

基于观测器的复杂网络事件触发量化同步控制

黄玲^{1,2}, 王云飞^{1,2†}, 张恒艳³

(1. 哈尔滨理工大学 自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 黑龙江省复杂智能系统与集成重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150080;
3. 绥化学院 电气工程学院, 黑龙江 绥化 152061)

摘要: 针对复杂网络状态不可得的情况, 设计一种基于观测器的具有事件触发策略的量化同步控制器. 为了减少通信次数和计算负担, 引入事件触发方案和对数量化器. 首先, 对不可测的系统状态设计分布式状态观测器, 考虑事件触发方案和量化对系统的影响, 建立同步误差和观测误差的联合误差模型; 其次, 依据Lyapunov稳定性理论、Schur补引理、柯西不等式, 得到具有线性矩阵不等式形式(LMI)的联合误差系统渐近稳定的充分条件, 同时给出状态观测器和控制器增益求解方法; 然后, 证明对于所提出的事件触发条件, 芝诺(Zeno)行为可以被排除, 并且得到事件触发间隔的最小下界; 最后, 通过一个数值例子验证所提方法的有效性.

关键词: 复杂网络; 事件触发策略; 观测器; 对数量化器; 同步控制

引用格式: 黄玲, 王云飞, 张恒艳. 基于观测器的复杂网络事件触发量化同步控制. 控制理论与应用, 2025, 42(3): 511 – 520

DOI: 10.7641/CTA.2024.30445

Observers-based event-triggered quantization synchronization control for complex networks

HUANG Ling^{1,2}, WANG Yun-fei^{1,2†}, ZHANG Heng-yan³

(1. School of Automation, Harbin University of Science and Technology, Harbin Heilongjiang 150080, China;
2. Heilongjiang Provincial Key Laboratory of Complex Intelligent System and Integration, Harbin Heilongjiang 150080, China;
3. School of Electrical Engineering, Suihua University, Suihua Heilongjiang 152061, China)

Abstract: A quantization controller based on observers with event-triggered schemes is designed for the situation where the state of complex network is not available. In order to reduce communication times and computation burden, event-triggered schemes and logarithmic quantizers are introduced. Firstly, a distributed state observer is designed for the unmeasurable system state, and a joint error model of synchronization error and observation error is established considering the influence of event-triggered schemes and quantization on the system. Secondly, according to the Lyapunov stability theory, Schur Complement lemma and Cauchy Inequality, the sufficient conditions for the asymptotic stability of the joint error system with linear matrix inequality (LMI) form are obtained. At the same time, the state observer and controller gain solving methods are given. Then, it is proved that the Zeno behaviour can be excluded for the proposed event-triggered schemes, and that the minimum lower bound of the event-triggered interval is obtained. Finally, a numerical example is given to validate the effectiveness of the proposed method.

Key words: complex networks; event-triggered scheme; observer; logarithmic quantization; synchronization control

Citation: HUANG Ling, WANG Yunfei, ZHANG Hengyan. Observers-based event-triggered quantization synchronization control for complex networks. *Control Theory & Applications*, 2025, 42(3): 511 – 520

1 引言

复杂系统在现实世界中无处不在, 例如城市中的道路交管网、生态系统中的食物链网、基于人工智能的物联网等^[1-2]. 将这些复杂系统进行抽象建模, 可以

用复杂网络描述. 复杂网络将复杂系统中的一个个体看作为一个节点, 不同个体中的联系看成节点间的传输. 目前, 复杂网络在许多领域已经得到了广泛的应用^[3-4].

收稿日期: 2023-06-28; 录用日期: 2024-03-19.

†通信作者. E-mail: 2238756684@qq.com; Tel.: +86 17772109484.

本文责任编辑: 刘志新.

黑龙江省科学基金项目(LH2020F035)资助.

Supported by the Science Foundation of Heilongjiang Province (LH2020F035).

同步指两个或两个以上随时间变化的量在变化过程中保持一定的相对关系,是在复杂系统中常见的一种现象.同步现象是复杂网络的典型动力学行为之一,其通常指通过自身耦合或施加外力等策略使网络节点从不同的初始状态出发,随着网络的演化按照某种方式逐渐趋于一致的状态.目前,人们已经研究了许多有效的同步控制方法.文献[5]研究了具有间歇控制的分阶复杂网络的有限时间同步问题,建立了间歇反馈控制、间歇自适应控制和间歇牵引控制下分阶复杂网络的有限时间收敛准则.文献[6]解决了在比例导数和比例积分控制器下的多输出耦合复杂网络的输出同步和 H_∞ 输出同步问题,利用Lyapunov泛函方法和不等式技术,建立了多输出耦合复杂网络的输出同步准则.文献[7]研究了复杂网络的指数同步问题,设计了反馈控制使网络同步.文献[8]研究了一类具有欺骗攻击的非线性耦合复杂网络的安全同步问题,采用分布式控制器与脉冲协议相结合的方式实现安全同步,得到了在给定误差范围内保证网络同步安全的充分判据.文献[9]研究了具有扰动的复杂网络的鲁棒 H_∞ 动态输出反馈同步问题,提出了一种新型的分散输出反馈控制方案,证明了闭环同步误差系统在最优 H_∞ 扰动衰减水平下是渐近稳定的.文献[10]设计了自适应控制器和参数自适应律,研究了复杂网络的有限时间同步控制问题,却没有考虑网络有限带宽对系统的影响.文献[11]研究了具有脉冲效应、内部延迟和耦合延迟的不确定复杂网络的牵引脉冲簇同步问题.文献[12]研究了具有时变时滞的不确定离散神经网络的指数同步和反同步问题.文献[13]研究了具有异步延迟脉冲控制的复杂网络的分布式同步问题.

上述文献考虑了复杂网络的输出同步问题,指数同步问题和安全同步问题等,采用了Lyapunov泛函方法和不等式技术方法,分布式控制器与脉冲协议相结合的方法等,但都是基于采样信号的,没有考虑节约网络资源的方法.随着现代通信技术飞速发展,数据和信息传输需求越来越大,但系统的计算能力是有限的.针对这一问题,文献[14]首次提出事件触发的思想,设置事件触发条件,控制器仅仅在事件触发条件满足时更新.近年来,大量的事件触发策略被提出.文献[15]在部分节点可以测量的基础上,为一类具有随机发生的传感器饱和和估计器增益变化的时滞复杂网络设计了事件触发的非脆弱状态估计器,却没有考虑网络中出现的丢包现象.文献[16]研究一类具有不确定内部耦合的复杂网络的事件触发同步控制问题,将一类新的多时滞系统的事件触发同步控制问题转化为指数镇定问题.文献[17]研究了在连续时间的情

况下的同步控制问题,基于脉冲控制理论和事件触发机制,分析了记忆神经网络的指数同步行为.文献[18]利用事件触发脉冲控制策略,提出了延迟脉冲理论,研究了具有耦合延迟的复杂网络的指数同步问题,并通过Lyapunov稳定性定理和矩阵理论推导出实现复杂网络同步的充分条件,并证明了该理论可以避免芝诺(Zeno)行为,却没有考虑在动态事件触发策略下具有交换拓扑的离散复杂网络的同步.文献[19]研究了具有拒绝服务攻击(denial of service, DoS)的非线性网络控制系统,设计了一种具有动态事件触发策略的 H_∞ 安全控制器.文献[20]研究了具有周期DoS攻击的网络化系统,设计了一种基于观测器的具有事件触发策略的控制器.

