

# 时变质量双涡喷构型无人机建模与轨迹跟踪

闫林, 李鹏<sup>†</sup>, 何家兴, 张钊

(国防科技大学 智能科学学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 针对一类以双涡喷发动机作为矢量推力系统的无人机(DJUAV)轨迹跟踪问题, 本文提出了一种在模型时变质量条件下的自适应滑模控制方法. 首先, 对一般飞行器的六自由度模型在时变质量的条件下加以扩展, 建立时变质量飞行器的数学模型. 其次, 对所设计矢量推力机构制定分配策略, 以满足控制系统力与力矩的需要. 在此基础上, 设计一种自适应滑模控制器, 保证系统面对自身时变质量所带来的模型不确定性, 能够实现期望轨迹的跟踪, 并且位置跟踪误差渐近收敛到零. 最后, 仿真验证了所建立数学模型的可行性与控制器的有效性.

**关键词:** 双涡喷发动机; 无人机; 时变质量; 建模; 轨迹跟踪; 自适应滑模

**引用格式:** 闫林, 李鹏, 何家兴, 等. 时变质量双涡喷构型无人机建模与轨迹跟踪. 控制理论与应用, 2026, 43(3): 458 – 468

DOI: 10.7641/CTA.2024.30663

## Modelling and sliding mode-based trajectory tracking control of a dual-jet UAV with time-varying mass

YAN Lin, LI Peng<sup>†</sup>, HE Jia-xing, ZHANG Zhao

(College of Intelligence Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China)

**Abstract:** This paper proposes an adaptive sliding mode control method to address the trajectory tracking problem encountered by a specific type of unmanned aerial vehicle – dual-jet unmanned aerial vehicle (DJUAV) equipped with a dual-jet vector thrust system, particularly under the condition of time-varying mass. Firstly, by extending the six-degree-of-freedom model of general aircraft to account for time-varying mass conditions, the mathematical model for the DJUAV is established. Secondly, an allocation strategy for the designed vector thrust mechanism is devised to meet the force and torque requirements of the control system. On this basis, an adaptive sliding mode controller is developed to enable the system to accurately track the desired trajectory, even in the presence of model uncertainties arising from the time-varying mass. The controller ensures asymptotic convergence of the position tracking error to zero. Finally, simulation results validate the feasibility of the mathematical model and demonstrate the effectiveness of the proposed controller.

**Key words:** dual-jet; unmanned aerial vehicle; time-varying mass; modelling; trajectory tracking; adaptive sliding mode

**Citation:** YAN Lin, LI Peng, HE Jiaying, et al. Modelling and sliding mode-based trajectory tracking control of a dual-jet UAV with time-varying mass. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(3): 458 – 468

## 1 引言

推力系统作为无人机的核心部件决定了无人机的控制方式及其性能. 目前, 大部分小型无人机采用多旋翼的结构形式, 使用直流无刷电机作为执行器. 但其载荷能力与续航时间都有限. 涡喷发动机具有较大的推重比, 并以燃油作为能源, 能较容易实现续航的提升, 近年来受到科研人员的青睐, 广泛应用于无人机项目中<sup>[1]</sup>. 然而, 以涡喷发动机作为执行器的无人机在建模和控制方面仍存在不少难点, 一是飞行过程中的油耗使无人机的质量是时变的, 进而导致质心

及转动惯量的变化, 如何建立系统精确的数学模型; 二是涡喷发动机的响应速度较慢, 如何优化结构设计来减轻响应时间的不利影响. 在此基础上, 设计一种高精度轨迹跟踪控制器具有挑战性.

由于涡喷发动机的反扭矩很小, 这类无人机的推力系统与多旋翼有很大不同, 姿态控制依赖于矢量推力. 根据生成矢量推力方式的不同, 主要分为两种: 一是使用矢量喷管, 二是采用发动机整体偏转的方式. 两种方式各有利弊, 前者采用矢量喷管会使涡喷发动机的进出气流受到影响, 进而使发动机推力产生损耗.

收稿日期: 2023–10–07; 录用日期: 2024–11–18.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: lipeng\_2010@163.com; Tel.: +86 18890090653.

本文责任编辑: 方勇纯.

国家自然科学基金项目(62373201)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62373201).

