

# 基于扰动区间观测器的四旋翼无人机几何控制

蔡庆, 邱宏凌, 费城, 沈俊<sup>†</sup>

(南京航空航天大学自动化学院, 江苏南京 210000)

**摘要:** 针对扰动作用下的四旋翼无人机跟踪控制问题, 基于区间观测器设计了几何跟踪控制策略. 首先, 对于一类由外源系统生成的扰动, 在龙伯格观测器的基础上借助区间估计技术设计了扰动区间观测器, 实现了对扰动上下界的估计; 其次, 利用扰动区间信息设计了扰动效应指示器以判断扰动对四旋翼无人机姿态的影响, 构建了内环几何控制器; 然后, 基于扰动估计信息设计了外环位置控制器, 保证了跟踪误差满足预设的约束, 并证明了跟踪误差是有界的; 最后, 通过仿真验证了该方法的有效性.

**关键词:** 四旋翼无人机; 区间观测器; 扰动效应指示器; 几何控制

**引用格式:** 蔡庆, 邱宏凌, 费城, 等. 基于扰动区间观测器的四旋翼无人机几何控制. 控制理论与应用, 2026, 43(3): 489–498

DOI: 10.7641/CTA.2025.30628

## Disturbance interval observer based geometric control for quadrotor

CAI Qing, QIU Hong-ling, FEI Cheng, SHEN Jun<sup>†</sup>

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210000, China)

**Abstract:** In this paper, a geometric tracking control strategy based on interval observer is designed to solve the tracking control problem of quadrotor under disturbances. Firstly, for a class of disturbances generated by some exogenous systems, a disturbance interval observer is constructed on the basis of the Luenberger observer by using the interval estimation technique, which realizes the estimation of the upper bounds and the lower bounds of disturbances. Secondly, in order to evaluate the effect of disturbance on the attitude of the quadrotor, a disturbance effect indicator is designed using the disturbance interval information, and an inner loop geometric controller is constructed. Then, exploiting the information of disturbance obtained by the interval observer, an outer loop position controller is proposed to ensure that the tracking error meets the predetermined constraints, and the tracking errors are proved to be bounded. Finally, the effectiveness of the proposed control strategy is verified by simulations.

**Key words:** quadrotor; interval observer; disturbance effect indicator; geometric control

**Citation:** CAI Qing, QIU Hongling, FEI Cheng, et al. Disturbance interval observer based geometric control for quadrotor. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(3): 489–498

## 1 引言

四旋翼无人机目前在许多领域已经有了成功应用, 如航拍、电路巡检、地形勘探以及货物运输等. 为了利用四旋翼无人机在复杂的环境中执行不同的任务<sup>[1]</sup>, 高效的飞行控制器是必不可少的.

近年来, 基于反步控制<sup>[2]</sup>、滑模控制<sup>[3]</sup>、自适应控制<sup>[4]</sup>等技术的控制器被开发出来. 这些控制器基于欧拉角设计, 非常直观但却存在奇点问题. 几何控制器直接在三维特殊正交群上定义姿态控制律, 避免了奇点问题, 且控制器的整体复杂度较低<sup>[5–7]</sup>.

从实际应用角度而言, 扰动可能会导致控制器的性能恶化. 文献[8]对空气动力阻尼进行建模, 采用递归最小二乘对其进行补偿, 设计了四旋翼无人机几何自适应控制器. 文献[9]利用鲁棒积分符号误差补偿模型不确定性和未知外部扰动, 实现了四旋翼无人机的敏捷飞行. 文献[10]将扰动观测器和几何控制结合, 设计了基于观测器的鲁棒控制方法, 有效地抑制了跟踪误差. 尽管这些方法增强了四旋翼无人机对扰动的鲁棒性, 但却无法在理论上保证位置跟踪精度.

作为一种典型的欠驱动系统, 四旋翼无人机位置

收稿日期: 2023–09–17; 录用日期: 2025–04–22.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: junshen2009@163.com.

本文责任编辑: 侯增广.

国家自然科学基金项目(61973156), 南京航空航天大学科研与实践创新计划项目(XCXJH20220324)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61973156), and the Postgraduate Research & Practice Innovation Program of NU-AA (XCXJH20220324).

跟踪效果受到姿态误差收敛速度的影响. 实际上, 扰动不总是对系统产生负面的影响: 当扰动对系统的影响和控制输入对系统的影响相同时, 扰动可以被视为控制输入的一部分而不需要被补偿. 目前, 已有一些文献通过扰动利用控制方案进行了研究. 文献[11]通过分析扰动对系统的影响提出了扰动效应指示器(disturbance effect indicator, DEI), 并基于此设计了扰动效应触发控制方案以改善控制器性能. 文献[12]利用空气动力阻力来增大四旋翼无人机控制器增益, 从而提高跟踪误差收敛速度. 由于扰动有着改善系统性能的能力, 因此, 可以在姿态控制器设计中考虑利用扰动提高姿态误差收敛速度.

利用扰动改善控制器性能的前提是实现对扰动的精确估计. 尽管扰动观测器<sup>[13]</sup>可以有效地对扰动进行估计, 但估计误差的存在不利于准确判断扰动对系统的影响. 与估计系统状态精确值的观测器不同, 区间观测器<sup>[14-15]</sup>可以提供包含当前系统状态所有可能值的上、下边界, 这在一定程度上能够缓解上述问题. 据作者所知, 目前利用扰动改善四旋翼无人机控制性能的问题尚未得到充分研究, 更不用说基于扰动区间观测器的扰动利用控制方案.

受上述讨论启发, 本文针对扰动作用下的四旋翼无人机控制问题, 提出了基于扰动区间观测器的扰动利用几何控制方案. 本文的主要贡献为: 1) 借助区间估计技术设计扰动区间观测器, 实现对未知外源扰动上下界的准确估计; 2) 在位置环控制中, 引入一个由连续分段函数组成的指定时间漏斗边界, 在理论上对位置跟踪误差进行限制, 保证位置跟踪精度; 3) 在姿态环控制中, 分析扰动区间内的扰动对姿态系统的影响以构建扰动效应指示器, 利用扰动改善姿态控制器的瞬态性能.

## 2 问题描述

### 2.1 符号说明

在本文中,  $\mathbb{R}_+^n$  是具有非负项的  $n$  维向量集合,  $\mathbb{R}_+^{m \times n}$  是具有非负项的矩阵集合,  $I_n$  是  $n$  阶单位矩阵,  $\|\cdot\|$  是欧几里得范数. 对于矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\text{tr}(A)$  是矩阵  $A$  的迹;  $A^+ = \max\{O_n, A\}$ ,  $A^- = A^+ - A$ ;  $\lambda_M(A)$  和  $\lambda_m(A)$  分别代表矩阵  $A$  的最大特征值以及最小特征值. 三维特殊正交群  $SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = R R^T = I_3, \det R = 1\}$ . 对于向量  $a, b \in \mathbb{R}^3$ ,  $S(a)$  是满足  $S(a)b = a \times b$  的反对称矩阵,  $S(a)^\vee = a$ .  $\circ$  是哈达玛积.