上述文献考虑了复杂网络的有限时间同步控制问题、事件触发同步控制问题、连续时间系统的指数镇定问题、具有周期DoS攻击的网络化系统控制问题等,基于脉冲控制理论和事件触发机制、分布式控制器与脉冲协议相结合的方法等.随着复杂网络规模的不断扩大,系统的结构也越来越复杂,信息的传输也越来越频繁.因此,对数量化器作为另一种节省通信资源的可行技术,在控制系统中有着广泛的应用.文献[21]首次尝试设计了具有对数量化的新型自适应输出控制器来处理分阶误差系统的稳定性,基于分阶Lyapunov泛函和不等式方法,推导出具有输出耦合的分阶耦合神经网络同步的充分条件.文献[22]通过严格间歇量化控制解决了随机多加权复杂网络的固定时间簇滞后同步问题.文献[23]设计与模式相关的量化控制技术,以降低控制成本并节省通信资源.文献[24]研究了一类具有切换拓扑和量化的复杂网络的非脆弱 H_∞ 估计问题.文献[25]研究了基于有向图的具有量化通信的多智能体系统一致性的分布式事件触发固定控制问题.文献[26]与传统的T-S(Takagi-Sugeno)模糊滑模控制设计方法不同,在控制器设计中采用了量化方法.

上述文献均基于状态实现了不同形式的同步,但没有考虑到在多数情况下系统的状态是不可得的.因此,通过构造相应的观测器来估计系统状态已成为最流行的方法.在过去的几十年里,人们提出了许多关于复杂网络状态估计的突出结果^[27].分布式状态观测器和集中式状态观测器是两种常见的状态观测器设计方法.两者的主要区别在于信息处理方式、传输方式以及系统的可靠性.在信息处理能力方面:集中式状态观测器只需要向中心节点传送测量数据,由中心节点进行状态估计,并将估计值发送回各个节点进行控制;而分布式状态观测器需要在每个节点上进行局

部状态估计, 并将结果传递给临近的节点进行信息融合. 在通信负载方面: 集中式状态观测器需要传输的数据量更小, 但是需要承担所有节点数据传输的负荷, 可能导致网络拥塞和延迟高. 而分布式状态观测器需要通过节点之间的消息传递共同估计状态, 所以需要传输的数据量较大, 但通信负载分散到各个节点之间, 可以减轻网络负担. 在系统的可靠性方面: 集中式状态观测器存在单点故障的风险, 如果中心节点发生故障, 整个系统将无法继续工作. 而分布式状态观测器具有更高的鲁棒性, 即使某个节点失效, 其他节点仍然可以继续工作, 整个系统故障风险较低. 因此, 本文由多个节点构成的大型复杂网络系统, 适合用分布式状态观测器.

基于上述内容, 本文研究复杂网络事件触发下的量化同步控制问题. 首先, 对不可测的系统状态设计分布式状态观测器, 考虑事件触发方案和量化对系统的影响, 建立新的包含同步误差和观测误差的联合误差模型. 然后, 依据Lyapunov稳定性理论, 得到联合误差系统渐近稳定的充分条件, 以及观测器、控制器求解方法. 本文的主要贡献在于:

1) 系统的状态并不是所有情况下都可得的, 与大多数文章不同, 本文考虑状态不可得的情况, 利用观测到的状态设计控制器, 更符合实际情况;

2) 对量化器可以节约通信资源, 广泛应用于控制系统. 本文在事件触发的前提下, 通过对量化器的设计, 进一步优化网络资源配置, 节约网络资源.

2 问题的提出

2.1 复杂网络的模型描述

考虑 N 个节点组成的复杂动态网络第 i 个节点的动力学模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + f(x_i(t), t) + \\ c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma x_j(t) + u_i(t), \\ y_i(t) = Cx_i(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_i(t) = [x_{i1}(t) \ x_{i2}(t) \ \cdots \ x_{in}(t)]^T$ 是第 i 个节点在时刻 t 的状态向量; $y_i(t) = [y_{i1}(t) \ y_{i2}(t) \ \cdots \ y_{ip}(t)]^T$ 是第 i 个节点的测量输出; $f(x_i(t), t) = [f_1(x_i(t), t) \ f_2(x_i(t), t) \ \cdots \ f_n(x_i(t), t)]^T$ 是一个非线性的向量函数; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 是常数矩阵; $c > 0$ 表示耦合强度; $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示网络拓扑的耦合矩阵, 如果节点 i 可以从节点 j 接收信息, 则 $b_{ij} > 0$, 否则 $b_{ij} = 0$, 定义矩阵的对角元素为 $b_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ij}$. $\Gamma = \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ 表示一个内部

耦合矩阵, 如果节点内部分量存在相互作用, 则 $r_i > 0$, 否则 $r_i = 0$; $u_i(t)$ 表示控制输入.

注1 模型(1)来源于文献[28]. 在文献[28]中主要研究受拒绝服务攻击的复杂网络的安全同步控制问题, 而本文则是基于事件触发策略, 设计一种基于观测器的量化同步控制器.

假设孤立节点为跟踪目标, 描述如下:

$$\dot{s}(t) = As(t) + f(s(t), t). \quad (2)$$

2.2 分布式状态观测器设计

对系统(1)设计分布式状态观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t) = A\hat{x}_i(t) + f(\hat{x}_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma \hat{x}_j(t) + \\ u_i(t) + L_i(y_i(t) - \hat{y}_i(t)), \\ \hat{y}_i(t) = C\hat{x}_i(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\hat{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 是对 $x_i(t)$ 的观测状态, $\hat{y}_i(t) \in \mathbb{R}^p$ 是观测器输出, $L_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 为观测器增益.

假设1 对于任意的 $z_1(t), z_2(t) \in \mathbb{R}^n$, 连续非线性函数 $f(\cdot, \cdot)$ 满足以下条件:

$$\begin{aligned} & (f(z_1(t), t) - f(z_2(t), t) - G_1(z_1(t) - z_2(t)))^T \times \\ & (f(z_1(t), t) - f(z_2(t), t) - G_2(z_1(t) - z_2(t))) \leq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 G_1, G_2 为两个已知的常数实矩阵.

2.3 基于观测器的动态事件触发结构设计

节点 i 触发时刻序列被定义为 $\{t_1^i, t_2^i, \dots, t_\infty^i\}$, 基于观测器的控制器 $u_i(t)$ 表示为

$$u_i(t) = K_i \bar{e}_i(t_k^i), \quad t \in [t_k^i, t_{k+1}^i), \quad (5)$$

其中: $\bar{e}_i(t) = \hat{x}_i(t) - s(t)$, K_i 是待设计的控制器增益.

将第 i 个节点的误差 $\delta_i(t)$ 定义为

$$\delta_i(t) = \bar{e}_i(t) - \bar{e}_i(t_k^i). \quad (6)$$

事件触发条件为

$$t_{k+1}^i = \inf\{t > t_k^i \mid f_i(t) \geq 0\}, \quad (7)$$

其中 $f_i(t) = \|\delta_i(t)\| - \rho_i \|\bar{e}_i(t)\|$, ρ_i 是正标量.