因此在对发动机推力进行建模时需要将矢量喷管考虑在内<sup>[2]</sup>。但由于一般矢量喷管质量轻,对舵机的扭矩要求较低。后者刚好相反,虽不会影响到涡喷发动机的进出气流,但由于涡喷发动机的自重,对舵机的扭矩要求较高。同时发动机的偏转会增加系统模型的不确定性。针对执行器的两种矢量推力生成方式,许多文献对此做了研究。文献[3]构建的无人飞行器(unmanned aerial vehicle, UAV)单纯依靠4个固定的涡喷发动机,期望实现类似四旋翼无人机的姿态控制。文献[2]使用4个涡喷发动机搭建了垂直起降飞行平台,为每个涡喷配备了一个一维矢量喷管,并通过实验验证了所搭建系统的可行性。文献[4]使用两个涡喷发动机设计了一种垂直起降无人机,每个涡喷发动机配备有可以两自由度偏转的矢量喷管。该UAV不仅能工作在垂直起降模式,而且能转变为固定翼方式实现高速飞行。文献[5]利用4个涡喷发动机设计了一种无人飞行系统,每个涡喷都有两个独立的自由度。文献[6]将涡喷发动机安装在人形机器人上,背后的涡喷发动机提供推力,依靠安装在上肢的涡喷发动机实现系统平衡。以上研究在无人机设计方面的处理方式是:涡喷发动机只负责生成大推力,对其动态响应不做过高要求,辅助以其他响应迅速的机构来生成矢量推力。

数学模型是控制器设计的基础。一般飞行器的六自由度模型均以牛顿-欧拉方程或欧拉-拉格朗日方程为基础<sup>[7]</sup>。前者在使用欧拉角描述系统姿态时,有一组中间状态变量姿态角速度,姿态角需要进一步的变换而得到;后者则直接给出姿态角的微分方程。这对控制器的设计造成一些问题。前者由于不能直接得到姿态角,许多文章考虑到飞行器飞行时的滚转角与俯仰角很小,将姿态角变化率约等于机体坐标系各对应轴的旋转角速度<sup>[8-9]</sup>;后者虽然能直接对姿态角进行控制器设计,但模型方程是极其复杂的,这对后续的控制器的设计造成不便<sup>[10]</sup>。而很少有文章使用未简化的牛顿-欧拉方程进行控制器的设计。此外,以涡喷发动机作为执行器的UAV一大特点是飞行时面临着燃油的消耗。这使得UAV的质量、质心位置及转动惯量均是时变的,在这些问题下,UAV自身位置(机体原点)如何定义乃至整个系统的建模都面临着困难。文献[2,5]在建模时未考虑系统整体质量的变化。文献[4]在进行建模时考虑到系统质量的变化,但假设质心位置、转动惯量是不变的。

为了克服PID等线性控制器鲁棒性差的缺点<sup>[11]</sup>,一些非线性控制方法被应用于UAV控制中<sup>[12]</sup>。文献[13]为一类UAV设计反步控制器实现了在风干扰情况下的轨迹跟踪控制。文献[14]将滑模控制与自适应控制结合运用于UAV的姿态与位置跟踪控制中,使系统的鲁棒性和自适应性大大提升。为了拟合外界干扰或者系统的某些不确定性,神经网络也常常应用于非线性

控制中<sup>[15-16]</sup>。然而,以上提到的各种控制方法大多应用到以电驱动的UAV中,这些系统的质量是恒定的。本文中双涡喷构型无人机(dual-jet UAV, DJUAV)飞行时面临燃油的消耗,在此过程中,系统的质量是时变的。时变的质量会牵连着系统质心位置、转动惯量的变化。针对这样一类时变质量系统,综合3个方面的考虑,设计高性能控制器是十分有必要的。一些文章考虑UAV携带负载的控制问题<sup>[17-19]</sup>,这类负载通常是突然加入系统并且保持恒定。文献[20]考虑到系统模型中的转动惯量不确定性,设计控制器实现姿态跟踪。在文献[21]中,作者将UAV机体质心位置视为不确定性,设计自适应控制器实现系统在可变质心位置下的轨迹跟踪控制。文献[22]考虑未知质量负载下的控制问题,设计控制器实现了UAV系统的高度控制,并且实现负载的质量估计。文献[23-24]设计了一类新的UAV姿态控制系统,通过改变安装在机身的质量块的位置改变整体质量分布,来提供力矩以实现系统姿态控制。文献[25]探讨了一类空中加油系统的控制问题。文献[26]针对一类播洒农药无人机进行了研究,在时变质量前提下构建模型,并实现了系统的姿态控制。文献[27-28]对一类时变质量无人机提出了一种质量估计方法,并实现了轨迹跟踪控制。