为了对四旋翼无人机进行建模, 引入如图1所示的3个坐标系, 分别为惯性系  $\mathcal{W} = \{x_w, y_w, z_w\}$ 、机体系  $\mathcal{B} = \{x_b, y_b, z_b\}$  和过渡系  $\mathcal{C} = \{x_c, y_c, z_c\}$ . 考虑四旋翼无人机系统在飞行过程中受到如阵风扰动、负

载变化等多种因素的影响, 其动力学模型为

$$\dot{p} = v, \quad (1)$$

$$m\dot{v} = -u_f R e_3 + m g e_3 + d_f, \quad (2)$$

$$\dot{R} = R S(\omega), \quad (3)$$

$$J\dot{\omega} = -S(\omega)J\omega + u_\tau + d_\tau, \quad (4)$$

其中:  $m$  代表四旋翼无人机质量;  $g$  代表重力常数;  $p = [p_x \ p_y \ p_z]^T \in \mathbb{R}^3$  和  $v = [\dot{p}_x \ \dot{p}_y \ \dot{p}_z]^T \in \mathbb{R}^3$  分别代表四旋翼无人机质心在惯性坐标系  $\mathcal{W}$  中的位置和速度;  $R = [b_{1b} \ b_{2b} \ b_{3b}] \in SO(3)$  代表机体坐标系相对于惯性坐标系的旋转;  $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \in \mathbb{R}^3$  代表四旋翼无人机在机体坐标系  $\mathcal{B}$  中的角速度; 力和力矩矢量  $d_f \in \mathbb{R}^3$  和  $d_\tau \in \mathbb{R}^3$  是分别作用于位置子系统和姿态子系统的未知外源扰动;  $u_f \in \mathbb{R}$  和  $u_\tau \in \mathbb{R}^3$  分别代表旋翼产生的总推力和控制力矩;  $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

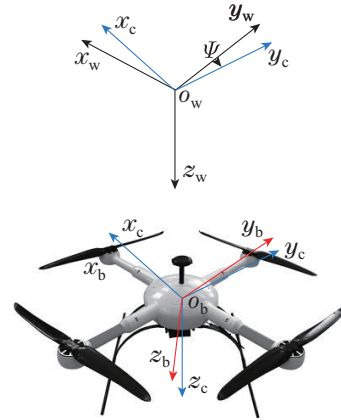


图1 无人机坐标系示意图

Fig. 1 Reference frame of quadrotor

和文献[16]类似, 本文对扰动  $d$  作出如下假设:

**假设 1** 扰动  $d$  由如下外源系统生成:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_\xi \xi + \kappa, \\ d = C_\xi \xi, \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\xi \in \mathbb{R}^N$  是系统(5)的状态向量;  $\kappa \in \mathbb{R}^N$  是未知时变向量, 满足  $\underline{\kappa} \leq \kappa \leq \bar{\kappa}$ ,  $\underline{\kappa}$  和  $\bar{\kappa}$  为已知常向量;  $A_\xi \in \mathbb{R}^{N \times N}$  和  $C_\xi \in \mathbb{R}_+^{6 \times N}$  是已知常数矩阵, 并且  $(A_\xi, C_\xi)$  是可观测的.

### 2.2 控制目标

本文的控制目标是在一定初始条件下使四旋翼无人机跟踪给定的期望轨迹, 其中期望轨迹包含两个参数, 即四旋翼无人机的期望位置  $p_d$  和期望偏航角  $\psi_d$ .

## 3 扰动区间观测器设计

在设计扰动区间观测器之前, 首先给出如下定义以及相关引理:

**定义 1**<sup>[17]</sup> 如果矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的非主对角线元素均是非负的, 则称  $A$  为 Metzler 矩阵.

**定义 2**<sup>[18]</sup> 如果矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的所有特征值均有负实部, 则称  $A$  为 Hurwitz 矩阵.

**引理 1**<sup>[19]</sup> 考虑连续线性系统

$$\dot{s}(t) = As(t) + w(t),$$

其中, 系统状态  $s(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $w(t) \in \mathbb{R}_+^n$ . 如果  $A$  为 Metzler 矩阵, 且  $s(0) \in \mathbb{R}_+^n$ , 则  $s(t) \in \mathbb{R}_+^n$  对任意  $t \geq 0$  成立.

**引理 2**<sup>[18]</sup> 如果  $b, \underline{b}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$  满足  $\underline{b} \leq b \leq \bar{b}$ , 则  $A^+\underline{b} - A^-\bar{b} \leq Ab \leq A^+\bar{b} - A^-\underline{b}$ .

为了对扰动  $d$  进行估计, 引入辅助变量  $\eta \in \mathbb{R}^N$  以构建扰动观测器, 由此得到

$$\begin{cases} \dot{\xi} = P\eta + L\nu, \\ \dot{\eta} = P^{-1}(A_\xi - LC_\xi)P\eta + P^{-1}\varphi + P^{-1}\kappa, \\ d = C_\xi\xi, \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$  和  $L \in \mathbb{R}^{N \times 6}$  为待设计矩阵,  $\varphi = (A_\xi - LC_\xi)L\nu + L[(u_f Re_3 - mge_3)^T (S(\omega)J\omega - u_\tau)^T]^T \in \mathbb{R}^N$ ,  $\nu = [mv^T (J\omega)^T]^T \in \mathbb{R}^6$ .

设计区间观测器对辅助变量  $\eta$  的上下界进行估计, 与文献[19]类似, 区间观测器构建如下:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\eta}} = P^{-1}(A_\xi - LC_\xi)P\bar{\eta} + P^{-1}\varphi + \bar{\Theta}, \\ \dot{\underline{\eta}} = P^{-1}(A_\xi - LC_\xi)P\underline{\eta} + P^{-1}\varphi + \underline{\Theta}, \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $\bar{\Theta} = (P^{-1})^+\bar{\kappa} - (P^{-1})^-\underline{\kappa}$ ,  $\underline{\Theta} = (P^{-1})^+\underline{\kappa} - (P^{-1})^-\bar{\kappa}$ .

定义辅助变量估计误差上界  $\bar{e}_\eta = \bar{\eta} - \eta$ , 估计误差下界  $\underline{e}_\eta = \eta - \underline{\eta}$ , 则辅助变量估计误差动力学满足

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_\eta = P^{-1}(A_\xi - LC_\xi)P\bar{e}_\eta + \bar{\Theta} - P^{-1}\kappa, \\ \dot{\underline{e}}_\eta = P^{-1}(A_\xi - LC_\xi)P\underline{e}_\eta + P^{-1}\kappa - \underline{\Theta}, \end{cases} \quad (8)$$

根据式(6)–(7), 可以得到如下的扰动上下界:

$$\begin{cases} \bar{d} = C_\xi(P^+\bar{\eta} - P^-\underline{\eta}) + C_\xi L\nu, \\ \underline{d} = C_\xi(P^+\underline{\eta} - P^-\bar{\eta}) + C_\xi L\nu, \end{cases} \quad (9)$$

其中:  $\bar{d} = [\bar{d}_f^T \bar{d}_\tau^T]^T$ ,  $\underline{d} = [\underline{d}_f^T \underline{d}_\tau^T]^T$ .

**定理 1** 考虑外源系统(5)作用下的四旋翼无人机系统(1)–(4). 若矩阵  $P^{-1}(A_\xi - LC_\xi)P$  是 Metzler 矩阵且是 Hurwitz 矩阵, 并且区间观测器(7)的初始估计误差  $\bar{e}_\eta(0)$  和  $\underline{e}_\eta(0)$  是非负的, 那么扰动估计误差  $\bar{e}_d = \bar{d} - d$  和  $\underline{e}_d = d - \underline{d}$  是非负且有界的.

**证** 考虑辅助变量估计误差动力学(8), 可知

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} - P^{-1}\kappa &= (P^{-1})^+(\bar{\kappa} - \kappa) + (P^{-1})^-(\kappa - \underline{\kappa}), \\ P^{-1}\kappa - \underline{\Theta} &= (P^{-1})^+(\kappa - \underline{\kappa}) + (P^{-1})^-(\bar{\kappa} - \kappa), \end{aligned}$$

由于  $(P^{-1})^+ \geq 0$ ,  $(P^{-1})^- \geq 0$ ,  $\bar{\kappa} - \kappa \geq 0$ ,  $\kappa - \underline{\kappa} \geq 0$ , 且  $\kappa, \underline{\kappa}, \bar{\kappa}$  有界, 因此  $\bar{\Theta} - P^{-1}\kappa$  和  $P^{-1}\kappa - \underline{\Theta}$  均是非负有界的.

根据引理1, 当  $P^{-1}(A_\xi - LC_\xi)P$  为 Metzler 矩阵且 Hurwitz 稳定, 且初始估计误差  $\bar{e}_\eta(0)$  和  $\underline{e}_\eta(0)$  非负时, 辅助变量估计误差  $\bar{e}_\eta$  和  $\underline{e}_\eta$  非负且有界, 因此式(7)是式(6)的区间观测器.

