7}{2}, c = \frac{1}{2}, d = \ln 4$  时, 定理1的条件1)-3)成立. 由以上讨论知, 当  $\gamma \geq \frac{7}{4}$  时, 定理1的条件4)不可能成立, 即系统不可能以小于  $-\frac{7}{4}$  的衰减速率衰减. 由于  $d + c > 0$ , 当  $\lambda < \frac{7}{4}$  时, 若脉冲序列满足式(22), 则系统是  $p$  阶矩指数稳定的, 取  $\lambda = 1, \mu = 2.3$ , 则  $\tau_a \geq \left| \frac{d+c}{\gamma\delta-\lambda} \right| = 2.4, N_0 \leq \frac{\mu-c}{|d+c|} = 1$ , 此时取  $\tau_a = 2.4$ , 由定理1可知系统(37)是均方指数稳定的. 取  $x_0 = [2, -3]$ , 系统的均方状态轨迹如图1所示.

显然  $a = -\frac{7}{4}, \varepsilon(t) = e^{-t}$  满足条件(36), 故系统(37)是几乎指数稳定的, 系统的一条状态轨迹如图2所示.

**情形 2** 当  $a = \frac{1}{4}, \varepsilon = \frac{1}{2}, b = 0.8, N_0 = 3, \delta = 0.5$ , 取脉冲序列如图3.

此时  $c_3 = 2a + \varepsilon^2 = \frac{3}{4} > 0, d = \ln 0.64 < 0$ , 故取  $p = 2, c_1 = c_2 = 1$  时, 定理2的条件1)-3)成立. 则连续运动学是不稳定的, 脉冲是稳定的, 平均脉冲区间应该有一个下界, 根据定理2计算得出  $\tau_a < 0.88$ , 则

满足定理2的条件4), 此时经过简单计算可得  $\lambda = 0.38, \mu = 2.2$ , 取平均脉冲间隔为0.6, 由定理2可知系统(37)是均方指数稳定, 取  $x_0 = [2, -3]$ , 系统的均方状态轨迹如图4所示.

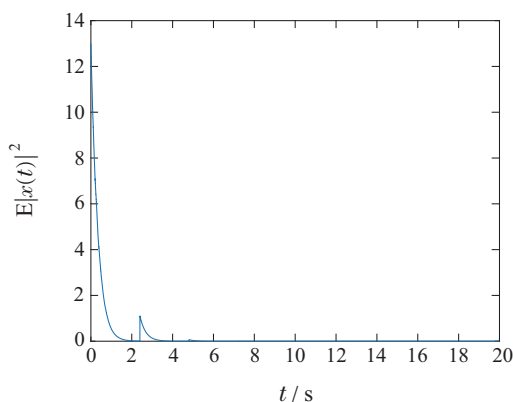


图1 均方轨迹图  $a = -\frac{7}{4}, \varepsilon = e^{-t}, b = 2$

Fig. 1 Mean-square trajectory plot with  $a = -\frac{7}{4}, \varepsilon = e^{-t}, b = 2$