定义同步误差为 $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$, 观测误差为 $\hat{e}_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$, 得 $\bar{e}_i(t) = e_i(t) - \hat{e}_i(t)$.

结合误差 $\delta_i(t)$ 的定义, 可得控制输入 $u_i(t)$ 为

$$u_i(t) = K_i e_i(t) - K_i \hat{e}_i(t) - K_i \delta_i(t), \quad (8)$$

则同步误差系统的描述为

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= (A + K_i)e_i(t) + f(e_i(t), t) + \\ & c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma e_j(t) - K_i \hat{e}_i(t) - K_i \delta_i(t), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $f(e_i(t), t) = f(x_i(t), t) - f(s(t), t)$.

观测误差系统描述为

$$\dot{\hat{e}}_i(t) = (A - L_i C)\hat{e}_i(t) + f(\hat{e}_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma \hat{e}_j(t), \quad (10)$$

其中 $f(\hat{e}_i(t), t) = f(x_i(t), t) - f(\hat{x}_i(t), t)$.

2.4 对量化器的设计

为了进一步提高通信信道的传输效率, 设计对数量化器

$$q(\cdot) = [q_1(\cdot) \ q_2(\cdot) \ \cdots \ q_n(\cdot)]^T,$$

其中: $q_j(\cdot)$ ($1 \leq j \leq n$) 是第 j 个量化器, 其量化密度表示为 η_j ($0 \leq \eta_j \leq 1$); 量化级别的集合表示为 $\mu_j = \{\pm \mu_\nu^{(j)}, \mu_\nu^{(j)} = \eta_j^\nu \mu_0^{(j)}, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{0\}$, $\mu_0^{(j)} > 0$.

$q_j(\cdot)$ 被定义为

$$q_j(\bar{e}_{ij}(k)) = \begin{cases} \mu_\nu^{(j)}, & \frac{1}{1+w_j} \mu_\nu^{(j)} \leq \bar{e}_{ij}(k) \leq \frac{1}{1-w_j} \mu_\nu^{(j)}, \\ 0, & \bar{e}_{ij}(k) = 0, \\ -q_j(-\bar{e}_{ij}(k)), & \bar{e}_{ij}(k) < 0, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $w_j = (1 - \eta_j)/(1 + \eta_j)$.

根据文献 [29] 的分析, $q_j(\bar{e}_{ij})$ 可以被描述为

$q_j(\bar{e}_{ij}) = (1 + \Delta_{ij})\bar{e}_{ij}$, 其中 $|\Delta_{ij}| < w_j$.

$\Delta_i = \text{diag}\{\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \dots, \Delta_{in}\}$, 则量化后 $q(\bar{e}_i)$ 为

$$q_i(\bar{e}_i) = (I + \Delta_i)\bar{e}_i. \quad (12)$$

考虑量化误差 $q_i(\bar{e}_i)$, 控制输入 $u_i(t)$ 为

$$u_i(t) = K_i(I + \Delta_i)e_i(t) - K_i(I + \Delta_i)\hat{e}_i(t) - K_i(I + \Delta_i)\delta_i(t), \quad (13)$$

则同步误差系统和观测误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_i(t) = (A + K_i(I + \Delta_i))e_i(t) + f(e_i(t), t) + \\ c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma e_j(t) - K_i(I + \Delta_i)\hat{e}_i(t) - \\ K_i(I + \Delta_i)\delta_i(t), \\ \dot{\hat{e}}_i(t) = (A - L_i C)\hat{e}_i(t) + f(\hat{e}_i(t), t) + \\ c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma \hat{e}_j(t). \end{cases} \quad (14)$$

使用克罗内克积, 同步误差系统和观测误差系统可以表示为

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = (\bar{A} + \bar{K}\bar{\Delta} + c(B \otimes \Gamma))E(t) + \\ F(E(t), t) - \bar{K}\bar{\Delta}\hat{E}(t) - \bar{K}\bar{\Delta}\delta(t), \\ \dot{\hat{E}}(t) = (\bar{A} - \bar{L}\bar{C} + c(B \otimes \Gamma))\hat{E}(t) + F(\hat{E}(t), t), \end{cases} \quad (15)$$

其中:

$$\bar{A} = I_N \otimes A, \bar{C} = I_N \otimes C,$$

$$E(t) = [e_1^T(t) \ e_2^T(t) \ \cdots \ e_N^T(t)]^T,$$

$$\hat{E}(t) = [\hat{e}_1^T(t) \ \hat{e}_2^T(t) \ \cdots \ \hat{e}_N^T(t)]^T,$$

$$F(E(t), t) = [f^T(e_1(t), t) \ \cdots \ f^T(e_N(t), t)]^T,$$

$$F(\hat{E}(t), t) = [f^T(\hat{e}_1(t), t) \ \cdots \ f^T(\hat{e}_N(t), t)]^T,$$

$$\delta(t) = [\delta_1^T(t) \ \delta_2^T(t) \ \cdots \ \delta_N^T(t)]^T,$$

$$\bar{K} = \text{diag}\{K_1, K_2, \dots, K_N\},$$

$$\bar{\Delta} = \text{diag}\{I + \Delta_1, I + \Delta_2, \dots, I + \Delta_N\},$$

$$\bar{L} = \text{diag}\{L_1, L_2, \dots, L_N\}.$$

基于以上的分析, 本文要解决的问题是: 针对复杂网络(1), 设计一种基于观测器(3)的具有事件触发策略(7)的量化控制器(13), 使联合误差(15)渐近稳定, 实现复杂网络(1)和目标节点(2)同步.

3 主要定理及其证明

引理 1^[30](Schur补引理) 对于给定的分块对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$, 以下3个条件是等价的:

- 1) $S < 0$;
- 2) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- 3) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

引理 2^[31](Barbalat引理) 假设函数 $f(t)$ 可导, 且随着 $t \rightarrow \infty$, 函数 $f(t)$ 存在有限极限. 如果函数 $f(t)$ 的一阶导数 $\dot{f}(t)$ 一致连续, 那么当 $t \rightarrow \infty$ 时, 函数的一阶导数 $\dot{f}(t) \rightarrow 0$.

引理 3 假设 T 和 S 是具有适当维数的实矩阵, F 满足 $F^T F < I$, 对于 $l > 0$, 以下不等式成立:

$$T^T F S^T + S F^T T \leq l S S^T + l^{-1} T^T T.$$

定理 1 给定反馈控制增益 \bar{K} , 观测器增益为 \bar{L} , 如果存在正定对称矩阵 $P > 0, Q > 0$, 对角阵 $\Phi > 0$, 对角阵 $\Theta > 0$, 使得下述矩阵不等式成立:

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_1 & \bar{Q} + \Phi \otimes \mathcal{G}_2 \\ * & -\Phi \otimes I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \bar{P} + \Theta \otimes \mathcal{G}_2 \\ * & -\Theta \otimes I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

其中:

$$\hat{\Pi}_1 = \bar{Q}\bar{A} + \bar{A}^T \bar{Q} + c\bar{Q}(B \otimes \Gamma) + c(B \otimes \Gamma)^T \bar{Q} -$$

$$\begin{aligned} & \bar{Q}\bar{L}\bar{C} - \bar{C}^T\bar{L}^T\bar{Q} - \Phi \otimes \mathcal{G}_1, \\ \Pi_1 = & \bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T\bar{P} + c\bar{P}(B \otimes \Gamma) + 3I - \Theta \otimes \mathcal{G}_1 + \\ & c(B \otimes \Gamma)^T\bar{P} + \bar{P}\bar{K}\bar{\Delta} + \bar{\Delta}^T\bar{K}^T\bar{P}, \\ \mathcal{G}_1 = & \frac{G_1^T G_2 + G_2^T G_1}{2}, \mathcal{G}_2 = \frac{(G_1 + G_2)^T}{2}, \\ \bar{P} = & I_N \otimes P, \bar{Q} = I_N \otimes Q, \\ \Phi = & \text{diag} \{ \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N \}, \\ \Theta = & \text{diag} \{ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N \}, \end{aligned}$$

则同步误差系统和观测误差系统(14)渐近稳定, 复杂网络(1)和目标节点(2)实现同步.

