

强化学习驱动下的柔性机械臂双时间尺度组合控制

刘城焱¹, 胡健^{1†}, 姚建勇¹, 谭天乐², 刘宇², 林家伟¹

(1. 南京理工大学机械工程学院, 江苏南京 210094; 2. 上海航天控制技术研究所, 上海 201109)

摘要: 本文研究柔性机械臂的轨迹跟踪和振动抑制问题. 首先, 基于Lagrange法和假设模态法建立柔性机械臂的动力学模型. 然后, 利用奇异摄动理论将模型分解为描述刚体运动的慢时间尺度子系统和描述柔性振动的快时间尺度子系统, 针对慢子系统建立以滑模变结构为基础, 径向基神经网络估计模型参数, 干扰观测器估计扰动和模型不确定性的刚性复合控制器; 快子系统建立了以最优控制为基础, 使用强化学习在线获取最优控制解的柔性控制器. 通过Lyapunov稳定性理论分别证明了不同时间尺度下的系统稳定性, 将在不同时间尺度下的控制器进行叠加, 获得原系统状态的组合控制器. 最后, 通过实验结果对比表明, 所设计的组合控制方法更具优越性.

关键词: 柔性机械臂; 轨迹跟踪; 振动抑制; 神经网络; 干扰观测器; 强化学习

引用格式: 刘城焱, 胡健, 姚建勇, 等. 强化学习驱动下的柔性机械臂双时间尺度组合控制. 控制理论与应用, 2025, 42(3): 541 – 552

DOI: 10.7641/CTA.2023.30349

Dual time scale combination control of flexible manipulator driven by reinforcement learning

LIU Cheng-yan¹, HU Jian^{1†}, YAO Jian-yong¹, TAN Tian-le², LIU Yu¹, LIN Jia-wei¹

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;

2. Shanghai Aerospace Control Technology Institute, Shanghai 201109, China)

Abstract: In this paper, the trajectory tracking and vibration suppression of flexible manipulators are studied. Firstly, the dynamic model of the flexible manipulator is established based on Lagrange method and assumed mode method. Then, the model is decomposed into a slow time scale subsystem to describe the rigid body motion and a fast time scale subsystem to describe the flexible vibration by using the singular perturbation theory. For the rigid body subsystem, a rigid composite controller based on sliding mode variable structure, radial basis neural network to estimate model parameters, and disturbance observer to estimate disturbance and model uncertainty is established; the fast subsystem establishes a flexible controller that uses reinforcement learning and optimal control to obtain the optimal control solution online. The stability of the system under different time scales is proved by Lyapunov stability theory, and the controller under different time scales is superimposed to obtain the combined controller of the original system state. Finally, the experimental results show that the proposed combined control method is superior.

Key words: flexible manipulator; trajectory tracking; vibration suppression; neural network; disturbance observer; reinforcement learning

Citation: LIU Chengyan, HU Jian, YAO Jianyong, et al. Dual time scale combination control of flexible manipulator driven by reinforcement learning. *Control Theory & Applications*, 2025, 42(3): 541 – 552

1 引言

随着科技的不断发展, 机械臂被广泛用于工业^[1]、航空航天^[2]等各种领域. 刚性机械臂由于臂杆多用刚度较大的材料, 且臂杆形状短而粗以保证强度, 造就了机械臂负载能力大、位置精度好等优势. 如今

已被大量应用到制造业, 但随着生产需求的不断提高, 机械臂的一些不足也逐渐显现出来, 例如: 运动不灵活、速度低、成本高、自重较大等. 相比之下, 柔性机械臂比刚性机械臂具有许多优势: 它们需要更少的材料、更轻的重量、更高的操作速度、更易操作和运输、

收稿日期: 2023-05-22; 录用日期: 2023-11-24.

[†]通信作者. E-mail: hujiannjust@163.com; Tel.: +86 13813970598.

本文责任编辑: 王鄂维.

国家自然科学基金项目(51975294), 中央高校基本科研业务费专项项目(30922010706, 2023101001)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (51975294) and the Fundamental Research Funds for Central Universities (30922010706, 2023101001).

操作更安全、总体成本更低、有效载荷与机器人重量比更高^[3]。但随之而来又出现了由于增加了柔性, 臂杆刚度降低, 导致柔性连杆机械臂在运动时会发生弹性形变和振动, 影响了轨迹跟踪的精度和定位精度; 若末端负载随着任务发生变化, 将进一步扩大系统中的不确定性。柔性机械臂的高精度运动控制一直作为近年来的研究热点^[4], 因此有必要为柔性机械臂建立一种考虑所有这些因素的综合动力学模型, 再通过控制技术进行优化补偿。

目前控制方法主要建立在两类研究基础上, 一类是基于柔性机械臂刚柔耦合模型直接设计控制器; 另一类是基于柔性机械臂的解耦模型, 分别考虑机械臂的轨迹跟踪和振动抑制^[5]。对于刚柔耦合模型可直接采用滑模控制^[6-7]、神经网络^[8-9]、自适应控制^[10-11]等方法设计控制器。缺点是模型结构复杂, 控制器设计过程往往需要主观确定多个参数, 难以获得最优性能^[12]。而对于柔性机械臂的解耦模型分别在不同的时间尺度下采用不同的控制方法设计控制器, 最终通过叠加控制器得到原系统状态的组合控制器。针对柔性机械臂的轨迹跟踪和振动抑制, 一般设计基于慢子系统的轨迹跟踪控制器和基于快子系统的振动抑制控制器。文献[13]采用奇异摄动控制方法对柔性连杆机械臂的运动进行控制, 提出了一种基于快子系统模型设计线性二次型最优控制实现对柔性机械臂的振动抑制, 慢子系统设计了基于图像的控制。文献[14]基于奇异摄动理论, 在快、慢时间尺度下分别设计滑模控制器, 实现对冗余并联机器人的运动控制。文献[15]分别在快慢子系统下采用自适应积分滑模控制器的方法实现柔性机械臂的高精度运动。

本文基于以上分析, 基于Lagrange法和假设模态法建立数学模型, 之后根据奇异摄动理论将模型解耦为慢子系统和快子系统, 针对慢子系统建立以滑模为基础, 径向基神经网络估计模型参数, 干扰观测器估计扰动和模型不确定性的刚性复合控制器来跟踪指定角度; 针对快子系统建立以强化学习和最优控制在线获取最优控制解的柔性复合控制器来抑制柔性振动。利用Lyapunov稳定性理论证明了所提出的控制方法可保证跟踪误差的有界性和闭环系统的稳定性。本文的创新点如下:

1) 与现有的大多数机械臂模型相比, 本文建立了考虑重力影响又考虑粘性阻尼影响的模型, 不仅可以提高模型的准确性, 而且使机械臂的仿真结果更加真实和逼真, 更好地设计和优化机械臂控制算法, 实现更高的运动控制精度和稳定性。

2) 针对快子系统, 目前都是通过最优控制(快子系统完全状态可控)或其他常用非线性控制, 使快子系统的状态趋近于0, 以达到振动抑制的目的, 但是在一个

快子系统中, 慢状态变量却扮演参数的角色, 会引起模型不确定性、系统不稳定、控制困难、控制性能下降等问题, 另外系统振动测量误差不可避免, 且分解后的振动频率与原系统振动频率存在较大误差, 难以求得精确的快时间尺度模型, 因此, 为了更好的抑制振动, 本文选用强化学习和最优控制以实时得到最优控制解, 可以有效克服系统模型不确定性和外界扰动, 提高柔性机械臂控制精度。

3) 针对快子系统的状态量模态坐标, 目前都是通过传感器获得, 但噪声以及数据处理带来的实时性问题都会给控制器使用这些测量值带来巨大挑战。因此本文通过有效的扩张状态观测器(extended state observer, ESO)对机械臂快子系统模态坐标及其时间导数进行了观测。

本文最后通过单连杆柔性臂实验表明设计的组合控制器具有较好的轨迹跟踪和振动抑制效果, 系统整体控制精度更高。

2 动力学模型及刚柔子系统模型

n 连杆柔性机械臂物理模型如图1所示。图中: (X_i, Y_i) 为连杆 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的刚性坐标系, (x_i, y_i) 为固连在柔性机械臂上的随动坐标系; L_i 代表连杆 i 的长度, 最末端为自由端且末端带有可视为质点的负载; m 为负载质量, 是一个不确定量, 根据任务不同进行变化; 各连杆处的电机产生转矩 τ_i 用于驱动柔性机械臂做控制运动; θ_i 为柔性连杆 i 对应的旋转角度; $y_i(x_i, t)$ 为柔性连杆 i 在随动坐标系下 x_i 处对应的弹性形变。

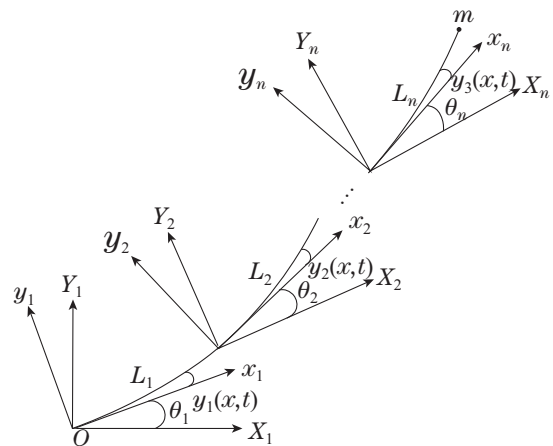


图1 柔性机械臂物理模型

Fig. 1 Physical model of flexible manipulator

根据假设模态法, 任意时刻 t 的弹性变形量 $y(x, t)$ 可以写成如下形式^[16]:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) q_j(t),$$

其中: $\varphi_j(x)$ 为系统的实际模态函数, 但实际上由于无法得到等原因而带以假设模态; $q_j(t)$ 为与假设模态所

对应的广义坐标. 在实际工程中一般选取前2阶作为近似处理即可满足所需精度要求^[17].