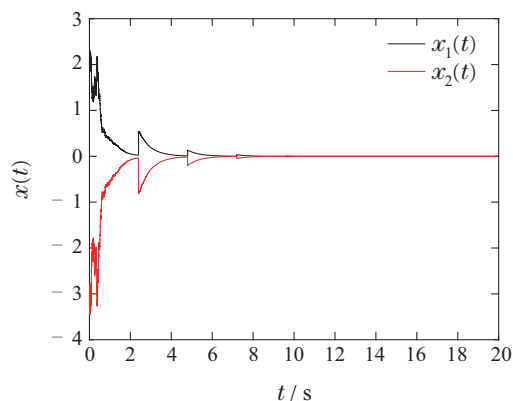


图2 样本轨迹  $a = 0.5, \varepsilon = e^{-t}, b = 2$

Fig. 2 A sample state of system with  $a = 0.5, \varepsilon = e^{-t}, b = 2$

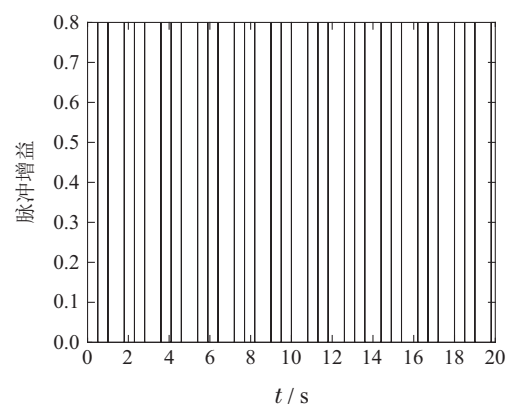


图3 脉冲序列  $N_0 = 3$

Fig. 3 Impulse sequence with  $N_0 = 3$

### 5 结论

本文研究了具有时滞脉冲的非线性脉冲随机系统的稳定性问题. 基于Lyapunov稳定性理论和平均脉冲

区间理论建立了系统 $p$ th指数稳定和几乎必然指数稳定的充分条件. 结果表明, 时滞脉冲也可以对系统起镇定影响. 最后, 通过数值仿真验证了所提方法的有效性. 本文主要研究的是脉冲间隔以内的时滞, 大于脉冲间隔的时滞脉冲随机系统的稳定性问题有待进一步研究.

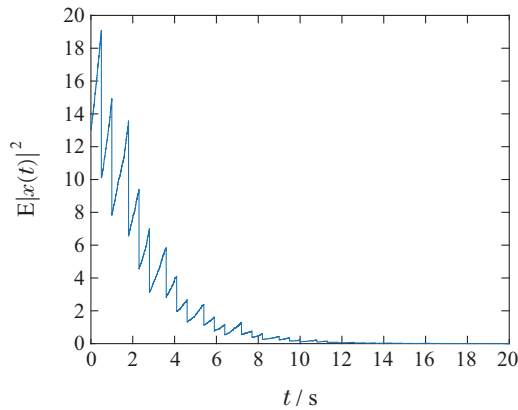


图4 均方轨迹图  $a = \frac{1}{4}$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $b = 0.8$

Fig. 4 Mean-square trajectory plot with  $a = \frac{1}{4}$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $b = 0.8$