为了解决现有时变质量无人机控制方法存在的局限性问题,本文针对一种双涡喷构型无人机的轨迹跟踪问题开展研究。相比于已有的方法,本文的贡献如下:1)设计并实现了一种以双涡喷发动机为执行机构的垂直起降无人机,和传统的电动多旋翼无人机相比,能实现矢量推力控制,并具有更好的负载能力和续航能力;2)在飞行过程中燃油消耗所导致的时变质量情形下,建立了考虑质量、质心位置和转动惯量等参数时变的无人机数学模型。和同类研究中仅仅考虑质量变化而忽略质心位置、转动惯量变化的模型相比,本文所建立的模型更精确,并在此基础上提出一种能够提供控制所需力与力矩的控制分配策略;3)针对无人机参数时变的问题,设计了一种双环结构的自适应滑模控制器,实现了无人机在质量、质心位置及转动惯量等参数时变条件下的轨迹跟踪控制。

## 2 系统建模与问题描述

### 2.1 矢量推力系统

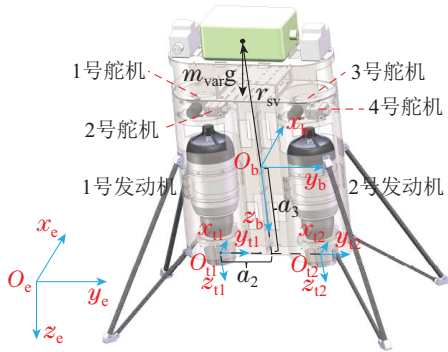
为了实现DJUAV对参考轨迹的跟踪,作为执行器的矢量推力系统需要产生必要的控制力和控制力矩。本文使用两个矢量喷管,结合涡喷发动机实现矢量推力系统,如图1所示。

本文所设计的矢量推力系统机械结构如图2所示。安装于涡喷发动机尾喷管之后的矢量喷管可以进行两自由度的偏转以改变推力方向。矢量喷管两自由度偏转的机理是:两个舵机依次通过舵机臂、球头万向

节、拉杆、万向节联轴器与喷管外环、内喷管相连. 其中1号舵机控制内喷管, 2号舵机控制喷管外环, 喷管外环可以带动内喷管旋转. 由于两支拉杆处于正交安装位, 加上万向节的存在, 两拉杆的运动是解耦的<sup>[29]</sup>, 也就是说各自控制矢量喷管的旋转角度可以直接用于坐标系变换. 两喷管的旋转运动为一个内旋的过程, 因此能够很方便在喷管处建立喷管坐标系以得到矢量推力在机体系下的表示.



(a) DJUAV实物图



(b) 坐标系定义

图1 DJUAV结构

Fig. 1 The structure of DJUAV

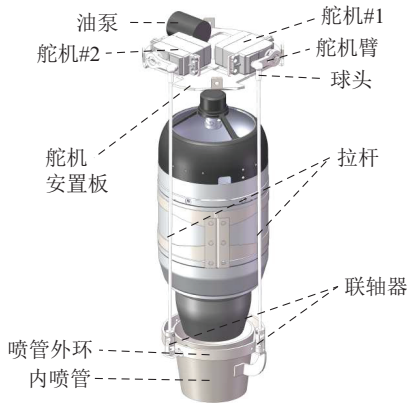


图2 矢量推力系统

Fig. 2 Vector thrust system

## 2.2 建立时变质量数学模型

以涡喷发动机作为执行器的UAV在长时间飞行过

程中会发生相当大部分的油耗, 这使得该类UAV的系统模型相较于其他恒定质量UAV有很大的不同. 油耗不仅使UAV质量随时间变化, 系统整体质心位置、转动惯量都是时变的, 对系统的平移运动与旋转运动均会产生影响. 这些需要在建模阶段得到充分考虑. 建模以牛顿-欧拉方程为基础, 并在时变质量的假设前提下加以扩展.