将柔性机械臂视为欧拉-伯努利梁处理, 忽略轴向变形的影响, 通过振动方程可分别得出模态函数和对应广义模态坐标的微分方程^[18].

选取旋转角度 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_n]^T$ 和振动模态坐标 $\boldsymbol{q} = [q_{11} \ q_{12} \ q_{21} \ q_{22} \ \cdots \ q_{n1} \ q_{n2}]^T$ 作为系统广义坐标, 应用第2类Lagrange方程可得柔性机械臂动力学方程

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_\theta \\ \boldsymbol{f}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_\theta \\ \boldsymbol{G}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau + d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{\theta\theta} & m_{\theta q} \\ m_{\theta q}^T & m_{qq} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_\theta & 0 \\ 0 & b_q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix},$$

其中: \mathbf{M} 为质量正定矩阵, \mathbf{B} 为系统阻尼矩阵, \mathbf{K} 为刚度矩阵, $\boldsymbol{f} = [f_\theta \ f_q]^T$ 为科氏力和向心力矩阵, $\boldsymbol{G} = [G_\theta \ G_q]^T$ 为重力矩阵, τ 为电机产生的转矩且 $\tau = k_u u$, k_u 为电机力矩增益系数, u 为各连杆电机输入的控制电压. d 为各连杆当中的综合干扰.

令 $\mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$, 可将机械臂数学模型化为

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_u u + d - G_\theta - f_\theta - b_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ -kq - G_q - f_q - b_q \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix}.$$

将上式动力学模型展开可得

$$\ddot{\theta} = H_{11}(k_u u + d) - H_{11}G_\theta - H_{11}f_\theta - H_{11}b_\theta \dot{\theta} - H_{12}kq - H_{12}G_q - H_{12}f_q - H_{12}b_q \dot{q}, \quad (2)$$

$$\ddot{q} = H_{21}(k_u u + d) - H_{21}G_\theta - H_{21}f_\theta - H_{21}b_\theta \dot{\theta} - H_{22}kq - H_{22}G_q - H_{22}f_q - H_{22}b_q \dot{q}. \quad (3)$$

定义

$$\varepsilon = 1/k_{\min}, \quad \varepsilon z = q, \quad \beta_1 = \varepsilon k, \quad \beta_2 = \varepsilon b_q,$$

其中: k_{\min} 为刚度矩阵 \mathbf{K} 中元素的最小值^[19-20], ε 为奇异摄动参数, z 为快变状态向量.

将上述定义的参数代入动力学模型(2)-(3), 即化为多时间尺度系统模型

$$\ddot{\theta} = H_{11}(k_u u + d) - H_{11}G_\theta - H_{11}f_\theta - H_{11}b_\theta \dot{\theta} - H_{12}\beta_1 z - H_{12}G_q - H_{12}f_q - H_{12}\beta_2 \dot{z}, \quad (4)$$

$$\varepsilon \ddot{z} = H_{21}(k_u u + d) - H_{21}G_\theta - H_{21}f_\theta - H_{21}b_\theta \dot{\theta} - H_{22}\beta_1 z - H_{22}G_q - H_{22}f_q - H_{22}\beta_2 \dot{z}. \quad (5)$$

基于奇异摄动理论, 如果 ε 足够小, 则可以将多时间尺度数学模型分解为两个子系统. 形式上, 通过设置 $\varepsilon =$

0, 将 z^s 回代到慢时间尺度系统状态方程, 系统的慢子系统表达式可以得到如下所示:

$$\ddot{\bar{\theta}} = [-H_{12}^s (H_{22}^s)^{-1} H_{21}^s + H_{11}^s] \cdot [(k_u u_s + d^s) - G_\theta^s - f_\theta^s - b_\theta^s \dot{\bar{\theta}}], \quad (6)$$

其中: 上标 s 表示慢动态, u_s 为慢子系统控制器输出, $\bar{\theta}$ 为慢时间尺度下的估计值, d^s 为慢子系统下的综合干扰. 一般认为电机存在的外界干扰相对于系统动态变化缓慢, 将干扰 d 认为只存在于系统的慢时间尺度模型当中^[21], 但考虑到更一般性, 快时间尺度模型不可避免存在干扰, 故本文将干扰也进行时间尺度分离.

当 $\varepsilon = 0$ 时, 由于 \mathbf{H} 矩阵是 \mathbf{M} 矩阵的逆, 因此进一步可以验证 $(M_{11}^s)^{-1} = -H_{12}^s (H_{22}^s)^{-1} H_{21}^s + H_{11}^s$, 令 $\mathbf{J} = [-H_{12}^s (H_{22}^s)^{-1} H_{21}^s + H_{11}^s]^{-1}$, 上式慢子系统模型可重写为

$$\mathbf{J} \ddot{\bar{\theta}} + b_\theta^s \dot{\bar{\theta}} + G_\theta^s + f_\theta^s = k_u u_s + d^s. \quad (7)$$

为分离快时间尺度模型, 现引入时间尺度变量 $\mu = t/\sqrt{\varepsilon}$, 根据文献[22-23], 此时可将慢变量 θ 看做常量, 即

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\mu} = \frac{d^2\bar{\theta}}{d\mu^2} = 0, \quad \frac{dz^s}{d\mu} = \frac{d^2z^s}{d\mu^2} = 0.$$

定义 $z = z^s + z^f$, 将对 t 求导改为对 μ 求导, 并将 z^s 代入, 则快时间尺度下系统状态方程可化为

$$\frac{d^2z^f}{d\mu^2} = -H_{22}^s \beta_1 z^f - H_{22}^s \beta_2 \dot{z}^f + H_{21}^s (k_u u_f + d^f). \quad (8)$$

至此, 基于奇异摄动理论的快慢子系统模型已分别得出, 通过对每个系统模型设计控制器得到对应的控制量, 最后经过叠加组合控制器可得原系统状态方程(1)的控制 $u = u_s + u_f$.

3 控制器设计

3.1 慢子系统控制策略

首先对于慢子系统的数学模型(7)改写为状态方程的形式. 令 $x_{s1} = \bar{\theta}$, $x_{s2} = \dot{\bar{\theta}}$, 则系统状态方程可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_{s1} = x_{s2}, \\ \dot{x}_{s2} = \xi + J_0^{-1} U_s + d_1, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\xi = J^{-1}(-f_\theta^s - G_\theta^s - b_\theta^s \dot{\bar{\theta}})$, 之后通过神经网络估计此项, 可避免依赖数学模型的问题. 为方便后续计算, 令 $U_s = k_u u_s$, J_0 为 J 的名义值. 由于模型参数具有不准确性, 故将模型不确定性也加入, 则 $d_1 = J^{-1}d^s + (J^{-1} - J_0^{-1})U_s$, 之后通过干扰观测器估计此项 d_1 和神经网络误差, 即

$$\Delta = d_1 + \varepsilon. \quad (10)$$

3.1.1 慢子系统扰动观测器设计

首先,使用径向基函数(radial basis function, RBF)神经网络来逼近系统非线性项 ξ ,选取 $X_s=[x_{s1} \ x_{s2}]^T$ 作为输入向量,取隐含层节点数 $n=10$,则存在常数向量 ω ,使得下式成立:

$$\xi = \omega^T \varphi(X_s) + \varepsilon, \quad (11)$$

式中: ω 代表神经网络最优权值; ε 为逼近误差; $\varphi(X_s)$ 为神经网络基函数,具体形式如式(12)所示:

$$\varphi_j = \exp\left(-\frac{\|X_s - C_j\|^2}{2b_j^2}\right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (12)$$

式中: $C_j=[c_{j1} \ c_{j2} \ \dots \ c_{jn}]^T$ 表示隐含层第 j 个节点的中心矢量; b_j 为第 j 个节点的基宽度参数, $b_j > 0$.

由于理想权值无法准确知道,现定义估计误差

$$\begin{cases} \tilde{x}_{s2} = x_{s2} - \hat{x}_{s2}, \\ \dot{\hat{x}}_{s2} = \hat{\omega}^T \varphi(X_s) + J_0^{-1} U_s + \hat{\Delta} + k_p \tilde{x}_{s2}, \end{cases} \quad (13)$$

其中: $\hat{\omega}$ 和 $\hat{\Delta}$ 为 ω 和 Δ 的估计值,对应误差表达式分别为: $\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega}$, $\tilde{\Delta} = \Delta - \hat{\Delta}$; $k_p > 0$ 为待设计参数.

设计干扰观测器用于估计 Δ ,干扰观测器模型为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\Delta}} = k_d(x_{s2} - z_d), \\ \dot{z}_d = \hat{\omega}^T \varphi(X_s) + J_0^{-1} U_s + \hat{\Delta} - k_d^{-1}(\gamma_z \tilde{x}_{s2} + s), \end{cases} \quad (14)$$

其中: $k_d > 0$ 为观测器的增益, $\gamma_z > 0$ 为待设计参数. s 为滑模面函数,具体定义在下面.