考虑式(7)和式(9), 扰动估计误差可以进一步写成如下形式:

$$\begin{cases} \bar{e}_d = C_\xi P^+ \bar{e}_\eta + C_\xi P^- \underline{e}_\eta, \\ \underline{e}_d = C_\xi P^- \bar{e}_\eta + C_\xi P^+ \underline{e}_\eta, \end{cases} \quad (10)$$

由于  $C_\xi \geq 0$ ,  $(P^{-1})^+ \geq 0$ ,  $(P^{-1})^- \geq 0$ , 且  $\bar{e}_\eta$  和  $\underline{e}_\eta$  是非负且有界的, 因此扰动估计误差  $\bar{e}_d$  和  $\underline{e}_d$  是非负且有界的, 即扰动  $d$  满足  $\underline{d} \leq d \leq \bar{d}$ . 证毕.

选择  $P$  和  $L$  使  $P^{-1}(A_\xi - LC_\xi)P$  为 Metzler 矩阵且 Hurwitz 稳定需求解一个 Sylvester 方程<sup>[18]</sup>:  $P^{-1}A_\xi - MP^{-1} = QC_\xi$ ,  $Q = P^{-1}L$ , 其中  $M$  和  $A_\xi$  没有相同特征值, 如下引理给出了计算  $P$  和  $L$  的步骤.

**引理 3**<sup>[20]</sup> 设计  $L$  使  $(A_\xi - LC_\xi)$  和 Metzler 矩阵  $M$  有相同的特征值. 如果存在  $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^{1 \times N}$  使得  $(A_\xi - LC_\xi, q_1)$  和  $(M, q_2)$  均是可观测的, 那么  $P^{-1} = O_2^{-1}O_1$ ,  $Q = P^{-1}L$ , 其中:

$$O_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_1(A_\xi - LC_\xi)^{N-1} \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} q_2 \\ \vdots \\ q_2 M^{N-1} \end{bmatrix}.$$

**注 1** 为了避免文献[20]中方法存在的数值问题, 本文首先选择一个合适的增益矩阵  $L$  使得  $A_\xi - LC_\xi$  和  $M$  具有相同的特征值, 然后再寻找满足引理3的向量  $q_1$ .

## 4 控制器设计

### 4.1 姿态控制器

令  $R_e = R_d^T R$ , 定义姿态误差函数  $\Psi(R_e) \in \mathbb{R}$ , 姿态误差  $e_R \in \mathbb{R}^3$ , 角速度误差  $e_\omega \in \mathbb{R}^3$  为

$$\Psi(R_e) = \frac{1}{2} \text{tr}[I_3 - R_e], \quad (11)$$

$$e_R = \frac{1}{2}(R_e - R_e^T)^\vee, \quad (12)$$

$$e_\omega = \omega - R_e^T \omega_d, \quad (13)$$

其中:  $R_d = [b_{1d} \ b_{2d} \ b_{3d}] \in SO(3)$  代表四旋翼无人机期望姿态,  $\omega_d \in \mathbb{R}^3$  代表四旋翼无人机期望角速度.

对式(11)–(13)求时间导数, 则旋转误差动力学满足

$$\dot{\Psi}(R_e) = e_R^T e_\omega, \quad (14)$$

$$\dot{e}_R = \frac{1}{2}(\text{tr}[R_e^T]I - R_e^T)e_\omega = E(R_e)e_\omega, \quad (15)$$

$$\dot{e}_\omega = \dot{\omega} + S(\omega)R_e^T \omega_d - R_e^T \dot{\omega}_d. \quad (16)$$

利用罗德里格斯公式,  $R_e = R_d^T R \in SO(3)$  可以

表示为如下指数映射形式:

$$R_e = \exp(S(\rho n_e)) = \cos \rho I_3 + (1 - \cos \rho) n_e n_e^T + \sin \rho S(n_e), \quad (17)$$

其中:  $n_e \in \mathbb{R}^3$  代表旋转轴的单位向量,  $-\pi < \rho < \pi$  代表旋转角度. 直接计算可以得到

$$\Psi(R_e) = 1 - \cos \rho, \quad (18)$$

$$e_R = n_e \sin \rho, \quad (19)$$

$$\|e_R\|^2 = \sin^2 \rho = (2 - \Psi(R_e))\Psi(R_e), \quad (20)$$

显然  $\|e_R\|$  代表四旋翼无人机期望姿态  $R_d$  和实际姿态  $R$  之间旋转角度的正弦值.

为设计姿态控制器, 考虑函数

$$V_1 = k_1 \Psi(R_e) + \frac{1}{2} e_\omega^T J e_\omega, \quad (21)$$

结合式(14)和式(16),  $V_1$  的时间导数为

$$\dot{V}_1 = k_1 e_R^T e_\omega + e_\omega^T (-S(\omega) J \omega + u_\tau + d_\tau - J(S(\omega) R_e^T \omega_d - R_e^T \dot{\omega}_d)), \quad (22)$$

则姿态控制器设计为

$$u_\tau = -k_1 e_R - k_2 e_\omega + S(\omega) J \omega - J(R_e^T \dot{\omega}_d - S(\omega) R_e^T \omega_d) - \hat{d}_\tau, \quad (23)$$

其中:  $k_1$  和  $k_2$  是非负常数,  $\hat{d}_\tau$  是扰动  $d_\tau$  的估计值,  $\hat{d}_\tau$  可以取位于扰动区间  $[\underline{d}_\tau, \bar{d}_\tau]$  内的任意值.

考虑到扰动对四旋翼无人机系统的影响是有限的<sup>[21]</sup>, 本文作出如下假设:

**假设 2** 对于扰动作用下的四旋翼无人机系统(1)–(4), 姿态误差函数满足  $\Psi(R_e) \leq \delta < 2$ , 其中  $\delta$  是一个非负常数.

为了利用扰动, 利用扰动效应指示器 DEI 来分析扰动对系统的影响, 并基于此设计四旋翼无人姿态机控制器. 首先给出如下 DEI 的定义:

**定义 3** 对于四旋翼无人机姿态误差系统(12)–(13), 令  $e_1 = c J^{-1} e_R + e_\omega$ , 其中  $c$  是一个非负常数,  $H_1 = \text{sgn}(\underline{d}_\tau \circ e_1) = [H_{11} \ H_{12} \ H_{13}]^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $H_2 = \text{sgn}(\bar{d}_\tau \circ e_1) = [H_{21} \ H_{22} \ H_{23}]^T \in \mathbb{R}^3$ , 其中  $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  是一个逻辑函数. 根据上述  $H_1$  和  $H_2$  的信息, 扰动效应指示器定义为

$$H_d = [H_{d1} \ H_{d2} \ H_{d3}]^T \in \mathbb{R}^3, \quad (24)$$

其中:

$$H_{di} = \begin{cases} 0, & (H_{1i}, H_{2i}) \in \{(-1, -1)\}, \\ 1, & \text{其他}, \end{cases}$$

对于  $i = 1, 2, 3$  成立.

**注 2** 相比于文献[11], 式(24)的 DEI 是基于扰动区间的上下界构造的, 能够准确判断区间内扰动对系统的影响.

基于式(24)中的 DEI, 姿态控制器(23)可以设计为

$$u_\tau = -k_1 e_R - k_2 e_\omega + S(\omega) J \omega - J(R_e^T \dot{\omega}_d - S(\omega) R_e^T \omega_d) - 0.5(\underline{d}_\tau + \bar{d}_\tau) \circ H_d, \quad (25)$$

将式(25)代入式(16)中, 得到闭环姿态误差系统动力学为

$$J \dot{e}_\omega = -k_1 e_R - k_2 e_\omega + d_\tau - 0.5(\underline{d}_\tau + \bar{d}_\tau) \circ H_d. \quad (26)$$

## 4.2 位置控制器

根据四旋翼无人机动力学(1)和(2), 其位置和速度跟踪误差满足

$$e_p = p - p_d, \quad (27)$$

$$e_v = v - v_d, \quad (28)$$

$$\dot{e}_p = e_v, \quad (29)$$

$$m \dot{e}_v = -u_f R e_3 + m g e_3 + \hat{d}_f - m \dot{v}_d, \quad (30)$$

为了避免四旋翼无人机在飞行中可能的碰撞, 位置跟踪误差  $e_p = [e_{p1} \ e_{p2} \ e_{p3}]^T$  需满足如下约束条件:

$$-l_i < e_{pi} < l_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (31)$$

其中  $l_i \in \mathbb{R}_+$  是性能函数. 为快速实现指定的位置跟踪结果, 建立如下连续分段性能函数<sup>[22]</sup>:

$$l_i(t) = \begin{cases} \left(\frac{T_i - t}{T_i}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon_i}} (l_{i,0} - l_{i,\infty}) + l_{i,\infty}, & 0 \leq t \leq T_i, \\ l_{i,\infty}, & t > T_i, \end{cases} \quad (32)$$

其中:  $0 < \varepsilon_i < 1, i = 1, 2, 3; l_{i,0} = l_i(0)$ , 并且  $l_{i,0}$  满足  $-l_{i,0} < e_i(0) < l_{i,0}; l_{i,\infty}$  是最大允许跟踪误差, 满足  $0 < l_{i,\infty} \leq l_{i,0}; T_i$  是最大允许跟踪误差调节时间.