证 针对联合误差系统(15), 构造 Lyapunov 函数如下:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t), \quad (18)$$

其中: $V_1(t) = \hat{E}^T(t)\bar{Q}\hat{E}(t)$, $V_2(t) = E^T(t)\bar{P}E(t)$.

沿着系统(15)的轨迹求 $V_1(t)$ 的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & 2\hat{E}^T(t)\bar{Q}\dot{\hat{E}}(t) = \\ & 2\hat{E}^T(t)\bar{Q}((\bar{A} - \bar{L}\bar{C} + \\ & c(B \otimes \Gamma))\hat{E}(t) + F(\hat{E}(t), t)), \end{aligned} \quad (19)$$

由假设1可得

$$\begin{aligned} & f^T(\hat{e}_i(t), t)f(\hat{e}_i(t), t) - \\ & f^T(\hat{e}_i(t), t)G_2\hat{e}_i(t) - \hat{e}_i^T(t)G_1^T f(\hat{e}_i(t), t) + \\ & \hat{e}_i^T(t)G_1^T G_2\hat{e}_i(t) \leq 0, \end{aligned} \quad (20)$$

其等价于

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_i(t) \\ f(\hat{e}_i(t), t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_i(t) \\ f(\hat{e}_i(t), t) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (21)$$

其中: $M_{11} = \frac{G_1^T G_2 + G_2^T G_1}{2}$, $M_{12} = -\frac{G_1^T + G_2^T}{2}$, $M_{22} = I_n$.

这表明, 当 $\phi_i > 0$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^N \phi_i \begin{bmatrix} \hat{e}_i(t) \\ f(\hat{e}_i(t), t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ f(e(t), t) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (22)$$

也就是说

$$\begin{bmatrix} \hat{E}(t) \\ F(\hat{E}(t), t) \end{bmatrix}^T M^* \begin{bmatrix} \hat{E}(t) \\ F(\hat{E}(t), t) \end{bmatrix} \leq 0, \quad (23)$$

其中 $M^* = \begin{bmatrix} \Phi \otimes \mathcal{G}_1^T & -\Phi \otimes \mathcal{G}_2 \\ -\Phi \otimes \mathcal{G}_2^T & \Phi \otimes I_n \end{bmatrix}$.

把式(23)代入式(19), 可得

$$\dot{V}_1(t) \leq 2\hat{E}^T(t)\bar{Q}((\bar{A} - \bar{L}\bar{C} + c(B \otimes \Gamma))\hat{E}(t) +$$

$$\begin{aligned} & F(\hat{E}(t), t)) - \hat{E}^T(t)(\Phi \otimes \mathcal{G}_1)\hat{E}(t) + \\ & 2\hat{E}^T(t)(\Phi \otimes \mathcal{G}_2)F(\hat{E}(t), t) - \\ & F^T(\hat{E}(t), t)(\Phi \otimes I_n)F(\hat{E}(t), t) = \\ & \varsigma^T(t)\hat{\Pi}\varsigma(t), \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\varsigma(t) = [\hat{E}^T(t) \ F^T(\hat{E}(t), t)]^T$.

当 $\hat{\Pi} < 0$ 时, 根据Lyapunov稳定性定理, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{e}_i(t)\| = 0, \quad (25)$$

接下来, 沿着系统(15)的轨迹求 $V_2(t)$ 的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & 2E^T(t)\bar{P}((\bar{A} + \bar{K}\bar{\Delta} + c(B \otimes \Gamma))E(t) + \\ & F(E(t), t) - \bar{K}\bar{\Delta}\hat{E}(t) - \bar{K}\bar{\Delta}\delta(t)) = \\ & 2E^T(t)\bar{P}((\bar{A} + \bar{K}\bar{\Delta} + c(B \otimes \Gamma))E(t) + \\ & F(E(t), t) - \bar{K}\bar{\Delta}\hat{E}(t)) - \\ & 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t)PK_i(I + \Delta_i)\delta_i(t) \leq \\ & 2E^T(t)\bar{P}((\bar{A} + \bar{K}\bar{\Delta} + c(B \otimes \Gamma))E(t) + \\ & F(E(t), t)) + 2\|E(t)\| \|\bar{P}\bar{K}\bar{\Delta}\| \|\hat{E}(t)\| + \\ & 2 \sum_{i=1}^N \|e_i(t)\| \|PK_i(I + \Delta_i)\| \|\delta_i(t)\|. \end{aligned} \quad (26)$$

由事件触发条件可得, 当 $t \in [t_k^i, t_{k+1}^i)$ 时, 有下列不等式成立:

$$\|\delta_i(t)\| < \rho_i \|\bar{e}_i(t)\|. \quad (27)$$

式(27)结合式(26), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) \leq & 2E^T(t)\bar{P}((\bar{A} + \bar{K}\bar{\Delta} + c(B \otimes \Gamma))E(t) + \\ & F(E(t), t)) + \|E(t)\|^2 + \|\bar{P}\bar{K}\bar{\Delta}\|^2 \|\hat{E}(t)\|^2 + \\ & 2 \sum_{i=1}^N \|e_i(t)\| \|PK_i(I + \Delta_i)\| \rho_i \|\bar{e}_i(t)\|. \end{aligned} \quad (28)$$

由于 $\bar{e}_i(t) = e_i(t) - \hat{e}_i(t)$, 取 $\rho_i = \frac{1}{2\|PK_i(I + \Delta_i)\|}$, 代入式(28)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) \leq & 2E^T(t)\bar{P}((\bar{A} + \bar{K}\bar{\Delta} + c(B \otimes \Gamma))E(t) + \\ & F(E(t), t)) + \|\bar{P}\bar{K}\bar{\Delta}\|^2 \|\hat{E}(t)\|^2 + \\ & \sum_{i=1}^N \|e_i(t)\| \|e_i(t) - \hat{e}_i(t)\| + \|E(t)\|^2 \leq \\ & 2E^T(t)\bar{P}((\bar{A} + \bar{K}\bar{\Delta} + c(B \otimes \Gamma))E(t) + \\ & F(E(t), t)) + 3E^T(t)E(t) + \\ & \|\bar{P}\bar{K}\bar{\Delta}\|^2 \|\hat{E}(t)\|^2 + \|\hat{E}(t)\|^2. \end{aligned} \quad (29)$$