设计神经网络权值更新律为

$$\dot{\hat{\omega}} = \gamma[\varphi(X)(s + \gamma_z \tilde{x}_{s2}) - \sigma \hat{\omega}], \quad (15)$$

其中 $\gamma > 0$ 和 $\sigma > 0$ 为待设计参数.权值 ω 的误差动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\omega}} &= \dot{\omega} - \dot{\hat{\omega}} = -\dot{\hat{\omega}} = \\ &= -\gamma[\varphi(X_s)(s + \gamma_z \tilde{x}_{s2}) - \sigma \hat{\omega}]. \end{aligned} \quad (16)$$

为得到 Δ 的更新律,将式(9)(11)(14)联立求得

$$\dot{\hat{\Delta}} = k_d(\tilde{\omega}^T \varphi(X_s) + \tilde{\Delta}) + \gamma_z \tilde{x}_{s2} + s, \quad (17)$$

因此干扰观测器估计 Δ 的误差动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Delta}} &= \dot{\Delta} - \dot{\hat{\Delta}} = \\ &= \dot{\Delta} - k_d(\tilde{\omega}^T \varphi(X_s) + \tilde{\Delta}) - \gamma_z \tilde{x}_{s2} - s. \end{aligned} \quad (18)$$

3.1.2 慢子系统控制器设计

定义旋转角度的跟踪误差

$$e = x_{s1} - x_{1d}, \quad (19)$$

$$\dot{e} = \dot{x}_{s1} - \dot{x}_{1d}, \quad (20)$$

其中: x_{1d} 和 \dot{x}_{1d} 是期望角度信号和相应导数, e 为跟踪误差.

定义滑模面函数

$$s = ce + \dot{e}, \quad (21)$$

其中 $c > 0$ 为待设计参数.对式(21)求导可得

$$\begin{aligned} \dot{s} &= c\dot{e} + \ddot{e} = c\dot{e} + \dot{x}_{s2} - \ddot{x}_{1d} = \\ &= c\dot{e} + \xi + J_0^{-1} U_s + d_1 - \ddot{x}_{1d}. \end{aligned} \quad (22)$$

将式(10)和式(11)代入式(22)可得

$$\dot{s} = c\dot{e} + \omega^T \varphi(X_s) + J_0^{-1} U_s - \ddot{x}_{1d} + \Delta. \quad (23)$$

选择滑模面的趋近律函数为指数趋近方式,即

$$\dot{s} = -k_1 s - k_2 \text{sgn } s. \quad (24)$$

将式(23)与式(24)联立可得慢子系统的控制律为

$$U_s = J_0[-k_1 s - k_2 \text{sgn } s - c\dot{e} - \hat{\omega}^T \varphi(X_s) - \hat{\Delta} + \ddot{x}_{1d}]. \quad (25)$$

为方便后续稳定性证明,现得到 \dot{s} 和 $\dot{\tilde{x}}_2$ 的动力学方程为

$$\dot{s} = -k_1 s - k_2 \text{sgn } s + \tilde{\omega}^T \varphi(X_s) + \tilde{\Delta}, \quad (26)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{\omega}^T \varphi(X_s) + \tilde{\Delta} - k_p \tilde{x}_{s2}. \quad (27)$$

定理 1 对于式(9)的慢子系统数学模型,采用滑模面(21)、非线性干扰观测器(14)、控制器(25)、神经网络更新律(15),可以保证刚性子系统内所有信号有界,同时系统稳定.具体证明请看第4节.

3.2 快子系统控制策略

传统的振动抑制控制方法需要依赖精确的数学模型,当快子系统中慢状态变量充当参数导致无法得到精确数学模型时,传统的控制方法无法得到较好的振动抑制效果,采用强化学习和最优控制的方法成了一种必要选择,使用强化学习和最优控制可以不需要非常依赖模型,同时保持性能函数最小的情况下在线获取最优控制解.

3.2.1 快子系统扩张状态观测器设计

虽然测量模态坐标可以通过使用应变计等传感器来完成,但是却涉及噪声对测量造成的影响和一定的成本问题.设计扩张状态观测器是估计模态坐标及其时间导数的一种最直接有效方法.

选取柔性机械臂的运动角度 θ 、角速度 $\dot{\theta}$ 、振动量 q 以及振动速度 \dot{q} 作为状态量,并定义状态向量 $x = [x_1^T \ x_2^T \ x_3^T \ x_4^T]^T = [\theta^T \ \dot{\theta}^T \ q^T \ \dot{q}^T]^T$,则可将式(2)和式(3)化为状态空间方程,即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = H_{11}(k_u u + d) - H_{11}(G_\theta + f_\theta + b_\theta x_2) - H_{12}(k x_3 + G_q + f_q + b_q x_4), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = H_{21}(k_u u + d) - H_{21}(G_\theta + f_\theta + b_\theta x_2) - H_{22}(k x_3 + G_q + f_q + b_q x_4). \end{cases} \quad (28)$$

为方便观测器的设计, 将式(28)写为矩阵形式

$$\dot{x} = F(x) + Q(x)(k_u u + d), \quad (29)$$

式中 $F(x)$ 和 $Q(x)$ 为关于状态向量 x 的非线性函数矩阵, 表达式为

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -H_{11}(G_\theta + f_\theta + b_\theta x_2) - \\ H_{12}(kx_3 + G_q + f_q + b_q x_4) \\ x_4 \\ -H_{21}(G_\theta + f_\theta + b_\theta x_2) - \\ H_{22}(kx_3 + G_q + f_q + b_q x_4) \end{bmatrix},$$

$$Q(x) = [0^T \ H_{11}^T \ 0^T \ H_{21}^T]^T.$$

设计非线性状态观测器

$$\dot{\hat{x}} = \hat{F}(x_o) + \hat{Q}(x_o)(k_u u) + K_o \tilde{x}_\theta, \quad (30)$$

其中: $\hat{x} = [\hat{x}_1^T \ \hat{x}_2^T \ \hat{x}_3^T \ \hat{x}_4^T]^T = [\hat{\theta}^T \ \hat{\theta}^T \ \hat{q}^T \ \hat{q}^T]^T$ 是状态空间方程式(28)状态向量的估计值, $x_o = [x_1^T \ x_2^T \ \hat{x}_3^T \ \hat{x}_4^T]^T = [\theta^T \ \theta^T \ \hat{q}^T \ \hat{q}^T]^T$ 是状态向量能实际可用的值, $\tilde{x}_\theta = [(x_1^T - \hat{x}_1^T) \ (x_2^T - \hat{x}_2^T)]^T = [(\theta^T - \hat{\theta}^T) \ (\hat{\theta}^T - \dot{\theta}^T)]^T$ 是角度变量的估计误差, K_o 为观测增益常数矩阵.

式(30)设计的观测器具备一定的抗干扰能力, 因此, 即使存在干扰, 观测器仍能保持良好的性能. 观测器的稳定性和收敛性证明具体可查看文献[24].

3.2.2 快子系统控制器设计

对于考虑了快子系统中扰动的数学模型(8), 首先选取系统对应的状态变量 $x_f = [x_{f1}^T \ x_{f2}^T]^T$, $x_{f1} = z^f$, $x_{f2} = \dot{z}^f$, 则状态空间方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}^f \\ \dot{z}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{2n \times 2n} \\ -H_{22}^s \beta_1 & -H_{22}^s \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^f \\ \dot{z}^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H_{21}^s \end{bmatrix} (U_f + d^f), \quad (31)$$

式中: 令 $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & I_{2n \times 2n} \\ -H_{22}^s \beta_1 & -H_{22}^s \beta_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ H_{21}^s \end{bmatrix}$, 则有 $\|\mathbf{E}\| \leq b_E$, $\|\mathbf{F}\| \leq b_F$.

现需要找到一个反馈控制律 $U_f = k_u u_f$, 使得非线性闭环系统渐进稳定同时代价函数 C 最小, 即

$$\min C = \int_t^\infty (D^2 + x_f^T \mathbf{Q} x_f + (U_f)^T \mathbf{R} U_f) d\mu, \quad (32)$$

式中: \mathbf{Q} 为半正定矩阵, \mathbf{R} 为正定矩阵, 即 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$. 由于快子系统中的扰动非常小, 可认为扰动是有界的, 即 $\|d^f\| \leq D$. 由于上式非线性控制难以直接求解, 根据文献[25]可知, 通过求解最优控制问题可间接得到原控制问题的解.

首先基于代价函数(32)得到最优控制的解, 定义哈密顿函数

$$H(x_f, U_f, C) = D^2 + x_f^T \mathbf{Q} x_f + (U_f)^T \mathbf{R} U_f + C_x^T (E x_f + F U_f),$$

式中 $C_x = \frac{\partial C}{\partial x_f}$, 因此可得HJB方程

$$\begin{aligned} & \min_{U_f} H(x_f, U_f, C_x) = \\ & \min_{U_f} [D^2 + x_f^T \mathbf{Q} x_f + (U_f)^T \mathbf{R} U_f + \\ & (C_x^*)^T (E x_f + F U_f)] = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

由 $\frac{\partial H}{\partial U_f} = 0$ 解方程, 可得最优控制解为

$$U_f^* = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} F^T C_x^*, \quad (34)$$

由于 C_x^* 是未知的, 故使用强化学习的思想设计一个评价神经网络用于在线估计最优代价函数 $C^*(x_f)$, 即

$$C^*(x_f) = \omega_c^T \varphi_c(x_f) + \varepsilon_c(x_f), \quad (35)$$

式中: ω_c 为理想的评价神经网络权值, φ_c 为回归向量, ε_c 评价神经网络的逼近误差.