$l_i(t)$  关于时间的导数为

$$\dot{l}_i(t) = \begin{cases} \frac{l_{i,\infty} - l_{i,0}}{T_i(1 - \varepsilon_i)} \left(\frac{T_i - t}{T_i}\right)^{\frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}}, & 0 \leq t \leq T_i, \\ 0, & t > T_i. \end{cases} \quad (33)$$

为保证式(31)始终成立, 令  $\eta = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3]^T$ , 其中

$$\eta_i = \frac{e_{pi}}{\sqrt{l_i^2 - e_{pi}^2}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (34)$$

基于位置误差动力学以及分段性能函数(31), 通过以下两个步骤设计位置控制器:

**步骤 1** 考虑函数

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \eta_i^2, \quad (35)$$

结合式(34),  $V_2$ 的时间导数为

$$\dot{V}_2 = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i^2 e_{pi}}{(l_i^2 - e_{pi}^2)^2} (v_i - v_{di} - \frac{e_{pi} \dot{l}_i}{l_i}), \quad (36)$$

定义  $e_2 = [e_{21} \ e_{22} \ e_{23}]^T = v - v_c \in \mathbb{R}^3$ , 其中虚拟控制输入  $v_c = [v_{c1} \ v_{c2} \ v_{c3}]^T$ , 由此得到

$$\dot{V}_2 = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i^2 e_{pi}}{(l_i^2 - e_{pi}^2)^2} (e_{2i} + v_{ci} - v_{di} - \frac{e_{pi} \dot{l}_i}{l_i}), \quad (37)$$

设计虚拟控制输入  $v_{ci} = -k e_{pi} + v_{di} + \frac{e_{pi} \dot{l}_i}{l_i}$ , 其中  $k$  是非负常数. 将  $v_{ci}$  代入至式(37)中, 可以得到

$$\dot{V}_2 = - \sum_{i=1}^3 \frac{k l_i^2 e_{pi}^2}{(l_i^2 - e_{pi}^2)^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{l_i^2 e_{pi} e_{2i}}{(l_i^2 - e_{pi}^2)^2}. \quad (38)$$

**步骤2** 考虑函数

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} m e_2^T e_2, \quad (39)$$

$V_3$ 的时间导数为

$$\dot{V}_3 = - \sum_{i=1}^3 \frac{k l_i^2 e_{pi}^2}{(l_i^2 - e_{pi}^2)^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{l_i^2 e_{pi} e_{2i}}{(l_i^2 - e_{pi}^2)^2} + e_2^T (-u_f R e_3 + m g e_3 + d_f - m \dot{v}_c), \quad (40)$$

为了处理位置环与姿态环的耦合问题, 定义沿机体坐标系期望  $z$  轴  $b_{3d}$  反方向的虚拟控制输入为

$$U = -K e_p - k_3 e_2 - m g e_3 - \hat{d}_f + m \dot{v}_c, \quad (41)$$

其中: 矩阵  $K = \text{diag}\{k_{41}, k_{43}, k_{43}\}$ ,  $k_{4i} = \frac{\alpha l_i^2}{(l_i^2 - e_{pi}^2)^2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\alpha$  和  $k_3$  是非负常数;  $\hat{d}_f$  是扰动  $d_f$  的估计值, 和姿态控制器类似,  $\hat{d}_f$  可以取位于扰动区间  $[\underline{d}_f, \bar{d}_f]$  内的任意值.

因此, 位置控制器可设计为

$$u_f = -U^T R e_3 = \|U\| e_3^T R_d^T R e_3, \quad (42)$$

将式(42)代入式(30)中, 得到如下闭环位置系统动力学:

$$m \dot{e}_2 = -K e_p - k_3 e_2 + \Delta_f - \Delta_c, \quad (43)$$

其中:  $\Delta_f = [\Delta_{f1} \ \Delta_{f2} \ \Delta_{f3}]^T = d_f - 0.5(\underline{d}_f + \bar{d}_f)$ ,  $\Delta_c = \|U\| e_3^T R_d^T R e_3 + U$ .

### 4.3 稳定性分析

**定理2** 对于四旋翼无人机系统(1)–(4), 如果初始姿态误差满足  $\Psi(R_e(0)) < \delta < 1$ , 初始位置误差满足  $-l_i(0) < e_{pi}(0) < l_i(0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . 如果存在常数  $\alpha > 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ ,  $k_3 > 0$ ,  $c > 0$ ,  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$ ,  $\gamma_3 > 0$ , 使得

$$M =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{ck_1}{\lambda_M(J) - \lambda_m(J)} - \frac{c\gamma_1}{2\lambda_m(J)} - \frac{ck_2}{2} - \frac{\alpha f_{\max}}{2} & & & \\ -\frac{ck_2}{2\lambda_m(J)} & k_2 - \gamma_2 - c & & 0 \\ -\frac{\alpha f_{\max}}{2} & & 0 & \alpha(k_3 - \gamma_3) \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{2} & \frac{c}{2} & 0 \\ \frac{c}{2} & \frac{1}{2}\lambda_m(J) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha m \end{bmatrix}$$

正定, 则控制律(25)和(42)使得  $e_R, e_\omega, \eta$  和  $e_2$  一致有界, 且位置跟踪误差  $e_p$  满足式(31).

**证** 考虑李雅普诺夫函数

$$V = V_1 + \alpha V_3 + c e_R^T e_\omega = k_1 \Psi(R_e) + \frac{1}{2} e_\omega^T J e_\omega + c e_R^T e_\omega + \frac{1}{2} \alpha \sum_{i=1}^3 \eta_i^2 + \frac{1}{2} \alpha m e_2^T e_2, \quad (44)$$

由于初始姿态误差满足  $\Psi(R_e(0)) < \delta < 1$ , 根据式(20)和式(34)可以得到

$$V \geq \frac{k_1}{2} \|e_R\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_m(J) \|e_\omega\|^2 + \frac{1}{2} \alpha \sum_{i=1}^3 \frac{e_{pi}^2}{l_i^2 - e_{pi}^2} + \frac{1}{2} \alpha m \|e_2\|^2 + c e_R^T e_\omega, \quad (45)$$

$$V \leq \frac{k_1}{2 - \delta} \|e_R\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_M(J) \|e_\omega\|^2 + \frac{1}{2} \alpha \sum_{i=1}^3 \frac{e_{pi}^2}{l_i^2 - e_{pi}^2} + \frac{1}{2} \alpha m \|e_2\|^2 + c e_R^T e_\omega, \quad (46)$$

其中  $\delta$  是非负常数. 显然,  $Q_1$  正定意味着  $V$  是非负的.

$V$  关于时间的导数为

$$\dot{V} = k_1 e_R^T \dot{e}_\omega + e_\omega^T J \dot{e}_\omega + c e_\omega^T E(R_e) e_\omega + c e_R^T \dot{e}_\omega + \alpha \sum_{i=1}^3 \eta_i \dot{\eta}_i + \alpha m e_2^T \dot{e}_2, \quad (47)$$

将式(26)和式(43)代入到式(47)中, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -k_2 e_\omega^T e_\omega - ck_1 e_R^T J^{-1} e_R - ck_2 e_R^T J^{-1} e_\omega + \\ & c e_\omega^T E(R_e) e_\omega + c e_R^T J^{-1} \Delta_\tau + e_\omega^T \Delta_\tau - \\ & \alpha \sum_{i=1}^3 \frac{k l_i^2 e_{pi}^2}{(l_i^2 - e_{pi}^2)^2} - \alpha k_3 e_2^T e_2 + \alpha e_2^T \Delta_f - \\ & \alpha e_2^T \Delta_c + 0.5(c e_R^T J^{-1} + e_\omega^T)((\underline{d}_\tau + \bar{d}_\tau) - \\ & (\underline{d}_\tau + \bar{d}_\tau) \circ H_d), \end{aligned} \quad (48)$$

其中  $\Delta_\tau = [\Delta_{\tau 1} \ \Delta_{\tau 2} \ \Delta_{\tau 3}]^T = d_\tau - 0.5(\underline{d}_\tau + \bar{d}_\tau)$ .