建立如下4个坐标系: 惯性系  $O_e x_e y_e z_e$ , 机体系  $O_b x_b y_b z_b$ , 喷管系  $O_{t_i} x_{t_i} y_{t_i} z_{t_i}$ ,  $i = 1, 2$ , 如图1(b)所示. 需要注意的是, 机体系的原点选用除去油箱部分的机体质心. 定义  $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$  为机体系原点在惯性系中的位置矢量,  $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$  为UAV姿态角,  $-\frac{\pi}{2} < \phi, \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_\phi \ \omega_\theta \ \omega_\psi]^T \in \mathbb{R}^3$  为姿态角速度.

**假设1** 假设油箱形状为长方体, 放置中心通过机体轴  $O_b z_b$ , 关于  $O_b x_b z_b, O_b y_b z_b$  对称. 并且通过手段使飞行过程中燃油液面下降时维持平稳, 即油箱内燃油为上液面随时间下降的长方体, 长宽高记为  $l_x, l_y, l_z \in \mathbb{R}$ , 其中  $l_z$  是时变的.

除去油箱的机体部分质量记为  $m_s \in \mathbb{R}$ , 油箱部分为时变质量记为  $m_{var} \in \mathbb{R}$ , 则总质量  $m = m_s + m_{var}$ . 记  $\mathbf{r}_{sv} \in \mathbb{R}^3$  为  $O_b$  到油箱质心向量. 除去油箱的机体部分相对于机体系三轴的转动惯量矩阵记为  $\mathbf{I}_s \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 油箱部分相对于机体系三轴的转动惯量矩阵记为  $\mathbf{I}_{var} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . 根据平行轴定理有

$$\mathbf{I}_{var} = (\mathbf{r}_{sv}^T \mathbf{r}_{sv} \mathbf{E} - \mathbf{r}_{sv} \mathbf{r}_{sv}^T) m_{var} + \mathbf{I}_0, \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  为单位阵,  $\mathbf{I}_0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  为油箱自身的转动惯量矩阵, 其表达式见式(2), 则总的转动惯量  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_{var}$ .

$$\mathbf{I}_0 = \frac{m_{var}}{12} \begin{bmatrix} l_y^2 + l_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & l_x^2 + l_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & l_x^2 + l_y^2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

机体系向惯性系转换矩阵为

$$\mathbf{R}_b^e = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中:  $c_* \triangleq \cos(*)$ ,  $s_* \triangleq \sin(*)$ .

机体系向喷管系转换矩阵为

$$\mathbf{R}_b^{t_i} = \begin{bmatrix} \cos \delta_{iy} & \sin \delta_{iy} \sin \delta_{ix} & -\sin \delta_{iy} \cos \delta_{ix} \\ 0 & \cos \delta_{ix} & \sin \delta_{ix} \\ \sin \delta_{iy} & -\cos \delta_{iy} \sin \delta_{ix} & \cos \delta_{iy} \cos \delta_{ix} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中  $\delta_{ix}, \delta_{iy} \in \mathbb{R}$  为矢量喷管绕喷管系  $O_{t_i} x_{t_i}, O_{t_i} y_{t_i}$  轴旋转的角度.

### 2.2.1 旋转运动

姿态角变化率 $\dot{\eta}$ 与机体的旋转角速度 $\omega$ 之间有如下关系:

$$\dot{\eta} = I_{\eta}\omega, \quad (5)$$

式中

$$I_{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix}. \quad (6)$$

**注1** 在本文中, 假设俯仰角 $\theta$ 满足 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ , 因此矩阵 $I_{\eta}$ 不会为奇异矩阵.

作用于系统的力矩分为两部分, 一是来自执行器, 二是油箱的重量相较于机体轴产生的力矩.

$$\tau = \tau_u + r_{sv} \times F_{oil}^b, \quad (7)$$

式中:  $\tau_u \in \mathbb{R}^3$ 为发动机推力作用于机体轴的力矩,  $F_{oil}^b = m_{var}gR_e^b e_3 \in \mathbb{R}^3$ 为油箱重力在机体系下的表示.  $g \in \mathbb{R}$ 为重力加速度,  $R_e^b = (R_b^e)^{-1} = (R_b^e)^T$ ,  $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

**假设2** 机体系原点 $O_b$ 到油箱质心的位矢 $r_{sv} \in \mathbb{R}^3$ 未知有界,  $\|r_{sv}\| \leq \epsilon_1$ .

**假设3** 油箱部分变化质量 $m_{var} \in \mathbb{R}$ 未知有界,  $\|m_{var}\| \leq \epsilon_2$ , 转动惯量 $I_{var} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 未知可导并且同时有界,  $\|I_{var}\| \leq \epsilon_3$ ,  $\|\dot{I}_{var}\| \leq \epsilon_4$ .