对式(35)最优代价函数求偏导得

$$C_x^*(x) = (\nabla \varphi_c(x_f))^T \omega_c + \nabla \varepsilon_c(x_f), \quad (36)$$

其中: $\nabla \varphi_c(x_f) = \frac{\partial \varphi_c(x_f)}{\partial x_f}$, $\nabla \varepsilon_c(x_f) = \frac{\partial \varepsilon_c(x_f)}{\partial x_f}$, 且 $\|\nabla \varphi_c(x_f)\| \leq \sigma_\varphi$, $\|\nabla \varepsilon_c(x_f)\| \leq \sigma_\varepsilon$.

因此, 将式(36)代入式(34), 可将最优控制解重写为

$$U_f^* = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} F^T (\omega_c^T (\nabla \varphi_c(x_f)) + \nabla \varepsilon_c(x_f)). \quad (37)$$

由于评价神经网络的理想权值未知, 只能通过自适应律使估计权值不断趋近收敛到最优权值. 定义评价神经网络的估计权值为 $\hat{\omega}_c$, 可得估计最优代价函数和相应偏导函数为

$$\hat{C}(x_f) = \hat{\omega}_c^T \varphi_c(x_f), \quad (38)$$

$$\hat{C}_x(x_f) = \hat{\omega}_c^T (\nabla \varphi_c(x_f)), \quad (39)$$

可得快子系统的实际最优控制

$$\hat{U}_f = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} F^T \hat{\omega}_c^T (\nabla \varphi_c(x_f)). \quad (40)$$

现在开始设计自适应律, 以使估计权值收敛到理想权值. 首先, 将式(36)代入HJB方程(33)中, 可得

$$\begin{aligned} & D^2 + x_f^T \mathbf{Q} x_f + \omega_c^T \nabla \varphi_c(x_f) (E x_f + F U_f) + \\ & (U_f)^T \mathbf{R} U_f + \varepsilon_{\text{HJB}} = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

式中 $\varepsilon_{\text{HJB}} = \nabla \varepsilon_c^T(x_f) (E x_f + F U_f)$, 同时为后续计算方便, 定义

$$\begin{cases} \Xi = \nabla \varphi_c(x_f) (E x_f + F U_f), \\ \Theta = D^2 + x_f^T \mathbf{Q} x_f + (U_f)^T \mathbf{R} U_f. \end{cases} \quad (42)$$

将式(42)代入式(41)可得

$$\Theta = -\omega_c^T \Xi - \varepsilon_{\text{HJB}}. \quad (43)$$

观察式(43)易知评价神经网络权值 ω_c 具有线性参数化形式, 而据文献[26]可知此形式可利用在线学习方法“直接”估计.

为确定神经网络权值, 定义一个辅助回归矩阵 \mathbf{T} 和一个回归向量 \mathbf{h} , 以获得参数误差信息, 并将其用于构建自适应律中的参数估计, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = -l\mathbf{T} + \Xi\Xi^T, & \mathbf{T}(0) = 0, \\ \dot{\mathbf{h}} = -l\mathbf{h} + \Xi\Theta, & \mathbf{h}(0) = 0, \end{cases} \quad (44)$$

式中 $l > 0$ 为阻尼系数.

评价神经网络的自适应律可设计为

$$\dot{\hat{\omega}}_c = -\Gamma\mathbf{W}, \quad (45)$$

其中: $\Gamma > 0$ 为自适应增益, 辅助向量 \mathbf{W} 被设计为

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}\hat{\omega}_c + \mathbf{h}. \quad (46)$$

为方便后续稳定性证明, 现将式(43)代入式(44)可将回归变量 \mathbf{h} 重写为 $\mathbf{h} = -\mathbf{T}\omega_c + \bar{v}_1$. 因此可进一步得到

$$\dot{\bar{v}}_1 = -l\bar{v}_1 + \Xi\varepsilon_{\text{HJB}}. \quad (47)$$

定理 2 采用最优控制(40)和自适应律(45)的柔性子系统数学模型(8), 若评价神经网络的回归矩阵 \mathbf{T} 满足正定条件(即最小特征值 $\lambda_{\min}(\mathbf{T}) > \delta > 0$), 则神经网络估计权值 $\hat{\omega}_c$ 逐渐收敛到理想权值 ω_c , 且最优估计控制 U_f 也逐渐收敛到理想最优控制 U_f^* . 具体证明请看第4节.

3.3 组合控制器设计

上述分别基于快慢子系统数学模型设计了控制器, 系统总体控制框图如图2所示. 根据奇异摄动理论, 可得出原柔性机械臂动力学方程对应的控制器

$$U = U_s + U_f. \quad (48)$$

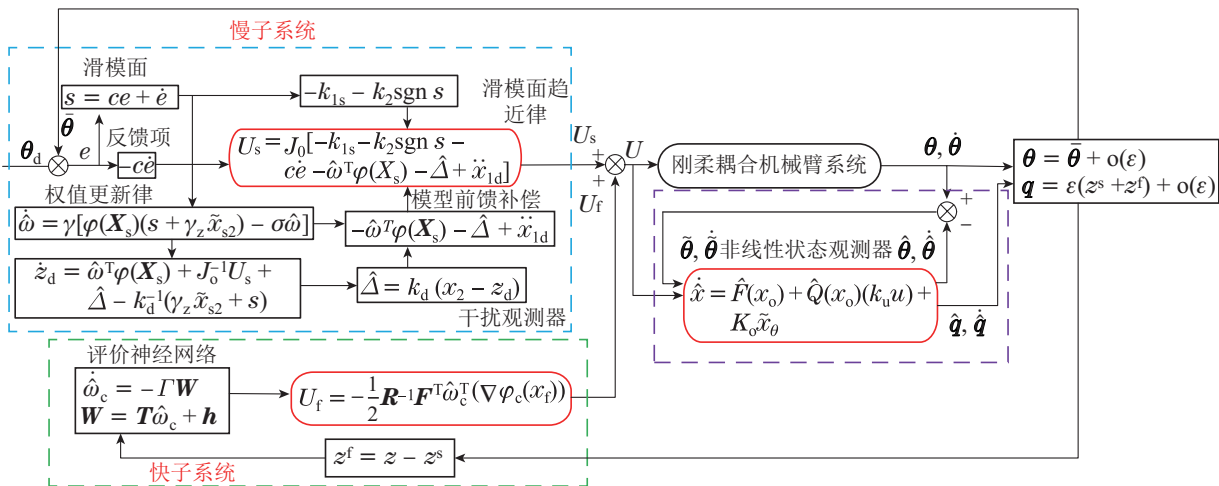


图2 系统总体控制框图

Fig. 2 Control block diagram of system

4 稳定性分析

现分别对单连杆柔性臂的定理1和定理2进行证明以说明正确性, 并进一步说明整体系统的稳定性.

定理1证明过程如下.

证 定义如下Lyapunov函数:

$$V_s(t) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4,$$

其中上式各项含义具体形式为: $V_1 = \frac{1}{2}s^2$, $V_2 = \frac{1}{2}\tilde{\Delta}^2$,

$$V_3 = \frac{1}{2\gamma}\text{tr}(\tilde{\omega}^T\tilde{\omega}), \quad V_4 = \frac{1}{2}\gamma_z\tilde{x}_{s2}^2.$$

利用式(23)(18)(15)(27), 可分别得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= s\dot{s} = \\ & s(\tilde{\omega}^T\varphi(X_s) - k_1s - k_2\text{sgn } s + \tilde{\Delta}), \\ \dot{V}_2 &= \tilde{\Delta}\dot{\tilde{\Delta}} = \end{aligned} \quad (49)$$

$$\tilde{\Delta}(\tilde{\Delta} - k_d(\tilde{\omega}^T\varphi(X) + \tilde{\Delta}) - \gamma_z\tilde{x}_{s2} - s), \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \frac{1}{\gamma}\text{tr}(\tilde{\omega}^T\dot{\tilde{\omega}}) = -\frac{1}{\gamma}\text{tr}(\tilde{\omega}^T\dot{\tilde{\omega}}) = \\ & -\tilde{\omega}^T\varphi(X_s)s - \tilde{\omega}^T\varphi(X_s)\gamma_z\tilde{x}_{s2} + \\ & \sigma\text{tr}(\tilde{\omega}^T\dot{\omega}) - \sigma\text{tr}(\tilde{\omega}^T\dot{\tilde{\omega}}), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= \gamma_z\tilde{x}_{s2}\dot{\tilde{x}}_{s2} = \\ & \gamma_z\tilde{x}_{s2}\tilde{\omega}^T\varphi(X_s) + \gamma_z\tilde{x}_{s2}\tilde{\Delta} - \gamma_z\tilde{x}_{s2}k_p\tilde{x}_{s2}. \end{aligned} \quad (52)$$