为分析  $(c e_R^T J^{-1} + e_\omega^T)((\underline{d}_\tau + \bar{d}_\tau) - (\underline{d}_\tau + \bar{d}_\tau) \circ$

$H_d$ )的符号,以 $i = 1$ 为例,考虑如下两种情况:

1)  $H_{d1} = 1$ . 此时,外界扰动对于系统的影响是负面的,根据式(24)有 $\frac{1}{J_{xx}}(ce_{R1} + e_{\omega 1})((\underline{d}_{\tau 1} + \bar{d}_{\tau 1}) - (\underline{d}_{\tau 1} + \bar{d}_{\tau 1}) \circ H_{d1}) = 0$ ;

2)  $H_{d1} = 0$ . 此时,外界扰动对于系统的影响是正面的,根据式(24)有 $\frac{1}{J_{xx}}(ce_{R1} + e_{\omega 1})((\underline{d}_{\tau 1} + \bar{d}_{\tau 1}) - (\underline{d}_{\tau 1} + \bar{d}_{\tau 1}) \circ H_{d1}) < 0$ .

显然 $\frac{1}{J_{xx}}(ce_{R1} + e_{\omega 1})((\underline{d}_{\tau 1} + \bar{d}_{\tau 1}) - (\underline{d}_{\tau 1} + \bar{d}_{\tau 1}) \circ H_{d1}) \leq 0$ 恒成立. 对于 $i = 2, 3$ ,可以获得类似结果. 故 $(ce_{R}^T J^{-1} + e_{\omega}^T)((\underline{d}_{\tau} + \bar{d}_{\tau}) - (\underline{d}_{\tau} + \bar{d}_{\tau}) \circ H_d) \leq 0$ 恒成立. 进一步,利用杨氏不等式可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -k_2 \|e_{\omega}\|^2 - \frac{ck_1}{\lambda_M(J)} \|e_R\|^2 + \\ & c \|E(R_e)\| \|e_{\omega}\|^2 + \frac{ck_2}{\lambda_m(J)} \|e_R\| \|e_{\omega}\| - \\ & \alpha \sum_{i=1}^3 \frac{kl_i^2 e_{pi}^2}{(l_i^2 - e_{pi}^2)^2} - \alpha k_3 \|e_2\|^2 + \\ & \frac{c}{\lambda_m(J)} (\gamma_1 \|e_R\|^2 + \frac{\|\Delta_{\tau}\|^2}{4\gamma_1}) + \gamma_2 \|e_{\omega}\|^2 + \\ & \frac{\|\Delta_{\tau}\|^2}{4\gamma_2} + \alpha \gamma_3 \|e_2\|^2 + \alpha \frac{\|\Delta_f\|^2}{4\gamma_3} + \alpha \|e_2\| \|\Delta_c\|, \end{aligned} \quad (49)$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是非负常数.

利用式(41)–(42)可以得到

$$\begin{aligned} \|\Delta_c\| = & \|U\| \|(e_3^T R_d^T R e_3) R e_3 - R_d e_3\| = \\ & \|U\| \|b_{3b} \times (b_{3b} \times b_{3d})\|, \end{aligned} \quad (50)$$

由于 $\|b_{3b} \times (b_{3b} \times b_{3d})\|$ 表示 $b_{3b}$ 和 $b_{3d}$ 之间旋转角度的正弦值,结合式(19)可知

$$\|\Delta_c\| \leq \|U\| \|e_R\| = f_{\max} \|e_R\|, \quad (51)$$

其中 $f_{\max}$ 为四旋翼无人机所能提供的推力最大值.

结合式(15)和式(17),可以得到

$$\|E(R_e)\| \leq 1, \quad (52)$$

将式(51)–(52)代入到式(49)中,有

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -(k_2 - \gamma_2 - c) \|e_{\omega}\|^2 + \frac{ck_2}{\lambda_m(J)} \|e_R\| \|e_{\omega}\| - \\ & \left(\frac{ck_1}{\lambda_M(J)} - \frac{c\gamma_1}{\lambda_m(J)}\right) \|e_R\|^2 - \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha kl_i^2 e_{pi}^2}{(l_i^2 - e_{pi}^2)^2} - \\ & \alpha (k_3 - \gamma_3) \|e_2\|^2 + \frac{c\|\Delta_{\tau}\|^2}{4\lambda_m(J)\gamma_1} + \frac{\|\Delta_{\tau}\|^2}{4\gamma_2} + \\ & \alpha \frac{\|\Delta_f\|^2}{4\gamma_3} + \alpha f_{\max} \|e_2\| \|e_R\|, \end{aligned} \quad (53)$$

根据式(31)可知 $\frac{b_i^2}{b_i^2 - e_{pi}^2} \geq 1 (i = 1, 2, 3)$ , 所以

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\min\{\lambda_m(M), \alpha k\} (\|e_R\|^2 + \|e_{\omega}\|^2 + \\ & \|e_2\|^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{e_{pi}^2}{l_i^2 - e_{pi}^2}) + \bar{\Delta}, \end{aligned} \quad (54)$$

其中 $\bar{\Delta}$ 是 $\frac{c\|\Delta_{\tau}\|^2}{4\lambda_m(J)\gamma_1} + \frac{\|\Delta_{\tau}\|^2}{4\gamma_2} + \alpha \frac{\|\Delta_f\|^2}{4\gamma_3}$ 的最小上界.

令 $c$ 和 $\alpha$ 足够小,可以确保矩阵 $M$ 是正定的. 结合式(46)和式(54),可以得到

$$\dot{V} \leq -\frac{\min\{\lambda_m(M), \alpha k\}}{\max\{\lambda_M(Q_2), \frac{1}{2}\alpha\}} V + \bar{\Delta}, \quad (55)$$

其中

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{2-\delta} & \frac{c}{2} & 0 \\ \frac{c}{2} & \frac{1}{2}\lambda_M(J) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha m \end{bmatrix}.$$

根据式(55)可知

$$V \leq e^{-\Lambda t} (V(0) - \frac{\bar{\Delta}}{\Lambda}) + \frac{\bar{\Delta}}{\Lambda} \leq V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\Lambda}, \quad (56)$$

其中 $\Lambda = \frac{\min\{\lambda_m(M), \alpha k\}}{\max\{\lambda_M(Q_2), \frac{1}{2}\alpha\}}$ . 故 $V$ 是有界的,进一步

可知 $e_R, e_{\omega}, \eta$ 和 $e_2$ 是一致有界的.

为了对位置跟踪误差进行分析,令 $\sigma = V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\Lambda}$ , 那么通过式(44)和式(56)可得 $0 \leq \sum_{i=1}^3 \frac{e_{pi}^2}{l_i^2 - e_{pi}^2} \leq \frac{2\sigma}{\alpha}$ , 因此 $-\sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha + 2\sigma}} l_i \leq e_{pi} \leq \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha + 2\sigma}} l_i$ , 由于 $\sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha + 2\sigma}} < 1$ , 因此位置跟踪误差满足约束条件(32). 证毕.