机体角动量为

$$H = I\omega, \quad (8)$$

根据角动量定理

$$\tau = \dot{H} + \omega \times H, \quad (9)$$

将式(8)代入式(9)得

$$I_s \dot{\omega} = -\omega \times I_s \omega + \tau_u + r_{sv} \times F_{oil}^b - \dot{I}_{var} \omega - \omega \times I_{var} \omega - I_{var} \dot{\omega}. \quad (10)$$

令

$$\tau_{ext} = r_{sv} \times F_{oil}^b - \dot{I}_{var} \omega - \omega \times I_{var} \omega - I_{var} \dot{\omega}, \quad (11)$$

则

$$\dot{\omega} = I_s^{-1}(-\omega \times I_s \omega) + I_s^{-1} \tau_u + I_s^{-1} \tau_{ext}. \quad (12)$$

令 $I_s^{-1} \tau_u \triangleq u_a$ 为虚拟输入量,  $I_s^{-1} \tau_{ext} \triangleq \Delta f_a$ 视为系统不确定性及扰动, 得到

$$\dot{\omega} = I_s^{-1}(-\omega \times I_s \omega) + u_a + \Delta f_a. \quad (13)$$

### 2.2.2 平移运动

**假设4** 变质量部分质心位矢 $r_{sv} \in \mathbb{R}^3$ 在机体系下存在相对导数 $v_r \in \mathbb{R}^3$ , 即相对速度, 并且 $v_r$ 有

界,  $\|v_r\| = \left\| \frac{\tilde{d}r_{sv}}{dt} \right\| \leq \epsilon_5$ .

**假设5** 变质量部分质心相对速度 $v_r \in \mathbb{R}^3$ 在机

体系下存在相对导数 $\frac{\tilde{d}v_r}{dt} \in \mathbb{R}^3$ , 即相对加速度, 记

$\frac{\tilde{d}v_r}{dt} \triangleq \tilde{v}_r$ , 并且 $\tilde{v}_r$ 有界,  $\|\tilde{v}_r\| \leq \epsilon_6$ .

将平台分为两部分考虑, 根据质点牵连运动相关理论得到位置方程

$$\begin{cases} a = \ddot{p}, \\ v_r = \frac{\tilde{d}r_{sv}}{dt}, \\ a_{var} = \frac{\tilde{d}v_r}{dt} + \dot{\omega} \times r_{sv} + \omega \times (\omega \times r_{sv}) + 2\omega \times v_r + a, \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $p \in \mathbb{R}^3$ 为机体系原点位矢;  $a \in \mathbb{R}^3$ 为机体系原点加速度;  $v_r \in \mathbb{R}^3$ 为变质量部分质心在机体系下的相对速度, 由相对导数 $\frac{\tilde{d}}{dt}$ 计算得到;  $a_{var} \in \mathbb{R}^3$ 为变质量部分质心加速度.

在利用牛顿第二定律求解动力学方程时, 将矢量 $a$ ,  $a_{var}$ 在机体系中进行表示. 令 $p$ 为惯性系下的表示,  $v_r$ ,  $\omega$ ,  $r_{sv}$ 均表示在机体系下, 得到

$$\begin{cases} a = R_e^b \ddot{p}, \\ a_{var} = \tilde{v}_r + \dot{\omega} \times r_{sv} + \omega \times (\omega \times r_{sv}) + 2\omega \times v_r + a. \end{cases} \quad (15)$$

由牛顿第二定律得到

$$m_s a + m_{var} a_{var} = mgR_e^b e_3 + f, \quad (16)$$

式中 $f \in \mathbb{R}^3$ 为发动机推力在机体系中的表示, 将式(15)代入式(16)得

$$\ddot{p} = ge_3 + \frac{1}{m_s} R_e^b f - \frac{m_{var}}{m_s} \{R_e^b [\tilde{v}_r + \dot{\omega} \times r_{sv} + \omega \times (\omega \times r_{sv}) + 2\omega \times v_r] + \ddot{p} - ge_3\}. \quad (17)$$