由式(49)–(52)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= -k_1s^2 - k_2\text{sgn } s s + \\ & \sigma\text{tr}(\tilde{\omega}^T\dot{\omega} - \tilde{\omega}^T\dot{\tilde{\omega}}) + \tilde{\Delta}\dot{\tilde{\Delta}} - \\ & k_d\tilde{\Delta}\tilde{\omega}^T\varphi(X_s) - k_d\tilde{\Delta}^2 - \gamma_zk_p\tilde{x}_{s2}^2. \end{aligned} \quad (53)$$

利用数学关系式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 可以得到如下不等式:

$$\begin{cases} \text{tr}(\tilde{\omega}^T \omega) \leq \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\omega}^T \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} \text{tr}(\omega^T \omega), \\ \tilde{\Delta} \dot{\Delta} \leq \frac{1}{2} v_1 \tilde{\Delta}^2 + \frac{1}{2v_1} \dot{\Delta}^2, \\ -\tilde{\Delta} \tilde{\omega}^T \varphi(X_s) \leq \frac{1}{2} v_2 \Phi \tilde{\Delta}^2 + \frac{1}{2v_2} \text{tr}(\tilde{\omega}^T \tilde{\omega}), \end{cases} \quad (54)$$

式中: $\|\varphi\|^2 \leq \Phi$, v_1 和 v_2 为任意正数. 根据不等式(54)可将式(53)继续化简为

$$\begin{aligned} \dot{V}_s \leq & -k_1 s^2 - k_2 |s| - \gamma_z k_p \tilde{x}_{s2}^2 + \frac{1}{2v_1} \dot{\Delta}^2 + \\ & \frac{\sigma}{2} \text{tr}(\omega^T \omega) - \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{k_d}{2v_2}\right) \text{tr}(\tilde{\omega}^T \tilde{\omega}) - \\ & \left(k_d - \frac{1}{2}v_1 - \frac{k_d}{2}v_2\Phi\right) \tilde{\Delta}^2. \end{aligned}$$

定义: $k_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{k_d}{2v_2}$, $k_4 = k_d - \frac{1}{2}v_1 - \frac{k_d}{2}v_2\Phi$. 观察上式可知, 通过选取合适的参数 σ , v_1 , v_2 , k_d 可使 $k_3 > 0$, $k_4 > 0$, 于是有

$$\begin{aligned} \dot{V}_s \leq & -k_1 s^2 - k_2 |s| - \gamma_z k_p \tilde{x}_{s2}^2 - k_3 \text{tr}(\tilde{\omega}^T \tilde{\omega}) - \\ & k_4 \tilde{\Delta}^2 + \frac{1}{2v_1} \dot{\Delta}^2 + \frac{\sigma}{2} \text{tr}(\omega^T \omega), \end{aligned}$$

令上式后两项为 $p = \frac{1}{2v_1} \dot{\Delta}^2 + \frac{\sigma}{2} \text{tr}(\omega^T \omega)$, p 有界, 且 $\lambda = \min[2k_1 \quad 2\gamma_k k_3 \quad 2k_4 \quad 2k_d]$, 则 \dot{V}_s 可得到

$$\dot{V}_s \leq -\lambda V_s + p. \quad (55)$$

根据有界性定理可得

$$V_s(t) \leq V_s(0)e^{-\lambda t} + \frac{p}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}), \quad (56)$$

因此, 当 $t \rightarrow \infty$, $V_s \rightarrow \frac{p}{\lambda}$, 故慢子系统内所有信号均为有界收敛, 系统实现了有界稳定. 证毕.

定理2证明过程如下.

证 定义如下Lyapunov函数:

$$V_f(t) = V'_1 + V'_2 + V'_3,$$

其中: $V'_1 = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_c^T \Gamma^{-1} \tilde{\omega}_c$, $V'_2 = \Gamma_1 x_f^T x_f + \eta C^*$, $V'_3 = \gamma_1 \tilde{v}_1^T \tilde{v}_1$. $\Gamma_1 > 0$, $\eta > 0$, $\gamma_1 > 0$.

利用式(45)–(46)(31)–(32), 可分别得到

$$\begin{aligned} \dot{V}'_1 = & \tilde{\omega}_c^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\omega}}_c = -\tilde{\omega}_c^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\omega}}_c = \tilde{\omega}_c^T W = \\ & -\tilde{\omega}_c^T T \tilde{\omega}_c + \tilde{\omega}_c^T \tilde{v}_1 \leq \\ & -\left(\delta - \frac{1}{2k_5}\right) \|\tilde{\omega}_c\|^2 + \frac{k_5}{2} \|\tilde{v}_1\|^2, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}'_2 \leq & 2\Gamma_1 b_E \|x_f\|^2 + \frac{k_5}{2} b_F^2 \sigma_\varphi \lambda_{\max}(R^{-1}) \|x_f\|^2 + \\ & \frac{1}{2k_5} \Gamma_1^2 b_F^2 \sigma_\varphi \lambda_{\max}(R^{-1}) \|\tilde{\omega}_c\|^2 + 2\|x_f\|^2 + \\ & \frac{1}{4} \Gamma_1^2 b_F^4 \lambda_{\max}(R^{-1}) \|\nabla \varepsilon_c\|^2 + \Gamma_1^2 b_F^2 \|U_f^*\|^2 - \\ & \eta \lambda_{\min}(Q) \|x_f\|^2 - \eta \lambda_{\min}(R) \|U_f^*\|^2, \end{aligned} \quad (58)$$

由式(47)和 $\varepsilon_{\text{HJB}} = \nabla \varepsilon_c^T(x_f)(E x_f + F U_f)$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}'_3 \leq & -2\gamma_1 l \|\tilde{v}_1\|^2 + \frac{1}{k_5} \gamma_1^2 \sigma_\varepsilon^2 b_E^2 \|\Xi\|^2 \|x_f\|^2 + k_5 \|\tilde{v}_1\|^2 + \\ & \frac{1}{4k_5} \gamma_1^2 b_F^2 \sigma_\varphi^2 b_\omega^2 \lambda_{\max}^2(R^{-1}) \|\Xi\|^2 \|\nabla \varepsilon_c\|^2, \end{aligned} \quad (59)$$

将上式(57)–(59)相加可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_f \leq & -\left(\delta - \frac{1}{2k_5} - \frac{1}{2k_5} \Gamma_1^2 b_F^2 \sigma_\varphi \lambda_{\max}(R^{-1})\right) \|\tilde{\omega}_c\|^2 - \\ & \left(2\gamma_1 l - \frac{7k_5}{2}\right) \|\tilde{v}_1\|^2 - (\eta \lambda_{\min}(R) - \Gamma_1^2 b_F^2) \|U_f^*\|^2 - \\ & (\eta \lambda_{\min}(Q) - 2\Gamma_1 b_E - \frac{k_5}{2} b_F^2 \sigma_\varphi \lambda_{\max}(R^{-1}) - \\ & 2\frac{1}{k_5} \gamma_1^2 \sigma_\varepsilon^2 b_E^2 \|\Xi\|^2) \|x_f\|^2 + \left(\frac{1}{4} \Gamma_1^2 b_F^4 \lambda_{\max}(R^{-1}) + \right. \\ & \left. \frac{1}{4k_5} \gamma_1^2 b_F^2 \sigma_\varphi^2 b_\omega^2 \lambda_{\max}^2(R^{-1}) \|\Xi\|^2\right) \|\nabla \varepsilon_c\|^2, \end{aligned}$$

其中 $k_5 > 0$ 且 $a^2 k_5 + \frac{b^2}{k_5} \geq 2ab$. 观察上式可知, 通过选取合适的参数 γ_1 , η , Γ_1 , k_5 , 可使

$$\begin{aligned} \dot{V}_f \leq & -a_1 \|\tilde{\omega}_c\|^2 - a_2 \|\tilde{v}_1\|^2 - a_3 \|U_f^*\|^2 - \\ & a_4 \|x\|^2 + a_5, \end{aligned} \quad (60)$$

式中 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 分别为对应项系数, 且 $a_1 \sim a_4$ 都大于0, 而 a_5 对应项的 $\nabla \varepsilon_c$ 趋近于0时, $a_5 \rightarrow 0$. 故 $\dot{V}_f < 0$, 因此系统是稳定的, 且系统内信号都为有界的.

证毕.

定理3 如果快子系统控制器 U_s 和慢子系统控制器 U_f 均可实现有界稳定, 则双时间尺度组合控制器 $U = U_s + U_f$ 也可实现有界稳定.

定义整体系统的Lyapunov函数为

$$V = \alpha V_s + \beta V_f,$$

其中 α 和 β 是非负权重, 且满足 $\alpha + \beta = 1$. 因此, 整个系统的稳定性分析可以在复合Lyapunov函数的基础上通过对快、慢子系统进行稳定性分析来完成^[27]. 根据定理1, 2可得 $\dot{V} \leq \alpha(-\lambda V_s + p)$, 因此整个系统有界稳定.

5 仿真实验与分析

为了验证所设计控制器的有效性和优越性, 利用MATLAB对几种常见复合控制器的仿真结果进行比较分析.

单连杆柔性臂仿真参数选择和实验物理数据一样, 柔性机械臂长度 $L = 0.5$ m, 宽度 $b = 0.0498$ m, 厚度 $h = 0.004$ m, 材料刚度 $E = 2 \times 10^{11}$ N/m², 线密度 $\rho = 1.52$ kg/m, 末端质量为0.25 kg, 重力加速度 $g = 9.8$ m/s².