根据假设1, 存在一个对角阵 $\Theta > 0$, 使得下式成立:

$$\begin{aligned} & E^T(t)(\Theta \otimes \mathcal{G}_1)E(t) - \\ & 2E^T(t)(\Theta \otimes \mathcal{G}_2)F(E(t), t) + \\ & F(E(t), t)(\Theta \otimes I_n)F(E(t), t) \leq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

式(30)结合式(29)可得

$$\dot{V}_2(t) \leq \xi^T \Pi \xi + (\|\bar{P}\bar{K}\bar{\Delta}\|^2 + 1)\|\hat{E}(t)\|^2,$$

其中

$$\xi(t) = (E^T(t), F^T(E(t), t))^T. \quad (31)$$

因此, 当 $\Pi < 0$ 时,

$$\dot{V}_2(t) \leq \lambda_{\max}(\Pi)\|\xi(t)\|^2 + (\|\bar{P}\bar{K}\bar{\Delta}\|^2 + 1)\|\hat{E}(t)\|^2. \quad (32)$$

由于 $V_2(t) = E^T(t)\bar{P}E(t)$, $\alpha > 0$, 使得

$$0 \leq \alpha\|E(t)\|^2 \leq V_2(t), \quad (33)$$

所以有

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha\|E(t)\|^2 & \leq V_2(t) \leq \\ & V_2(t_0) + \lambda_{\max}(\Pi) \int_{t_0}^t \|\xi(\tau)\|^2 d\tau + \\ & \int_{t_0}^t (\|\bar{P}\bar{K}\bar{\Delta}\|^2 + 1)\|\hat{E}(\tau)\|^2 d\tau, \end{aligned} \quad (34)$$

当 $\Pi < 0$ 时, 则 $\lambda_{\max}(\Pi) < 0$. 由式(32)得

$$\|E(\tau)\|^2 < \|\xi(\tau)\|^2, \quad (35)$$

所以

$$\begin{aligned} 0 \leq V_2(t_0) + \lambda_{\max}(\Pi) \int_{t_0}^t \|E(\tau)\|^2 d\tau + \\ \int_{t_0}^t (\|\bar{P}\bar{K}\bar{\Delta}\|^2 + 1)\|\hat{E}(\tau)\|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (36)$$

同理, 由于 $V_1(t) = \hat{E}^T(t)\bar{Q}\hat{E}(t)$, 所以必然存在一个正数 $\beta > 0$, 使得

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta\|\hat{E}(t)\|^2 & \leq V_1(t) \leq \\ & V_1(t_0) + \lambda_{\max}(\hat{\Pi}) \int_{t_0}^t \|\zeta(\tau)\|^2 d\tau \leq \\ & V_1(t_0) + \lambda_{\max}(\hat{\Pi}) \int_{t_0}^t \|\hat{E}(\tau)\|^2 d\tau, \end{aligned} \quad (37)$$

这表明 $-\lambda_{\max}(\hat{\Pi}) \int_{t_0}^t \|\hat{E}(\tau)\|^2 d\tau \leq V_1(t_0)$, 则存在正数 a^* , 使得

$$\int_{t_0}^t (\|\bar{P}\bar{K}\bar{\Delta}\|^2 + 1)\|\hat{E}(\tau)\|^2 d\tau \leq a^* \leq +\infty, \quad (38)$$

则有

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha\|E(t)\|^2 & \leq V_2(t) \leq \\ & V_2(t_0) + \lambda_{\max}(\Pi) \int_{t_0}^t \|E(\tau)\|^2 d\tau + a^*, \end{aligned} \quad (39)$$

即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\lambda_{\max}(\Pi) \int_{t_0}^t \|E(\tau)\|^2 d\tau \leq V_2(t_0) + a^*, \quad (40)$$

可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\lambda_{\max}(\Pi) \int_{t_0}^t \|e_i(\tau)\|^2 d\tau \leq V_2(t_0) + a^*. \quad (41)$$

由假设1可得 $e_i(t)$ 的导数 $\dot{e}_i(t)$ 有界, 所以 $e_i(t)$ 一致连续. 所以 $-\lambda_{\max}(\Pi)\|e_i(t)\|^2$ 一致连续. 又因为 $-\lambda_{\max}(\Pi) \int_{t_0}^t \|e_i(\tau)\|^2 d\tau$ 为 $-\lambda_{\max}(\Pi)\|e_i(t)\|^2$ 的原函数, 并且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\lambda_{\max}(\Pi) \int_{t_0}^t \|e_i(\tau)\|^2 d\tau \leq V_2(t_0) + a^*,$$

由引理2可得, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0$. 证毕.

定理 2 如果存在正定对称矩阵 $\bar{P} > 0$, $\bar{Q} > 0$, 对角阵 $\bar{\Phi} > 0$, $\Theta > 0$, 正数 $\varepsilon > 0$ 和适当维数的矩阵 \bar{W} , \bar{X} , 使得下述矩阵不等式成立:

$$\hat{\Xi} = \begin{bmatrix} \hat{\Xi}_1 & \bar{Q} + \bar{\Phi} \otimes \mathcal{G}_2 \\ * & -\bar{\Phi} \otimes I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (42)$$

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_1 & \bar{P} + \Theta \otimes \mathcal{G}_2 & \bar{X} \\ * & -\Theta \otimes I_n & 0 \\ * & * & -\varepsilon I_N \otimes I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (43)$$

其中:

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_1 & = \bar{Q}\bar{A} + \bar{A}^T\bar{Q} + \bar{W}\bar{C} - \bar{C}^T\bar{W}^T - \bar{\Phi} \otimes \mathcal{G}_1 + \\ & c\bar{Q}(B \otimes \Gamma) + c(B \otimes \Gamma)^T\bar{Q}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_1 & = \bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T\bar{P} + c\bar{P}(B \otimes \Gamma) + \\ & c(B \otimes \Gamma)^T\bar{P} + \bar{X} + \bar{X}^T + \\ & 3I - \Theta \otimes \mathcal{G}_1 + \varepsilon\tilde{G}^T\tilde{G}, \end{aligned}$$

$$\bar{X} = \text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_N\},$$

$$\bar{W} = \text{diag}\{W_1, W_2, \dots, W_N\},$$

则同步误差系统和观测误差系统渐近稳定, 复杂网络(1)和目标节点(2)实现同步. 控制器形式为 $\bar{K} = \bar{P}^{-1}\bar{X}$, 观测器形式为 $\bar{L} = \bar{Q}^{-1}\bar{W}$.

证 令 $\bar{W} = \bar{Q}\bar{L}$, 则式(16)改写为式(42). 不等式(17)可以改写为

$$\Pi = \hat{\Pi} + \begin{bmatrix} \bar{P}\bar{K}\bar{\Delta} + (\bar{P}\bar{K}\bar{\Delta})^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

其中:

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \bar{P} + \Theta \otimes \mathcal{G}_2 \\ * & -\Theta \otimes I_n \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Delta} = \text{diag}\{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N\},$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 & = \bar{A}\bar{P} + \bar{P}\bar{A}^T + c\bar{P}(B \otimes \Gamma) + \\ & c(B \otimes \Gamma)^T\bar{P} + \bar{P}\bar{K} + \bar{K}^T\bar{P} + \\ & 3I - \Theta \otimes \mathcal{G}_1 + \varepsilon\tilde{G}^T\tilde{G}. \end{aligned}$$

考虑 $\tilde{G} = \text{diag}\{w_1 I_n, w_2 I_n, \dots, w_N I_n\}$, 定义 $\tilde{\Delta} = \tilde{F}\tilde{G}$, 其中: $\tilde{F} = \tilde{\Delta}\tilde{G}^{-1}$, $\tilde{F}\tilde{F}^T = \tilde{F}^T\tilde{F} \leq I$.