令 $u_p = \frac{1}{m_s} R_e^b f \triangleq [u_{px} \ u_{py} \ u_{pz}]^T$ 为虚拟控制量. 令 $f_{ext} \in \mathbb{R}^3$ 为系统位置环不确定项及扰动, 表达式为

$$f_{ext} = -m_{var} \{R_e^b [\tilde{v}_r + \dot{\omega} \times r_{sv} + \omega \times (\omega \times r_{sv}) + 2\omega \times v_r] + \ddot{p} - ge_3\}. \quad (18)$$

令 $\Delta f_p = \frac{1}{m_s} f_{ext}$ , 则位置环方程可写为

$$\ddot{p} = ge_3 + u_p + \Delta f_p. \quad (19)$$

### 2.2.3 执行器控制分配

式(5)(13)(19)给出了变质量条件下的系统六自由度模型, 但是其中由执行器给定的 $u_p$ ,  $u_a$ , 亦即是 $f$ ,  $\tau_u$ 需要进一步求解.

两个发动机的推力记为  $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^3 (i = 1, 2)$ , 为喷管系下的表示:

$$\mathbf{F}_i = [0 \ 0 \ -F_{ti}]^T, \quad (20)$$

式中  $F_{ti} \in \mathbb{R}$  为发动机推力大小, 则

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{R}_{ti}^b \mathbf{F}_i. \quad (21)$$

令  $\mathbf{T}_i = \mathbf{R}_{ti}^b \mathbf{F}_i$ , 则将式  $\mathbf{R}_{ti}^b = (\mathbf{R}_b^{ti})^{-1} = (\mathbf{R}_b^{ti})^T$  代入可得

$$F_{ti} \begin{bmatrix} -\sin \delta_{iy} \\ \cos \delta_{iy} \sin \delta_{ix} \\ -\cos \delta_{iy} \cos \delta_{ix} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} T_{ix} \\ T_{iy} \\ T_{iz} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

记发动机产生推力作用点在机体系下的位矢  $\mathbf{r}_1 = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ ,  $\mathbf{r}_2 = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ , 显然有  $a_1 = b_1 = 0$ ,  $a_2 = -b_2$ ,  $a_3 = b_3$ , 则发动机推力在机体轴产生的力矩为

$$\boldsymbol{\tau}_u = \sum_{i=1}^2 \mathbf{F}_i + [0 \ 0 \ \Gamma_t]^T, \quad (23)$$

式中:  $\mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{T}_i$  为左右两个涡喷发动机各自推力产生的力矩;  $\Gamma_t \in \mathbb{R}$  为两发动机产生的反扭矩, 很小, 可以归为扰动  $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ .

本文设计的由两台涡喷发动机构成的矢量推力系统的控制输入部分有两台发动机的油门、4个舵机的偏转角, 共计6组. 这能够衍生出许多种控制方式, 本文对6组控制输入做如下约束: 两台发动机施加相同的油门, 也就是两台发动机的推力大小始终相等, 即  $F_{t1} = F_{t2} = F_t$ ; 2, 4号舵机偏转角度始终相同, 即  $\delta_{1x} = \delta_{2x} = \delta_x$ . 记此时的控制输入为  $\mathbf{u} = [F_t \ \delta_x \ \delta_{1y} \ \delta_{2y}]^T$ . 令

$$\boldsymbol{\tau}_v \triangleq \begin{bmatrix} -(T_{1y} + T_{2y})a_3 \\ (T_{1x} + T_{2x})a_3 \\ -(T_{1x} - T_{2x})a_2 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\tau}_z \triangleq \begin{bmatrix} (T_{1z} - T_{2z})a_2 \\ 0 \\ \Gamma_t \end{bmatrix}, \quad (25)$$

则

$$\begin{cases} \mathbf{f} = T_z \mathbf{e}_3 - \frac{1}{a_3} \mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\tau}_v, \\ \boldsymbol{\tau}_u = \boldsymbol{\tau}_v + \boldsymbol{\tau}_z, \end{cases} \quad (26)$$