选取跟踪误差最大值、平均值和标准差3项性能指标来综合评判不同控制器的跟踪效果, 其定义如下:

$$\begin{cases} M_e = \max_{i=1,2,3,\dots,n} \{|e_1(i)|\}, \\ \mu_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |e_1(i)|, \\ \sigma_e = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [|e_1(i)| - \mu_e]^2}. \end{cases} \quad (61)$$

首先验证原系统与分解后快、慢子系统之间的关系, 给定系统一个输入 $U = \sin t$, 查看原系统与分解后子系统状态之间的关系. 由图3可以看出, 柔性机械臂在慢子系统下的旋转角度与原系统近似相等, 符合奇异摄动理论得到的关系, 即 $\bar{\theta} \approx \theta$. 因此, 式(7)可以描述柔性机械臂的刚性轨迹运动.

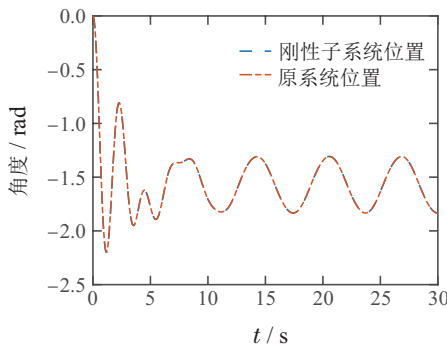


图3 原系统与慢子系统位置曲线

Fig. 3 Position curves of original system and slow subsystem

而对于原系统与分解后快子系统之间的关系, 设定控制量 $U = 0$, 初始模态坐标为 $q_1 = 0.01, q_2 = 0.001$. 由图4可知, 快子系统的振动状态与原系统的振动状态近似相等. 因此, 可以使用奇异摄动理论将原系统分解为描述轨迹跟踪的慢子系统和描述振动

抑制的快子系统.

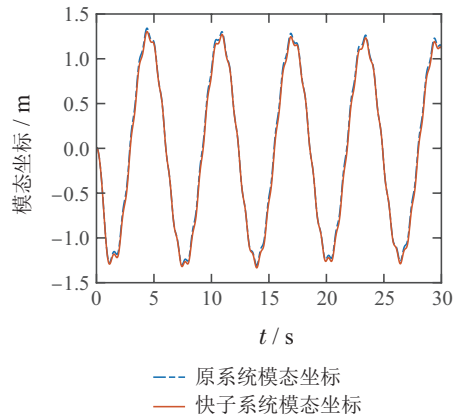


图4 原系统与快子系统模态坐标曲线

Fig. 4 Modal coordinate curves of the original system and the fast subsystem

对机械臂刚柔耦合模型设计了5种控制器, SNNDO_ADP表示本文所设计的控制器, 其他4种方法中, SESO_LQR表示利用奇异摄动理论将柔性机械臂系统分解为快慢子系统, 慢子系统采用滑模与扩展状态观测器进行控制, 快子系统采用线性二次型调节器进行控制; SNN_LQR表示利用奇异摄动理论将柔性机械臂系统分解为快慢子系统, 慢子系统采用滑模和神经网络进行控制, 快子系统采用线性二次型调节器进行控制; 而NNRC和NNDORC两种方法对柔性机械臂系统直接设计控制器, NNRC表示利用神经网络直接设计控制器, NNDORC表示利用神经网络和干扰观测器结合的方式设计控制器. 5种仿真参数选择如表1所示.

表1 5种控制器的仿真参数

Table 1 Simulation parameters of the five controllers

控制器参数	SNNDO_ADP	SESO_LQR	SNN_LQR	NNRC	NNDORC
J_0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
k_1	30	30	30	—	—
k_2	10	10	10	—	—
初始权值	0	—	0	0	0
c_j	0.9	—	0.9	0.6	0.6
b_j	0.6	—	0.6	2	2
σ	0.1	—	0.1	0.1	0.1
γ	50	—	50	40	40
k_d	30	30	—	—	30
Q	diag{10, 10, 10, 10}	diag{10, 10, 10, 10}	diag{10, 10, 10, 10}	—	—
R	10	10	10	—	—
Γ	0.05	—	—	—	—
l	12	—	—	—	—

仿真时, 不同工况下选取的期望角度信号均为 $x_{1d} = (1 - e^{-t})[1 - \cos(\pi t)]$, 如图5所示.

工况: 将 $d = 0.1x_1 + 0.5x_2$ 作用于实际系统模型,

5种控制器的跟踪误差曲线如图6所示, 并分别计算5种控制器在5个周期内的性能指标, 如表2所示.

由图6和表2可知, SESO_LQR控制器控制精度最

低, SNND0_ADp控制器跟踪误差最低. 由此可见, 神经网络对模型项进行了准确的估计, 且柔性控制器能较好的抑制振动.

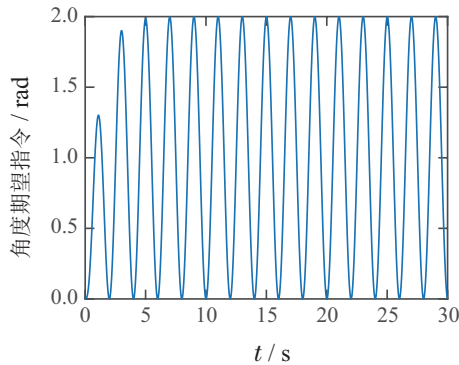


图 5 角度期望指令曲线

Fig. 5 Angle expectation instruction curve

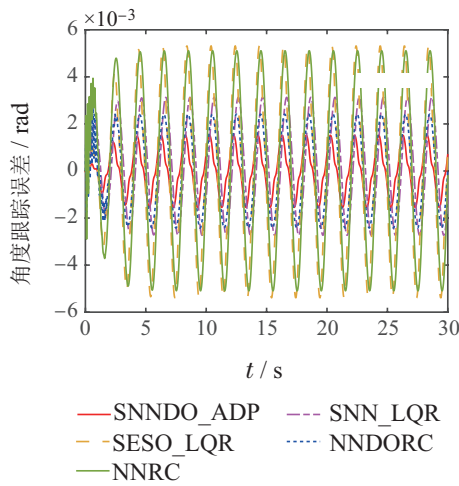


图 6 5种控制器跟踪误差曲线

Fig. 6 Five controllers track error curves

表 2 5种控制器的性能指标

Table 2 Performance indicators of the five controllers

控制器	最大值	平均值	标准方差
SNND0_ADp	0.001 518	0.000 459	1.599 43E-07
SESO_LQR	0.005 299	0.001 108	1.098 48E-06
SNN_LQR	0.003 128	0.000 979	5.543 14E-07
NNRC	0.005 106	0.002 394	1.481 12E-06
NNDORC	0.002 729	0.001 138	4.712 07E-07

由图7-9可知, SNND0_ADp的ESO对系统状态量均能进行准确估计, 且估计误差非常小, 因此可知ESO在保持优良的性能同时可有效克服系统中的扰动. 而模态坐标在柔性控制器的作用下逼近于0, 可有效抑制振动.

由图10-11可知, 神经网络和干扰观测器可分别对 ξ 和 Δ 进行实时估计.