## 5 仿真实验与分析

参考文献[23], 仿真中的四旋翼无人机质量为2.48, 旋翼的旋转轴到四旋翼无人机中心的距离 $L = 0.22$  m, 升力系数 $c_T = 7.2 \times 10^{-6}$ , 阻力系数 $c_T = 1.44 \times 10^{-7}$ , 转动惯量 $J_{xx} = 0.0756$  kg·m<sup>2</sup>,  $J_{yy} = 0.0756$  kg·m<sup>2</sup>,  $J_{zz} = 0.1277$  kg·m<sup>2</sup>, 无人机最大推力 $f_{\max} = 73$  N. 扰动参数为

$$A_{\xi} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \quad C_{\xi} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix}.$$

### 5.1 跟踪性能对比

为了说明本文控制方法 (disturbance interval observer and DEI based secure geometric control, DDSGC)

的优越性,这一小节将其和基于观测器的安全几何控制<sup>[24]</sup>(observer based secure geometric control, OSGC)和基于扰动补偿的几何控制<sup>[10]</sup>(disturbance compensation based geometric control, DCGC)进行对比。

OSGC利用扰动观测器对扰动进行估计,并直接对扰动进行补偿以确保位置跟踪误差满足常值安全约束,位置跟踪性能函数  $l = [1.1 \ 1.1 \ 1.1]^T$ ; DCGC利用扰动观测器对扰动进行估计,并直接对扰动进行补偿.参考文献[10]将扰动观测器设计为

$$\begin{aligned} \hat{d}_f &= \hat{e}_f + k_s m v, \quad \hat{d}_\tau = \hat{e}_\tau + k_m J \omega, \\ \dot{\hat{e}}_f &= -k_s (-u_f R e_3 + m g e_3 + \hat{e}_f), \\ \dot{\hat{e}}_\tau &= -k_m (-S(\omega) J \omega + u_\tau + \hat{e}_\tau), \end{aligned}$$

其中  $k_s$  和  $k_m$  是非负常数。

仿真过程中四旋翼无人机受到如下扰动影响:

$$\begin{aligned} d_f &= [-2 \cos(0.5t) \quad -2 \cos(0.5t) \quad 2 \sin(0.5t)]^T, \\ d_\tau &= [-\sin(0.5t) \quad -\sin(0.5t) \quad \cos(0.5t)]^T. \end{aligned}$$

选择传统扰动观测器参数  $k_s = 0.8, k_m = 2.5$ . 扰动区间观测器  $\bar{\kappa} = [0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 1 \ 1 \ 1]^T, \underline{\kappa} = -\bar{\kappa}$ , 本文控制器增益设定为:  $\alpha = 0.01, c = 0.5, k_1 = 15.5, k_2 = 4, k_3 = 25, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 90$ . 分段连续性能函数设定为

$$\begin{aligned} T_i &= 1.5, \quad l_{i,0} = 1.5, \quad l_{i,\infty} = 0.1, \\ \epsilon_i &= 0.5, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

图2给出了位置跟踪结果,可以看出3种方法均实现了对期望轨迹的跟踪.从图3中可以看出,本文DDSGC三通道位置跟踪误差均满足预设的约束条件,而OSGC和DCGC三通道的位位置跟踪误差较大.此外,OSGC跟踪效果和DCGC控制器区别不大。

为了对位置跟踪误差进行定量评估,引入平均绝对误差(mean absolute error, MAE)作为评价指标,定义位置跟踪平均绝对误差为

$$\Delta p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \|e_{pi}(k)\|, \quad i = 1, 2, 3,$$

从图4可以看出本文的DDSGC有着较小的MAE,因此其控制效果优于另外两种方法.此外,本文DDSGC控制器的位置跟踪误差满足预设的约束条件,三通道的位位置跟踪稳态误差均小于0.05 m.图5为不同方法的姿态误差函数曲线,可以看出本文的DDSGC姿态跟踪效果略差于OSGC和DCGC,原因在于本文的方法牺牲姿态跟踪性能以保证位置跟踪性能.区间扰动观测器对位置环扰动和姿态环扰动的观测结果分别如图6-7所示,可以看出扰动始终位于扰动区间内,这表明了扰动估计策略的有效性。