式中  $T_z = T_{1z} + T_{2z}$ . 将式(26)代入  $\mathbf{u}_p$  中得到

$$\mathbf{u}_p = \frac{1}{m_s} \mathbf{R}_b^e \mathbf{f} = \frac{T_z}{m_s} \mathbf{R}_b^e \mathbf{e}_3 - \frac{1}{m_s a_3} \mathbf{R}_b^e (\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\tau}_v). \quad (27)$$

对于式(27), 有

$$\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\tau}_v = [-(T_{1x} + T_{2x})a_3 \quad -(T_{1y} + T_{2y})a_3 \quad 0]^T. \quad (28)$$

考虑到  $\|\mathbf{R}_b^e\| = 1$ , 可以得到如下不等式:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{m_s a_3} \mathbf{R}_b^e (\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\tau}_v) \right\| = \\ & \frac{1}{m_s a_3} \|\mathbf{R}_b^e\| \|\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\tau}_v\| = \\ & \frac{1}{m_s a_3} \|\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\tau}_v\| = \\ & \frac{1}{m_s} \sqrt{(T_{1x} + T_{2x})^2 + (T_{1y} + T_{2y})^2} \leq \\ & \frac{1}{m_s} [|T_{1x} + T_{2x}| + |T_{1y} + T_{2y}|] \leq \\ & \frac{1}{m_s} [(|T_{1x}| + |T_{1y}|) + (|T_{2x}| + |T_{2y}|)]. \end{aligned} \quad (29)$$

由于矢量喷管的偏转角  $\delta_{ix}, \delta_{iy}, i = 1, 2$  不会超过  $\frac{\pi}{2}$ , 从式(22)可以知道  $T_{iz} = -F_{ti} \cos \delta_{iy} \cos \delta_{ix} < 0$ , 则下式成立:

$$\left\| \frac{T_z}{m_s} \mathbf{R}_b^e \mathbf{e}_3 \right\| = \frac{|T_z|}{m_s} = \frac{|T_{1z}| + |T_{2z}|}{m_s}. \quad (30)$$

因为矢量喷管的偏转是小角度, 涡喷发动机产生纵向推力会远大于横向推力, 即有  $|T_{1z}| \gg |T_{1x}| + |T_{1y}|$ ,  $|T_{2z}| \gg |T_{2x}| + |T_{2y}|$ . 结合式(29)–(30), 可以发现

$$\left\| \frac{T_z}{m_s} \mathbf{R}_b^e \mathbf{e}_3 \right\| \gg \left\| \frac{1}{m_s a_3} \mathbf{R}_b^e (\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\tau}_v) \right\|. \quad (31)$$

因此,  $\frac{1}{m_s a_3} \mathbf{R}_b^e (\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\tau}_v)$  可视为系统的扰动.

同时, 由于发动机产生的纵向力会远大于横向力, 这就有  $|T_{1z}| \approx \|\mathbf{T}_1\|$ ,  $|T_{2z}| \approx \|\mathbf{T}_2\|$ , 而两台发动机施加相同油门, 则有  $|T_{1z}| - |T_{2z}| \approx 0$ , 因此  $\boldsymbol{\tau}_z$  相对于  $\boldsymbol{\tau}_v$  是一个小项, 可以视为扰动. 因此, 式(26)可以化简如下:

$$\begin{cases} \mathbf{f} = T_z \mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\tau}_u = \boldsymbol{\tau}_v. \end{cases} \quad (32)$$

下面由  $T_z, \boldsymbol{\tau}_v$  求解  $\mathbf{u} = [F_t \ \delta_x \ \delta_{1y} \ \delta_{2y}]^T$ .

首先, 根据式(24)得到

$$\begin{cases} T_{1x} = [0 \ \frac{1}{2a_3} \ -\frac{1}{2a_2}] \boldsymbol{\tau}_v, \\ T_{2x} = [0 \ \frac{1}{2a_3} \ \frac{1}{2a_2}] \boldsymbol{\tau}_v, \\ T_{1y} + T_{2y} = [-\frac{1}{a_3} \ 0 \ 0] \boldsymbol{\tau}_v, \end{cases} \quad (33)$$

结合式(22), 有

$$\begin{cases} F_t \sin \delta_{1y} = -T_{1x}, \\ F_t \sin \delta_{2y} = -T_{2x}, \\ F_t (\cos \delta_{1y} + \cos \delta_{2y}) \sin \delta_x = T_{1y} + T_{2y}, \\ F_t (\cos \delta_{1y} + \cos \delta_{2y}) \cos \delta_x = -T_z. \end{cases} \quad (34)$$