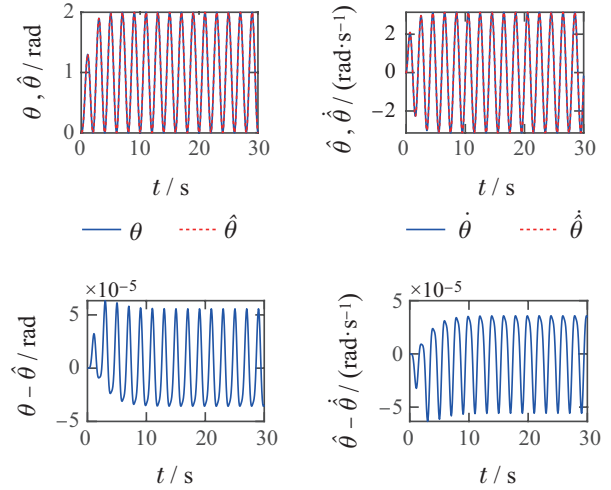


图 7 ESO观测位置及速度误差

Fig. 7 ESO observation position and velocity error

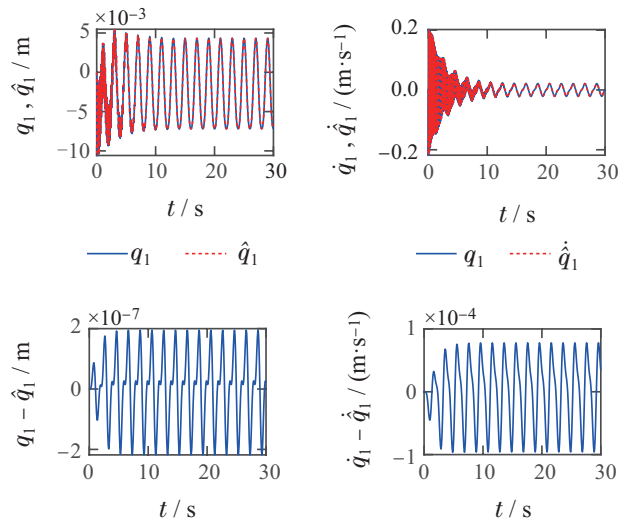


图 8 ESO观测一阶模态及导数误差

Fig. 8 ESO observed first order mode and derivative error

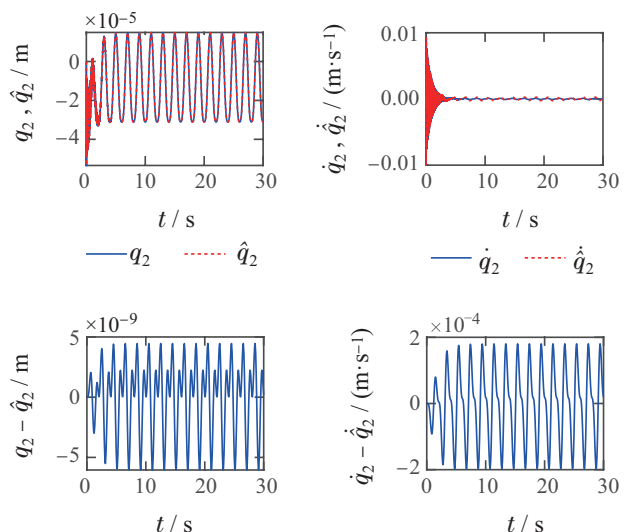


图 9 ESO观测二阶模态及导数误差

Fig. 9 ESO observed second order modes and derivative errors

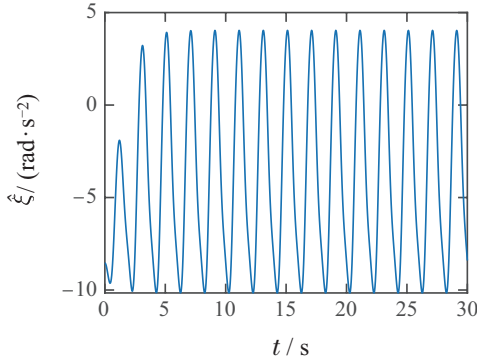


图 10 ξ 的估计

Fig. 10 Estimation of ξ

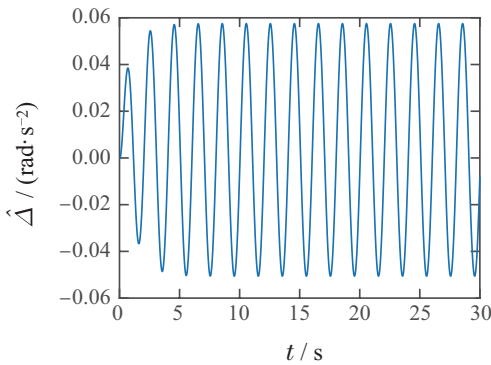


图 11 Δ 的估计

Fig. 11 Estimation of Δ

6 实验验证与分析

实验平台主要有两部分组成,如图12所示为试验台机械系统,将柔性机械臂固连在旋转关节上,通过联轴器连接,电机带动旋转关节运动;另一部分为控制系统,通过A/D转化板卡采集光电编码器位置信息以及D/A转换板卡发送电机驱动指令.实验采样间隔

为0.5 ms,速度信号由采集到的高精度角度信号向后差分得到.

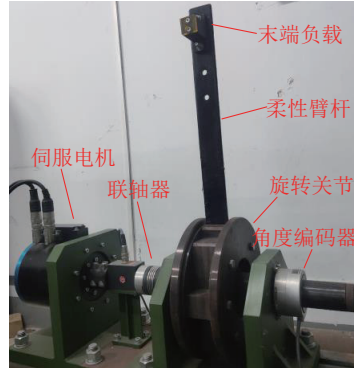


图 12 实验台机械系统

Fig. 12 Experimental table mechanical system

实验选择在两种工况下对比5种控制器跟踪性能.跟踪期望角度信号 $x_{1d} = 10(1 - e^{-t})[1 - \cos(\pi t)]$,期望曲线如图13所示.5种控制器的实验参数选择如表3所示.

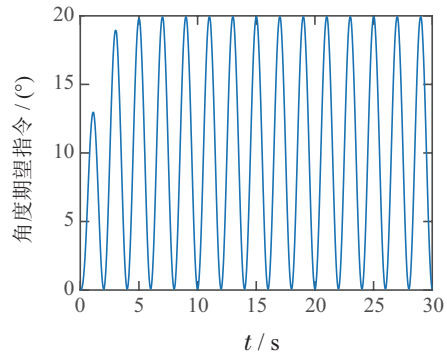


图 13 角度期望指令曲线

Fig. 13 Angle expectation instruction curve

表 3 5种控制器的实验参数

Table 3 Experimental parameters of the five controllers

控制器参数	SNND0_ADp	SESO_LQR	SNN_LQR	NNRC	NNDORC
J_0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
k_1	20	25	30	—	—
k_2	20	15	10	—	—
初始权值	0	—	0	0	0
c_j	0.9	—	0.9	0.6	0.6
b_j	0.6	—	1.2	5	5
σ	0.01	—	0.1	0.1	0.1
γ	50	—	50	40	40
k_d	30	50	—	—	50
Q	diag{10, 10, 10, 10}	diag{10, 10, 10, 10}	diag{10, 10, 10, 10}	—	—
R	10	10	10	—	—
Γ	0.05	—	—	—	—
l	18	—	—	—	—

工况 1 将 $d=0.1x_1 + 0.5x_2$ 作用于物理运动系统,SNND0_ADp跟踪误差曲线如图14所示,其余4种

控制器的跟踪误差曲线如图15所示.5种控制器在30 s内的性能指标如表4所示.

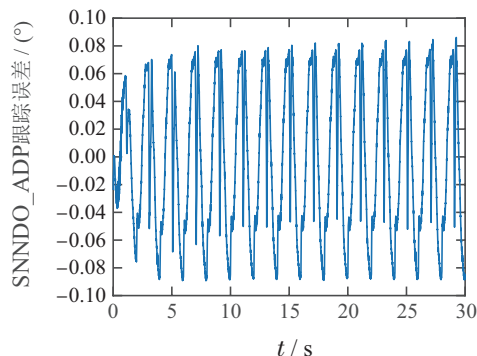


图 14 工况1下SNNDO_ADP跟踪误差曲线

Fig. 14 SNNDO_ADP tracking error curve under working condition 1

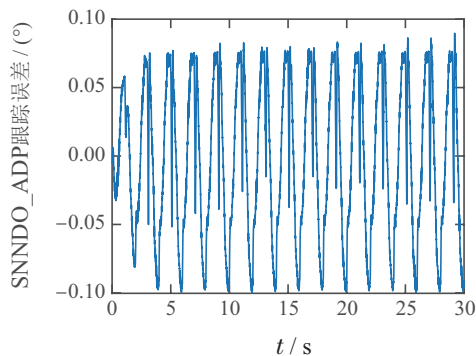


图 16 工况2下SNNDO_ADP跟踪误差曲线

Fig. 16 SNNDO_ADP tracking error curve under working condition 2

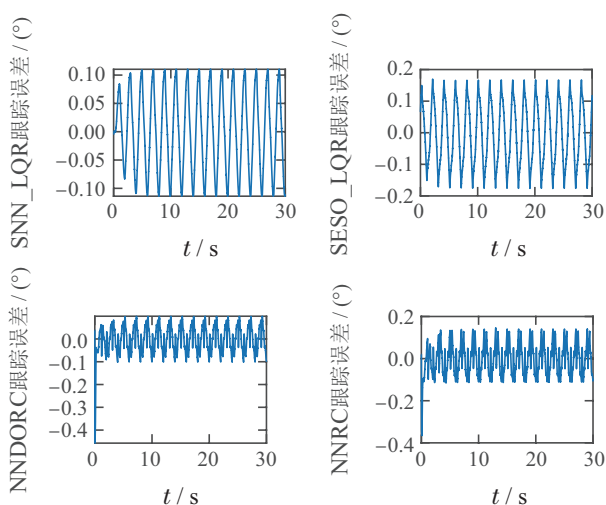


图 15 工况1下其余4种控制器跟踪误差曲线

Fig. 15 The other four controllers track the error curves under working condition 1

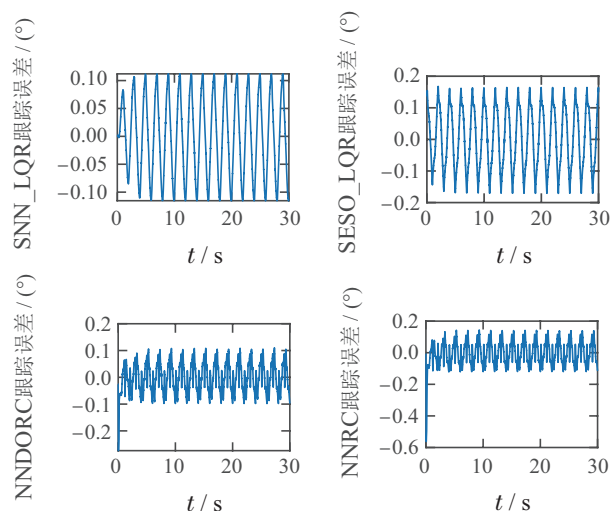


图 17 工况2下其余4种控制器跟踪误差曲线

Fig. 17 The other four controllers track the error curve under working condition 2

表 4 工况1下5种控制器的性能指标

Table 4 Performance indicators of the five controllers under working condition 1

控制器	最大值	平均值	标准方差
SNNDO_ADP	0.089 3	0.048 2	0.024 8
SESO_LQR	0.176 5	0.089 6	0.045 6
SNN_LQR	0.113 8	0.063 5	0.036 0
NNRC	0.365 6	0.061 3	0.040 6
NNDORC	0.457 3	0.053 1	0.035 4

工况 2 将 $d = 2x_1x_2$ 作用于物理运动系统, SNNDO_ADP跟踪误差曲线如图16所示, 其余4种控制器的跟踪误差曲线如图17所示. 5种控制器在30s内的性能指标如表5所示.