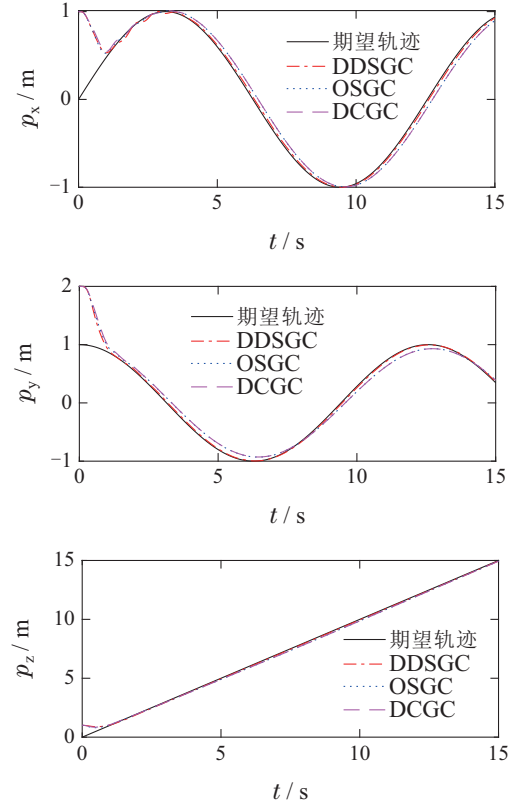


图2 位置跟踪结果

Fig. 2 Position tracking results

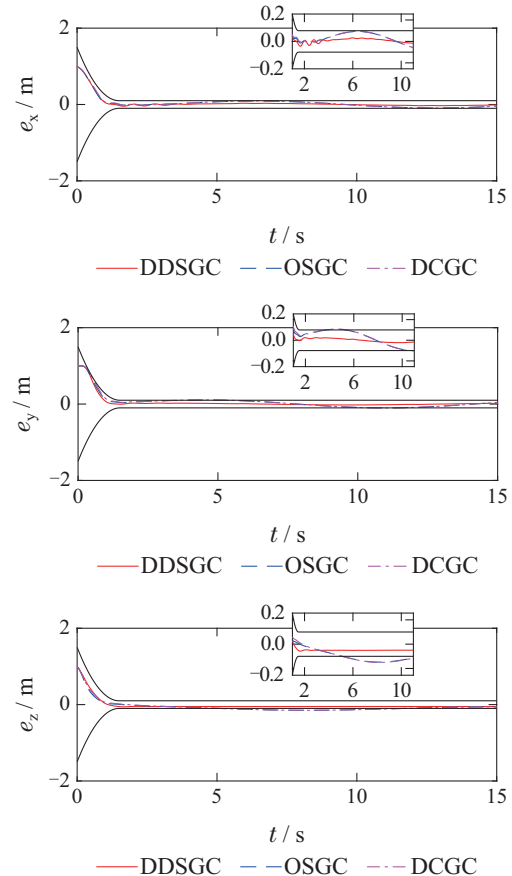


图3 位置跟踪误差

Fig. 3 Position tracking errors

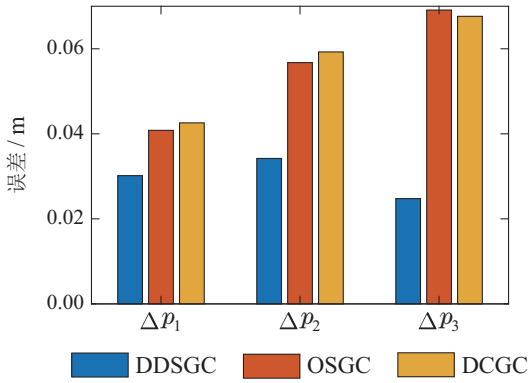


图4 位置跟踪平均绝对误差

Fig. 4 Mean absolute error for position tracking

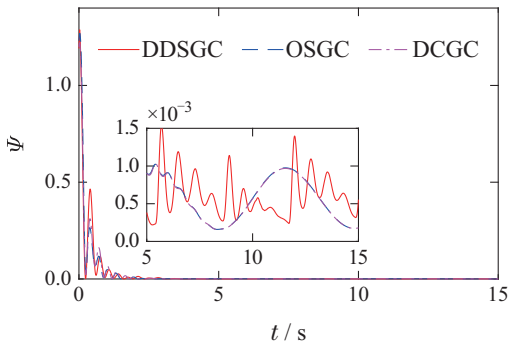


图5 姿态误差函数

Fig. 5 Attitude error function

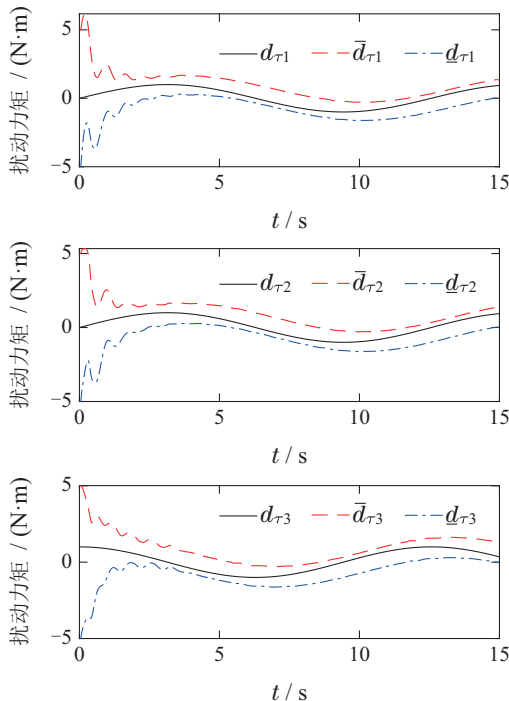


图6 位置环扰动观测结果

Fig. 6 Disturbance estimation in position loop

5.2 扰动效应指示器对比

为了分析扰动利用控制方案的有效性, 将本文的控制方法和与标准扰动补偿控制方法 (disturbance

observer based control, DOBC)进行对比. 两种方法的控制器参数均相同:  $\alpha = 0.01, c = 0.5, k_1 = 15.5, k_2 = 4.2, k_3 = 27, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 90$ . 此外, 两种方法均利用本文的扰动区间观测器对扰动进行估计, 仿真过程中四旋翼无人机受到如下扰动影响:

$$d_f = [-\cos(0.5t) \quad -\cos(0.5t) \quad \sin(0.5t)]^T,$$

$$d_\tau = 0.5[6 - \sin(0.5t) \quad 6 - \sin(0.5t) \quad 6 + \cos(0.5t)]^T.$$

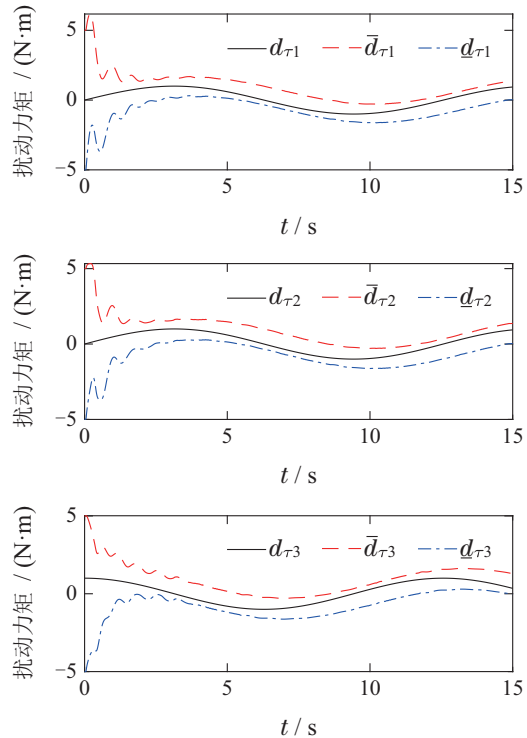


图7 姿态环扰动观测结果

Fig. 7 Disturbance estimation in attitude loop

扰动对姿态误差收敛速度的影响如图8所示. 从图中可以看出在0~3s内  $H_{d1}$  发生了多次切换, 在0~1.3s内  $H_{d2}$  发生了多次切换, 表明本文的DDSGC能够准确地判断扰动对姿态系统产生的影响. 相比于DOBC, DDSGC的姿态误差分量  $e_{11}, e_{12}$  的收敛速度更快, 这是由于扰动利用方案在部分时间内将扰动作为控制输入的一部分, 间接增加了控制器的增益. DDSGC和DOBC的姿态误差函数收敛时间分别为1.4s和2.6s, 表明本文的姿态控制器能够利用扰动加快姿态误差收敛速度. 从图9可以看出DDSGC的位置误差收敛速度要略快于DOBC, 这说明提高姿态误差收敛速度能改善位置控制器的性能.

5.3 V-REP仿真验证

为了更真实地模拟四旋翼无人机在环境中的运动, 在V-REP中对四旋翼无人机进行了建模, 通过V-REP和MATLAB之间的通讯实现仿真. V-REP负责模型仿真, 其中旋翼旋转轴到四旋翼中心的距离  $L = 0.22$  m; MATLAB利用远程通讯获取V-REP中四旋翼无人机

的状态并求解控制输入. 为了对V-REP中对四旋翼无人机的控制, 将MATLAB求解得到的控制输入转换为作用在无人机4个旋翼上的力和力矩分量. 控制输入  $u$  和四旋翼无人机各旋翼产生的推力分量  $f_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的关系为

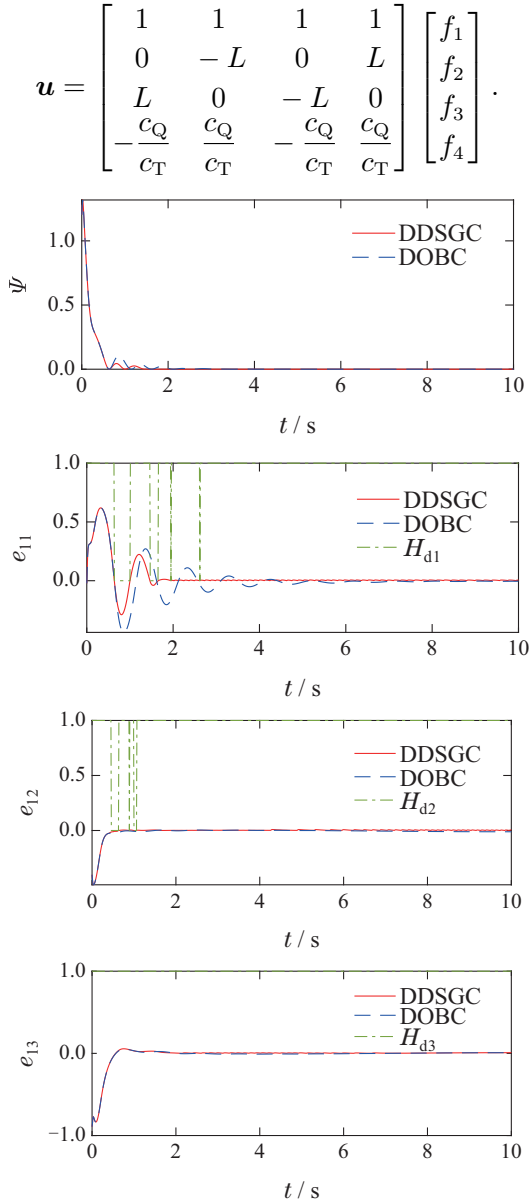


图8 扰动对姿态误差收敛速度的影响

Fig. 8 The influence of disturbance on the convergence rate of attitude errors

选择期望轨迹  $p_d = [2 \sin t \ 2 \cos t \ -2 \ 4]^T$ , 期望偏航角  $\psi_d = \frac{\pi}{2}$  rad, 四旋翼无人机初始位置为  $(0, 0, 4)$  m.