所以有

$$\Pi = \widehat{\Pi} + \begin{bmatrix} \bar{P}\bar{K} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{F}[\tilde{G}0] + \begin{bmatrix} \tilde{G}^T \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{F}[(\bar{P}\bar{K})^T 0]. \quad (45)$$

由引理3可以得到

$$\Pi = \widehat{\Pi} + \varepsilon \begin{bmatrix} \tilde{G}^T \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{G}0] + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} \bar{P}\bar{K} \\ 0 \end{bmatrix} [(\bar{P}\bar{K})^T 0]. \quad (46)$$

由引理1可得

$$\Pi = \begin{bmatrix} \widehat{\Pi}_1 \bar{P} + \Theta \otimes \mathcal{G}_2 & \bar{P}\bar{K} \\ * & -\Theta \otimes I_n & 0 \\ * & * & -\varepsilon I_N \otimes I_n \end{bmatrix}, \quad (47)$$

其中

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}_1 &= \bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T \bar{P} + c\bar{P}(B \otimes \Gamma) + \\ & c(B \otimes \Gamma)^T \bar{P} + \bar{P}\bar{K} + \bar{K}^T \bar{P} + \\ & 3I - \Theta \otimes \mathcal{G}_1 + \varepsilon \tilde{G}^T \tilde{G}. \end{aligned}$$

令 $\bar{X} = \bar{P}\bar{K}$, 可得式(43). 如果不等式(42)、不等式(43)成立, 则联合误差系统渐近稳定, 复杂网络(1)和目标节点(2)实现同步, 从上述分析可得 $\bar{L} = \bar{Q}^{-1}\bar{W}$, $\bar{K} = \bar{P}^{-1}\bar{X}$. 证毕.

定理 3 对于复杂网络的节点 i , 如果触发条件由式(7)确定, 则可以排除Zeno行为.

证 由条件(7)可得

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \|\delta_i(t)\| - \rho_i \|\bar{e}_i(t)\| \geq 0, \text{ 即} \\ \frac{\|\delta_i(t)\|}{\|\bar{e}_i(t)\|} &\geq \rho_i, \end{aligned} \quad (48)$$

令

$$g_i(t) = \frac{\|\delta_i(t)\|}{\|\bar{e}_i(t)\|}. \quad (49)$$

当 $t \in [t_k^i, t_{k+1}^i)$ 时,

$$\begin{aligned} \dot{g}_i(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta_i^T(t)\delta_i(t)}{\bar{e}_i^T(t)\bar{e}_i(t)} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & \frac{\delta_i^T(t)\dot{\delta}_i(t)}{\|\delta_i(t)\| \|\bar{e}_i(t)\|} - \frac{\bar{e}_i^T(t)\dot{\bar{e}}_i(t)\|\delta_i(t)\|}{\|\bar{e}_i(t)\|^3}, \end{aligned} \quad (50)$$

由 $\delta_i(t) = \bar{e}_i(t) - \bar{e}_i(t_k^i)$, 可得 $\dot{\delta}_i(t) = \dot{\bar{e}}_i(t)$. 对式(51)两端取范数, 得

$$\|\dot{g}_i(t)\| \leq (1 + g_i(t)) \frac{\|\dot{\bar{e}}_i(t)\|}{\|\bar{e}_i(t)\|}. \quad (51)$$

由式(14)可得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_i(t) &= (A + K_i(I + \Delta_i))\bar{e}_i(t) - K_i(I + \\ & \Delta_i)\delta_i(t) + L_i C \dot{\bar{e}}_i(t) + c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma \bar{e}_j(t) + \\ & f(\hat{x}_i(t), t) - f(s(t), t). \end{aligned} \quad (52)$$

由微分中值定理可得, 存在一个 M_i , 使得 $f(\hat{x}_i(t),$

$t) - f(s(t), t) = M_i \bar{e}_i(t)$. 所以有

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_i(t) &= (A + K_i(I + \Delta_i) + M_i)\bar{e}_i(t) - \\ & K_i(I + \Delta_i)\delta_i(t) + L_i C \dot{\bar{e}}_i(t) + \\ & c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma \bar{e}_j(t). \end{aligned} \quad (53)$$

存在一个正数 $d > 1$, 使得

$$d\sqrt{N}\|\bar{e}_i(t)\| \geq \|\bar{e}(t)\| \geq \|\bar{e}_j(t)\|. \quad (54)$$

由于 $\frac{d}{dt}\|\bar{e}_i(t)\| \leq \|\dot{\bar{e}}_i(t)\|$, 并结合式(54), 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\bar{e}_i(t)\| &\leq (\|A + K_i(I + \Delta_i) + M_i\| + \\ & c \sum_{j=1}^N \|b_{ij} \Gamma\| d\sqrt{N})\|\bar{e}_i(t)\| + \\ & \|K_i(I + \Delta_i)\| \|\delta_i(t)\| + \\ & \|L_i C\| \|\dot{\bar{e}}_i(t)\|. \end{aligned} \quad (55)$$

存在一个正数 v , 使得 $\|\dot{\bar{e}}_i(t)\| < v\|\bar{e}_i(t)\|$. 根据式(52)和式(55), 可得

$$\dot{g}_i(t) \leq (1 + g_i(t))(p_i + q_i g_i(t)), \quad (56)$$

其中:

$$\begin{aligned} p_i &= \|A + K_i(I + \Delta_i) + M_i\| + \\ & c \sum_{j=1}^N \|b_{ij} \Gamma\| d\sqrt{N} + v\|L_i C\|, \\ q_i &= \|K_i(I + \Delta_i)\|. \end{aligned}$$

令 $\dot{r}_i(t) = (1 + r_i(t))(p_i + q_i r_i(t))$, 可知此微分方程的解 $r_i(t) \geq g_i(t)$. 求解此微分方程, 得

$$r_i(t) = \frac{p_i e^{(p_i - q_i)(t + c_i)} - 1}{1 - q_i e^{(p_i - q_i)(t + c_i)}}, \quad (57)$$

当 $r_i(t) = 0$ 时, $c_i = \frac{1}{q_i - p_i} \ln p_i$. 设 τ 为事件触发间隔的下界, 其满足 $r_i(t) = \frac{p_i e^{(p_i - q_i)(t + c_i)} - 1}{1 - q_i e^{(p_i - q_i)(t + c_i)}}$.

$$\text{令 } r_i(\tau) = \rho_i, \text{ 解得下界 } \tau = \frac{1}{p_i - q_i} \ln \frac{p_i(\rho_i + 1)}{p_i + q_i \rho_i}.$$

当 $p_i > q_i$, 可得 $p_i(\rho_i + 1) > p_i + q_i \rho_i$, $\tau > 0$. 反之, $p_i(\rho_i + 1) < p_i + q_i \rho_i$, $\tau > 0$. 证毕.