由图14-17和表4-5可知, 本文设计的控制器SNNDO_ADP在两种不同工况下均具有最好的跟踪性能, 可见RBF神经网络对模型项具有较好的估计效果, 同时柔性控制器对连杆柔性具有较好的抑制作用.

表 5 工况2下5种控制器的性能指标

Table 5 Performance indicators of the five controllers under working condition 2

控制器	最大值	平均值	标准方差
SNNDO_ADP	0.100 3	0.050 9	0.026 9
SESO_LQR	0.170 8	0.087 4	0.044 0
SNN_LQR	0.115 4	0.064 3	0.036 2
NNRC	0.562 5	0.062 8	0.045 8
NNDORC	0.273 8	0.052 6	0.029 7

7 结论

针对柔性连杆振动导致机械臂的控制精度下降问题, 本文基于奇异摄动理论提出了一种SNNDO_ADP控制器. 将RBFNN和干扰观测器 (disturbance observer, DOB) 结合, 保证慢子系统具有较好的轨迹跟踪性能, 用ESO观测模态及模态导数减少了传感器的使用数量和成本, 利用强化学习和最优控制保证快子系统具有较好的振动抑制效果. 通过李雅普诺夫函数证明了所设计的控制器可以实现系统的有界稳定. 最后,

大量仿真和实验结果证明, SNNDO-ADP 控制器与其他4个控制器相比, 跟踪性能提高了13.5%~66.2%。

参考文献:

- [1] DROST S, PUSTINA P, ANGELINI F, et al. Experimental validation of functional iterative learning control on a one-link flexible arm. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. London, United Kingdom: IEEE, 2023: 5291 – 5297.
- [2] TUNSTEL E, THAYER C, HAYASHI B, et al. ModuLink: A robotic manipulation applique for in-space servicing vehicles. *2023 IEEE Aerospace Conference*. MT, USA: IEEE, 2023: 1 – 10.
- [3] HE W, GAO H, ZHOU C, et al. Reinforcement learning control of a flexible two-link manipulator: An experimental investigation. *IEEE Transactions on Systems*, 2021, 51(12): 7326 – 7336.
- [4] SUBEDI D, TYAPIN I, HOVLAND G. Review on modeling and control of flexible link manipulators. *Modeling, Identification and Control: A Norwegian Research Bulletin*, 2020, 41(3): 141 – 163.
- [5] YANG Chunyu, XU Yiming, DAI Wei, et al. Dual time scale combined control of flexible robotic arms. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 659 – 665.
(杨春雨, 许一鸣, 代伟, 等. 柔性机械臂的双时间尺度组合控制. 控制理论与应用, 2019, 36(4): 659 – 665.)
- [6] WU Y J, HU Y L, WU H, et al. A robust variable structure sliding mode control method for two-joint flexible manipulator. *2023 6th International Symposium on Autonomous Systems (ISAS)*. Nanjing, China: IEEE, 2023: 1 – 6.
- [7] KAZEMIPOUR A, FISCHER O, TOSHIMITSU Y, et al. Adaptive dynamic sliding mode control of soft continuum manipulators. *2022 International Conference on Robotics and Automation*. Philadelphia, PA, USA: IEEE, 2022: 3259 – 3265.
- [8] ZHANG S, WU Y, HE X Y, et al. Neural network-based cooperative trajectory tracking control for a mobile dual flexible manipulator. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2022, 7(1): 1 – 12.
- [9] HORGAN A, MASON K. Evolving neural networks for robotic arm control. *Lecture Notes in Computer Science*. Brno, Czech Republic: IEEE, 2023, 13989: 591 – 607.
- [10] CHEN T, SHAN J J. Distributed control of multiple flexible manipulators with unknown disturbances and dead-zone Input. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(11): 9937 – 9947.
- [11] BELHERAZEM A, CHENAFI M. Passivity based adaptive control of a single-link flexible manipulator. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2021, 55(1): 1 – 14.
- [12] LIU Z J, YANG H K, YANG Y. Singular perturbation approach based boundary control of a flexible manipulator with high gain observer. *2019 Chinese Control Conference (CCC)*. Guangzhou, China: IEEE, 2019: 4479 – 4484.
- [13] LI K, WANG H S, LIANG X W, et al. Visual servoing of flexible-link manipulators by considering vibration suppression without deformation measurements. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(11): 12454 – 12463.
- [14] SUN T, LIANG D, SONG Y. Singular-perturbation-based nonlinear hybrid control of redundant parallel robot. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(4): 3326 – 3336.
- [15] KHAN R F, RSETAM K, CAO Z W, et al. Singular perturbation-based adaptive integral sliding mode control for flexible joint robots. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2023, 70(10): 10516 – 10525.
- [16] ESER S, CETIN S T. Optimum control of a flexible single link manipulator with artificial bee colony algorithm. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2022, 236(7): 3731 – 3742.
- [17] XU Yiming. *Flexible robotic arm combination control based on adaptive dynamic programming*. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2019.
(许一鸣. 基于自适应动态规划的柔性机械臂组合控制. 徐州: 中国矿业大学, 2019.)
- [18] GUO Kefu, LIU Guangrui, WANG Qinghai. Research on linear quadratic form in vibration suppression control of flexible robotic arms. *Mechanical Design and Manufacturing*, 2018, 329(7): 256 – 259.
(郭珂甫, 刘广瑞, 王庆海. 线性二次型在柔性机械臂抑振控制中的研究. 机械设计与制造, 2018, 329(7): 256 – 259.)
- [19] HUANG Y M, CHEN W D, SHAO M Q. Tracking and vibration control of a free-floating space manipulator system with flexible links and joints. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2022, 236(7): 1361 – 1374.
- [20] YANG Chunyu, XU Yiming, DAI Wei, et al. Sliding mode trajectory tracking control and adaptive vibration suppression for flexible robotic arms. *China Control Conference*. Dalian, China: IEEE, 2017: 6720 – 6725.
(杨春雨, 许一鸣, 代伟, 等. 柔性机械臂的滑模轨迹跟踪控制及自适应振动抑制. 中国控制会议. 大连, 中国: IEEE, 2017: 6720 – 6725.)
- [21] JIA S Y, SHAN J J. Velocity-Free Trajectory tracking and active vibration control of flexible space manipulator. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, 58(1): 435 – 450.
- [22] GAO Y Y, ZHU X C, CAO J, et al. Tip motion control and vibration suppression of flexible manipulator with controllable damping. *2022 WRC Symposium on Advanced Robotics and Automation (WRC SARA)*. Beijing, China: IEEE, 2022: 203 – 208.
- [23] SUN Xiaotong, MA Lei, LI Mengxue, et al. Dual time scale combined control of flexible robotic arms based on adaptive sliding mode optimal control. *Noise and Vibration Control*, 2020, 40(5): 22 – 26.
(孙小通, 马磊, 李梦雪, 等. 基于自适应滑模-最优控制的柔性机械臂双时标组合控制. 噪声与振动控制, 2020, 40(5): 22 – 26.)
- [24] MASOUD M, MOSTAFA G, MOHAMMAD J S. A nonlinear high gain observer based input – output control of flexible link manipulator. *Mechanics Research Communications*, 2012, 45: 34 – 41.
- [25] NA J, ZHAO J, GAO G. Robust control of uncertain nonlinear systems based on adaptive dynamic programming. *The 24th International Conference on Neural Information Processing*. Guangzhou, China: IEEE, 2017: 787 – 796.
- [26] NA J, HERRMANN G. Online adaptive approximate optimal tracking control with simplified dual approximation structure for continuous-time unknown nonlinear systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2014, 1(4): 412 – 422.
- [27] NAIR S V, LAKHEKAR G V, PANCHADE V M. Fuzzy sliding mode control approach for two time scale system: Stability issues. *2016 10th International Conference on Intelligent Systems and Control (ISCO)*. Coimbatore, India: IEEE, 2016: 1 – 8.

作者简介:

刘城焱 硕士研究生, 目前研究方向为机械臂运动控制、嵌入式系统开发, E-mail: 1349945093@qq.com;

胡健 博士, 副教授, 硕士研究生导师, 目前研究方向为机电伺服非线性控制、AI与智能控制、嵌入式系统开发, E-mail: hujiannjust@163.com;

姚建勇 博士, 教授, 博士研究生导师, 目前研究方向为智能机器人、智能控制技术、机电系统伺服控制、动态系统故障检测与容错, E-mail: jerry Yao.buaa@gmail.com;

谭天乐 研究员, 硕士研究生导师, 目前研究方向为空间智能制导、导航与控制, E-mail: 18616017107@163.com;

刘宇 研究员, 目前研究方向为空间智能制导、导航与控制, E-mail: 1873009377@qq.com;

林家伟 硕士研究生, 目前研究方向为机械臂碰撞检测、嵌入式系统开发, E-mail: 1782580107@qq.com.