## 参考文献:

- [1] BAINOV D, SIMEONOV P. *Systems With Impulse Effect: Stability Theory and applications*. Chichester: Ellis Horwood, 1989.
- [2] HESPANHA J, LIBERZON D, TEEL A. Lyapunov conditions for input-to state stability of impulsive systems. *Automatica*, 2008, 44(11): 2735 – 2744.
- [3] GUAN Z, LIU Z, FENG G, et al. Impulsive consensus algorithms for second-order multi-agent networks with sampled information. *Automatica*, 2012, 48(7): 1397 – 1404.
- [4] CHEN H, SUN J. Stabilization, controllability and optimal control of Boolean networks with impulsive effects and state constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(3): 806 – 811.
- [5] LI X, PENG D, CAO J. Lyapunov stability for impulsive systems via event-triggered impulsive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(11): 4908 – 4913.
- [6] XU Z, LI X, STOJANOVIC V. Exponential stability of nonlinear state-dependent delayed impulsive systems with applications. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2021, 42: 101088.
- [7] MAO X. *Stochastic Differential Equations and Applications*. second ed. Chichester, UK: Horwood Publishing, 2007.
- [8] LI W, QI X, PAN M, et al. Razumikhin-type theorems on exponential stability of stochastic functional differential equations on networks. *Neurocomputing*, 2014, 131(5): 278 – 285.
- [9] ZHU Q. Stability analysis of stochastic delay differential equations with Lévy noise. *Systems Control & Letters*, 2018, 118: 62 – 68.
- [10] SONG R, ZHU Q. Stability of linear stochastic delay differential equations with infinite Markovian switchings. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2018, 28(3): 825 – 837.
- [11] HU W, ZHU Q. Moment exponential stability of stochastic nonlinear delay systems with impulse effects at random times. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2019, 29(12): 3809 – 4284.
- [12] LI X, WONG T K L, CHEN R T Q, et al. Scalable gradients and variational inference for stochastic differential equations. *Symposium on Advances in Approximate Bayesian Inference*. Vancouver, Canada: JMLR, 2019: 118: 2640 – 3498.
- [13] DINESHKUMAR C, UDHAYAKUMAR R, VIJAYAKUMAR V, et al. A discussion on the approximate controllability of Hilfer fractional neutral stochastic integro-differential systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 142: 110472.
- [14] SABIR Z. Stochastic numerical investigations for nonlinear three-species food chain system. *International Journal of Biomathematics*, 2022, 15(4): 2250005.
- [15] YAO F, CAO J, CHENG P, et al. Generalized average dwell time approach to stability and input-to-state stability of hybrid impulsive stochastic differential systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2016, 22: 147 – 160.
- [16] YAO F, CAO J, LI Q, et al. Exponential stability analysis for stochastic delayed differential systems with impulsive effects: Average impulsive interval. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(1): 1 – 13.
- [17] ZHU Q, WANG H. Output feedback stabilization of stochastic feed-forward systems with unknown control coefficients and unknown output function. *Automatica*, 2018, 87: 166 – 175.
- [18] WANG B, ZHU Q. Stability analysis of Markov switched stochastic differential equations with both stable and unstable subsystems. *Systems & Control Letters*, 2017, 105: 55 – 61.
- [19] HU L, REN Y, SAKTHIVEL R. Stability of square-mean almost automorphic mild solutions to impulsive stochastic differential equations driven by G-Brownian motion. *International Journal of Control*, 2020, 93(12): 3016 – 3025.
- [20] LIU J, XU W. An averaging result for impulsive fractional neutral stochastic differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 2021, 114: 106892.
- [21] CAO W, ZHU Q. Razumikhin-type theorem for  $p$ th exponential stability of impulsive stochastic functional differential equations based on vector Lyapunov function. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2021, 39: 100983.
- [22] TRAN K, NGUYEN D. Exponential stability of impulsive stochastic differential equations with Markovian switching. *Systems Control & Letters*, 2022, 162: 105178.
- [23] LI X, WU J. Stability of nonlinear differential systems with state-dependent delayed impulses. *Automatica*, 2016, 64: 63 – 69.
- [24] WANG Y, LU J, LOU Y. Halanay-type inequality with delayed impulses and its application. *Science China Information Sciences*, 2019, 62: 1 – 10.
- [25] JIANG B, LU J, LIU Y. Exponential stability of delayed systems with average-delay impulses. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2020, 58(6): 3763 – 3784.
- [26] LU J, HO D, CAO J. A unified synchronization criterion for impulsive dynamical networks. *Automatica*, 2010, 46(7): 1215 – 1221.
- [27] LI X, SONG S, WU J. Exponential stability of nonlinear systems with delayed impulses and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64: 4024 – 4034.
- [28] LIU B. Stability of solutions for stochastic impulsive systems via comparison approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2128 – 2133.
- [29] ZHOU B. On asymptotic stability of linear time-varying systems. *Automatica*, 2016, 68: 266 – 276.

## 作者简介:

谢本旺 硕士研究生, 研究方向为随机系统的稳定性, E-mail: 1765290809@qq.com;

姚凤麒 博士, 硕士生导师, 研究方向为随机混杂系统的稳定性与控制, E-mail: yaofengqi\_ahut@163.com;

程培 博士, 研究方向为随机系统控制理论与应用, E-mail: chengpei\_pi@163.com.