4 仿真

在本节中, 仿真所采用的模型为蔡氏混沌电路, 模型描述如下^[32]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b & -b & \eta \\ 0 & -\varsigma & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\kappa \varphi(x_{i1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中:

$$\begin{aligned} \varphi(x_{i1}) &= \mu_{b1} x_{i1} + 0.5(\mu_{a1} - \mu_{b1})(|x_{i1} + 1| - \\ & |x_{i1} - 1|), \end{aligned}$$

$$a = 8, b = 1, \eta = 1, \kappa = 9.1, \zeta = 16.6,$$

$$\rho = 0.138, \mu_{a1} = -1.3938, \mu_{b1} = -0.7559.$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 1]^T, c = 1, \Gamma = 0.05 \times I.$$

通过上述给定的非线性函数 $\varphi(x_{i1})$, 很容易验证满足假设1.

$$G_1 = \begin{bmatrix} 6.8787 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 12.738 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

触发阈值选择 $\rho_1 = 0.71, \rho_2 = 0.73, \rho_3 = 0.75, \rho_4 = 0.77, \rho_5 = 0.79$. 量化密度 $\eta_j = 0.5$. 利用MATLAB中的Toolbox来求解定理2中的线性矩阵不等式, 可以获得所需的控制器增益和观测器增益. 为了验证定理2的有效性, 对系统(15)进行仿真.

由图1-2可知, 系统的同步误差系统和观测误差系统都趋于0. 图3为控制输入的曲线. 事件触发序列如图4所示. 由图4可知, 节点1触发了91次, 节点2触发了90次, 节点3触发了58次, 节点4触发了55次, 节点5触发了59次, 可得5个节点的平均触发率为2.35%.

采用文献[19]的触发方式, 当触发阈值选择与以上参数相同时, 事件触发序列如图5所示, 由图5可知, 节点1触发了223次, 节点2触发了276次, 节点3触发了262次, 节点4触发了255次, 节点5触发了250次, 可得5个节点的平均触发率为8.44%, 大于本文的事件触发率. 这意味着在阈值相等的条件下, 本文方法的触发次数更少, 信息传输次数更少.

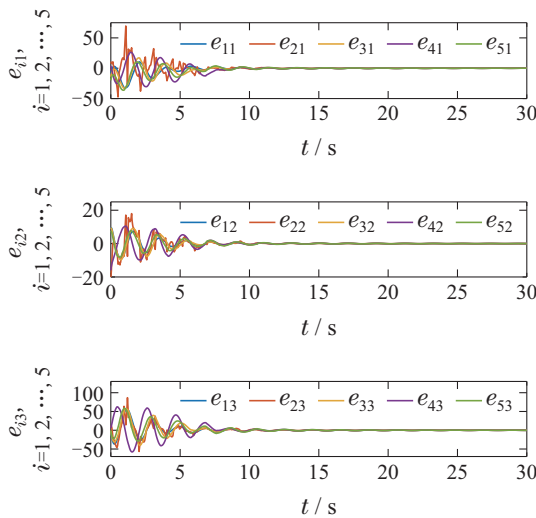


图1 同步误差

Fig. 1 Synchronization errors

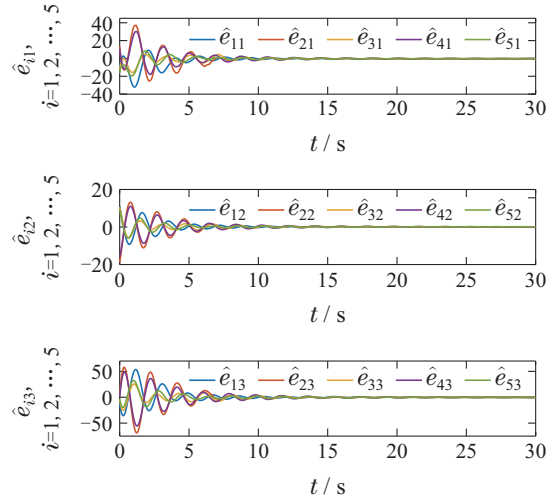


图2 观测误差

Fig. 2 Observation errors

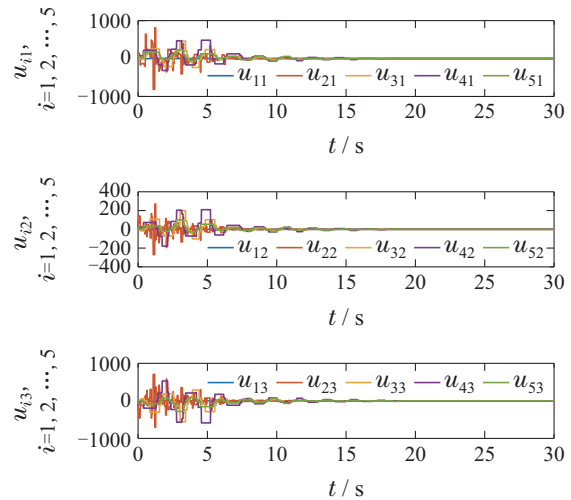


图3 控制输入

Fig. 3 Control inputs

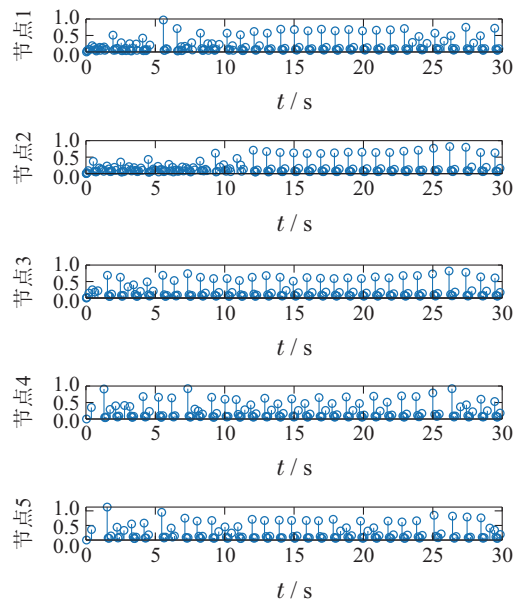


图4 事件触发序列

Fig. 4 Event-triggered sequences

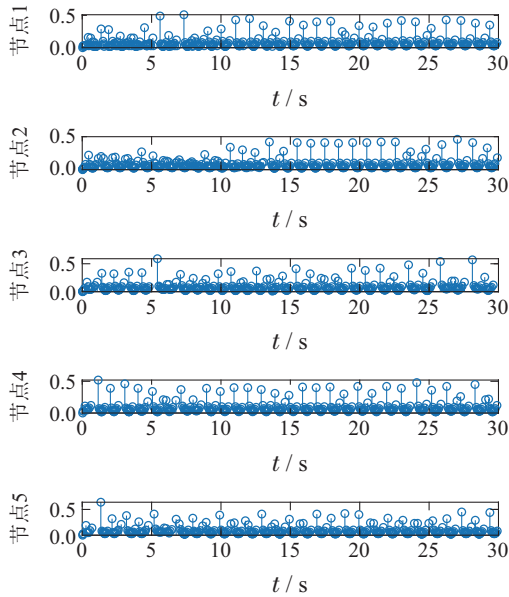


图5 文献[19]事件触发序列

Fig. 5 Event-triggered sequences for references [19]

5 结论

本文通过事件触发策略和对数量化器研究了基于观测器的复杂网络同步问题, 通过设计分布式状态观测器和控制器, 实现了复杂网络的同步控制. 最后, 用一个数值例子验证了所提方法的有效性. 本文还得到以下结论: 事件触发策略与基于时间序列的触发相比, 触发次数明显减小. 事件触发策略的触发次数随着阈值的变化而变化. 阈值越大, 触发函数愈不易为负, 则愈不易触发, 触发次数就越少.