仿真过程中扰动为

$$d_f = [-0.6 \sin(0.5t) \ 0.2 \cos(2t) \ 0]^T,$$

$$d_\tau = [0.3 \cos(0.5t) \ -0.4 \sin(2t) \ 0]^T,$$

分段连续性能函数

$$T_i = 6, l_{i,0} = 2, l_{i,\infty} = 0.3,$$

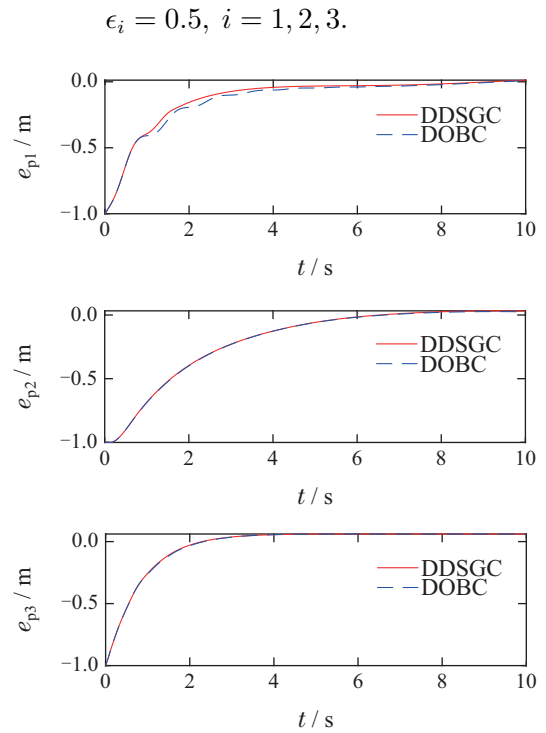


图9 位置跟踪误差曲线

Fig. 9 Position tracking errors

V-REP 仿真结果和位置跟踪误差分别如图10-11所示, 从图11中可以看出四旋翼无人机实现了对期望轨迹的跟踪, 其中  $x, y$  通道的跟踪效果较好, 位置误差收敛速度较快, 而  $z$  通道始终存在着  $0.2$  m 左右的跟踪误差. 总的来说, 三通道的跟踪误差均满足相应的安全约束, 进一步表明了本文控制算法的有效性.

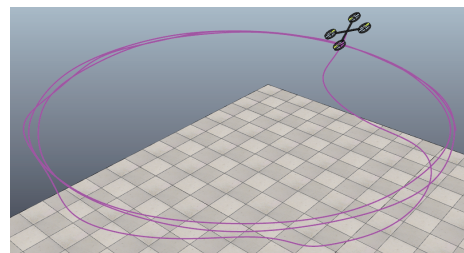


图10 V-REP仿真结果

Fig. 10 Simulation result in V-REP

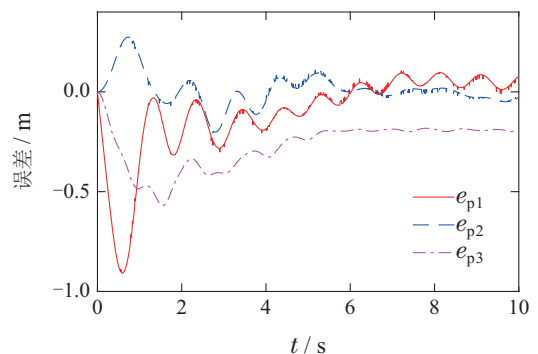


图11 跟踪误差

Fig. 11 Tracking errors

## 6 结论

本文提出了一种利用扰动改善四旋翼无人机跟踪性能的控制方案. 为了利用扰动以提高控制性能, 设计扰动区间观测器对扰动的上、下界进行估计. 在内环姿态控制器中通过扰动效应指示器判断扰动对姿态系统的影响, 对有益扰动加以利用, 提高姿态误差收敛速度. 在外环位置控制器中对扰动进行补偿, 通过性能函数对位置误差进行约束, 实现高精度位置跟踪. 仿真结果表明所提出的控制方案能够确保姿态误差快速收敛, 从而改善控制器的整体性能.

### 参考文献:

- [1] YANG Xu, WANG Rui, ZHANG Tao. Review of unmanned aerial vehicle swarm path planning based on intelligent optimization. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(11): 2291 – 2302. (杨旭, 王锐, 张涛. 面向无人机集群路径规划的智能优化算法综述. *控制理论与应用*, 2020, 37(11): 2291 – 2302.)
- [2] PFLIMLIN J, SOUERES P, HAMEL T. Position control of a ducted fan VTOL UAV in crosswind. *International Journal of Control*, 2007, 80(5): 666 – 683.
- [3] FANG Xing, LIU Fei, GAO Xiang. Full-order sliding-mode control of manned submersible in the presence of lumped disturbances. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(11): 1626 – 1634. (方星, 刘飞, 高翔. 复合干扰下载人潜水器的全阶滑模控制. *控制理论与应用*, 2018, 35(11): 1626 – 1634.)
- [4] ANTONELLI G, CATALDI E, ARRICHIELLO F, et al. Adaptive trajectory tracking for quadrotor MAVs in presence of parameter uncertainties and external disturbances. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, 26(1): 248 – 254.
- [5] LEE T. Exponential stability of an attitude tracking control system on SO(3) for large-angle rotational maneuvers. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(1): 231 – 237.
- [6] YU Y, DING X. A global tracking controller for underactuated aerial vehicles: design, analysis, and experimental tests on quadrotor. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, 21(5): 2499 – 2511.
- [7] ZHANG X, FANG Y, ZHANG X, et al. A novel geometric hierarchical approach for dynamic visual servoing of quadrotors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 67(5): 3840 – 3849.
- [8] LIANG W, CHEN Z, YAO B. Geometric adaptive robust hierarchical control for quadrotors with aerodynamic damping and complete inertia compensation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2021, 69(12): 13213 – 13224.
- [9] GU X, XIAN B, WANG Y. Agile flight for a quadrotor via robust geometry control: Theory and experimental verification. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, 32(7): 4236 – 4250.
- [10] SHARMA M, KAR I. Nonlinear disturbance observer based geometric control of quadrotors. *Asian Journal of Control*, 2021, 23(4): 1936 – 1951.
- [11] GUO Z, GUO J, ZHOU J, et al. Robust tracking for hypersonic reentry vehicles via disturbance estimation-triggered control. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2019, 56(2): 1279 – 1289.
- [12] JIA, J, GUO, K, YU, X, et al. Accurate high-maneuvering trajectory tracking for quadrotors: A drag utilization method. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2022, 7(3): 6966 – 6973.
- [13] ZHOU Tao, WU Xionglin. Reference model based disturbance observer control system. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(6): 823 – 832. (周涛, 吴雄林. 基于参考模型的扰动观测器控制系统. *控制理论与应用*, 2021, 38(6): 823 – 832.)
- [14] WANG Zhenhua, SHEN Yi, GUO Shenghui. Interval observer design for linear descriptor systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(7): 956 – 962. (王振华, 沈毅, 郭胜辉. 线性广义系统的区间观测器设计. *控制理论与应用*, 2018, 35(7): 956 – 962.)
- [15] GUCIK G, RAISSI T, ZOLGHADRI A. A note on interval observer design for unknown input estimation. *International Journal of Control*, 2016, 89(1): 25 – 37.
- [16] ALEXIS K, NIKOLAKOPOULOS G, TZES A. Switching model predictive attitude control for a quadrotor helicopter subject to atmospheric disturbances. *Control Engineering Practice*, 2011, 19(10): 1195 – 1207.
- [17] EFIMOV D, FRIDMAN L, RAISSI T, et al. Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques. *Automatica*, 2012, 48(9): 2365 – 2371.
- [18] RAISSI T, EFIMOV D, ZOLGHADRI A. Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 57(1): 260 – 265.
- [19] YONG K, CHEN M, WU Q. Anti-disturbance control for nonlinear systems based on interval observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 67(2): 1261 – 1269.
- [20] HEYMANN M, WONHAM W. Comments “On pole assignment in multi-input controllable linear systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, 13(6): 748 – 749.
- [21] LEE T. Robust adaptive attitude tracking on SO(3) with an application to a quadrotor UAV. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, 21(5): 1924 – 1930.
- [22] ZHANG W, SHAO X, ZHANG W, et al. Unknown input observer-based appointed-time funnel control for quadrotors. *Aerospace Science and Technology*, 2022, 126: 107 – 113.
- [23] LIN J, WANG Y, MIAO Z, et al. Robust observer-based visual servo control for quadrotors tracking unknown moving targets. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2023, 28(3): 1268 – 1279.
- [24] HUA H, FANG Y, ZHANG X, et al. A novel robust observer-based nonlinear trajectory tracking control strategy for quadrotors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2020, 29(5): 1952 – 1963.

### 作者简介:

蔡庆 硕士研究生, 目前研究方向为无人机运动规划与控制,

E-mail: cai9844@nuaa.edu.cn;

邱宏凌 博士研究生, 目前研究方向为正系统理论及其应用,

E-mail: lingge945494@163.com;

费城 硕士研究生, 目前研究方向为信息物理系统及其安全控

制, E-mail: feicheng2017@gmail.com;

沈俊 教授, 博士生导师, 目前研究方向为正系统理论及其应

用, E-mail: junshen2009@163.com.