参考文献:

- [1] NEWMAN M E J. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 2003, 45(2): 167 – 256.
- [2] WANG X F, CHEN G. Complex networks: Small-world, scale-free and beyond. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2003, 3(1): 6 – 20.
- [3] AGARWAL A, MARWAN N, MAHESWARAN R, et al. Quantifying the roles of single stations within homogeneous regions using complex network analysis. *Journal of Hydrology*, 2018, 563: 802 – 810.
- [4] MIKAIL R, OLAF S. Complex network measures of brain connectivity: Uses and interpretations. *Neuroimage*, 2010, 52(3): 1059 – 1069.
- [5] ZHANG L, ZHONG J, LU J. Intermittent control for finite-time synchronization of fractional-order complex networks. *Neural Networks*, 2021, 144: 11 – 20.
- [6] ZHAO L, WEN S, XU M, et al. PID control for output synchronization of multiple output coupled complex networks. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, 9(3): 1553 – 1566.
- [7] HE X, ZHANG H. Exponential synchronization of complex networks via feedback control and periodically intermittent noise. *Journal of the Franklin Institute*, 2022, 359(8): 3614 – 3630.
- [8] DING D, TANG Z, WANG Y, et al. Secure synchronization of complex networks under deception attacks against vulnerable nodes. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 399: 126017.
- [9] ZHU J W, YANG G H. Robust H_∞ dynamic output feedback synchronization for complex dynamical networks with disturbances. *Neurocomputing*, 2016, 175(A): 287 – 292.
- [10] SHI Yujing, LI Qiang. Adaptive finite time synchronization control for complex dynamic networks. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(1): 147 – 154.
(石宇静, 李强. 复杂动态网络自适应有限时间同步控制. 控制理论与应用, 2020, 37(1): 147 – 154.)
- [11] FAN H G, SHI K B, ZHAO Y, et al. Pinning impulsive cluster synchronization of uncertain complex dynamical networks with multiple time-varying delays and impulsive effects. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2022, 587: 4378 – 4389.
- [12] SRI K, SOUNDARARAJAN G, NAGAMANI G. Exponential H_∞ synchronization and anti-synchronization of delayed discrete-time complex-valued neural networks with uncertainties. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2023, 207: 301 – 321.
- [13] ZHANG L Z, LU J Q, JIANG B X, et al. Distributed synchronization of delayed dynamic networks under asynchronous delay-dependent impulsive control. *Chaos, Solitons Fractals*, 2023, 168: 113 – 121.
- [14] HENDRICKS E, JENSEN M, CHEVALIER A. Problems in event-based engine control. *Proceedings of the 1994 American Control Conference*. Baltimore, MD, USA: IEEE, 1994, 2: 1585 – 1587.
- [15] HOU N, DONG H, ZHANG W, et al. Event-triggered state estimation for time-delayed complex networks with gain variations based on partial nodes. *International Journal of General Systems*, 2018, 47(5): 477 – 490.
- [16] LI Q, SHEN B, SHU H. Event-triggered synchronization control for complex networks with uncertain inner coupling. *International Journal of General Systems*, 2015, 44(2): 212 – 225.
- [17] ZHU W, WANG D, LIU L. Event-based impulsive control of continuous-time dynamic systems and its application to synchronization of memristive neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 29(8): 3599 – 3609.
- [18] LV X, CAO J, LI X. Synchronization analysis for complex dynamical networks with coupling delay via event-triggered delayed impulsive control. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 51(11): 5269 – 5278.
- [19] HUANG Ling, SUN Xiaoyu, LIN Xiaona. Dynamic event-triggered control for nonlinear networks with DoS attacks. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(6): 1033 – 1042.
(黄玲, 孙晓宇, 蔺小娜. 具有DoS攻击非线性网络的动态事件触发控制. 控制理论与应用, 2022, 39(6): 1033 – 1042.)
- [20] HUANG Ling, GUO Jing, ZHANG Hengyan. Observer-based periodic denial of service attack dynamic event-triggered control for networked systems. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(6): 851 – 861.
(黄玲, 郭婧, 张恒艳. 基于观测器的周期拒绝服务攻击网络化系统动态事件触发控制. 控制理论与应用, 2021, 38(6): 851 – 861.)
- [21] BAO H, PARK J H, CAO J. Adaptive synchronization of fractional-order output-coupling neural networks via quantized output control. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, 32(7): 3230 – 3239.
- [22] QIN X J, JIANG H. Strictly intermittent quantized control for fixed/predefined-time cluster lag synchronization of stochastic multi-weighted complex networks. *Neural Networks*, 2023, 158: 258 – 271.
- [23] YANG X, QIANG S, CAO J, et al. Synchronization of coupled markovian reaction-diffusion neural networks with proportional delays via quantized control. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, 30(3): 951 – 958.
- [24] WU Z G, XU Z, PENG S, et al. Nonfragile state estimation of quantized complex networks with switching topologies. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(10): 5111 – 5121.

- [25] WU Z, XU Y, PAN Y, et al. Event-triggered pinning control for consensus of multiagent systems with quantized information. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2017, 48(11): 1929 – 1938.
- [26] XUE Y, ZHENG B C, YU X, et al. Robust sliding mode control for T-S fuzzy systems via quantized state feedback. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(4): 2261 – 2272.
- [27] ZHANG D, WANG Q G, LI H, et al. Asynchronous state estimation for discrete-time switched complex networks with communication constraints. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29: 1732 – 1746.
- [28] LIU D, YE D. Pinning-observer-based secure synchronization control for complex dynamical networks subject to DoS attacks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2020, 67(12): 5394 – 5404.
- [29] HAN Q L, LIU Y, YANG F. Optimal communication network-based H_∞ quantized control with packet dropouts for a class of discrete-time neural networks with distributed time delay. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 27(2): 426 – 434.
- [30] LAST E. Linear matrix inequalities in system and control theory. *Proceedings of the IEEE*, 1998, 86(12): 2473 – 2474.
- [31] SLOTINE J, LI W. Applied nonlinear control. *Englewood Cliffs*. NJ: Prentice Hall, 1991.
- [32] CHUA L O, ITOH M, KOCAREV L. Chaos synchronization in Chua's circuit. *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, 1993, 3(1): 93 – 108.

作者简介:

黄玲 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂网络同步控制、信号的处理与识别, E-mail: mail_huangling@163.com;

王云飞 硕士研究生, 目前研究方向为复杂网络同步控制, E-mail: 2238756684@qq.com;

张恒艳 讲师, 长期从事控制理论方面内容研究, E-mail: 853102210@qq.com.