求解此非线性方程组

$$\begin{cases} \delta_x = -\arctan\left(\frac{T_{1y} + T_{2y}}{T_z}\right), \\ F_t = -\frac{\cos \delta_x}{2T_z} \left[ (T_{1x} - T_{2x})^2 + \frac{T_z^2}{\cos^2 \delta_x} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \quad \left[ (T_{1x} + T_{2x})^2 + \frac{T_z^2}{\cos^2 \delta_x} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \delta_{1y} = -\arcsin\left(\frac{T_{1x}}{F_t}\right), \\ \delta_{2y} = -\arcsin\left(\frac{T_{2x}}{F_t}\right). \end{cases} \quad (35)$$

至此, 便可以根据控制器求解出的力与力矩解算出施加于实际执行器的指令. 这也证明了所设计矢量推力系统的可行性.

### 3 控制器设计

在这一部分, 将设计一种内外环的串级控制器, 以实现DJUAV的轨迹跟踪. 首先, 内环设计一种反步滑模控制器确保对参考姿态角的跟踪. 其次, 外环, 也就是位置子系统同样使用一种滑模控制器, 以实现参考轨迹的跟踪. 期望的滚转角 $\phi_d$ 与俯仰角 $\theta_d$ 由位置环生成. 系统整体的控制框图如图3所示.

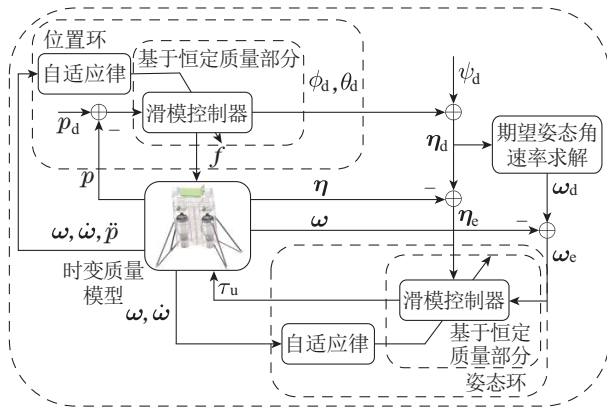


图3 控制系统框图

Fig. 3 The diagram of control system

#### 3.1 姿态环控制器设计

首先确定视为姿态环扰动部分 $\Delta f_a$ 的界. 重写式(11)如下:

$$\begin{aligned} \Delta f_a &= I_s^{-1} \tau_{\text{ext}} = \\ & I_s^{-1} (\mathbf{r}_{\text{sv}} \times \mathbf{F}_{\text{oil}}^b - \dot{I}_{\text{var}} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times I_{\text{var}} \boldsymbol{\omega} - \\ & I_{\text{var}} \dot{\boldsymbol{\omega}}). \end{aligned} \quad (36)$$

根据式(36), 得到不等式

$$\begin{aligned} \|\Delta f_a\| &\leq \|I_s^{-1}\| (\|\mathbf{r}_{\text{sv}} \times \mathbf{F}_{\text{oil}}^b\| + \|\dot{I}_{\text{var}} \boldsymbol{\omega}\| + \\ & \|\boldsymbol{\omega} \times I_{\text{var}} \boldsymbol{\omega}\| + \|I_{\text{var}} \dot{\boldsymbol{\omega}}\|), \end{aligned} \quad (37)$$

式中 $I_s$ 为固定值, 考虑到 $\|\mathbf{R}_e^b \mathbf{e}_3\| = 1$ , 有以下关系:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_{\text{sv}} \times \mathbf{F}_{\text{oil}}^b\| &= \|\mathbf{r}_{\text{sv}} \times (m_{\text{var}} \mathbf{g} \mathbf{R}_e^b \mathbf{e}_3)\| \leq \\ & g \|\mathbf{r}_{\text{sv}}\| \|m_{\text{var}}\| \|\mathbf{R}_e^b \mathbf{e}_3\| = \\ & g \|\mathbf{r}_{\text{sv}}\| \|m_{\text{var}}\| \leq \epsilon_1 \epsilon_2 g, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\|\dot{I}_{\text{var}} \boldsymbol{\omega}\| \leq \|\dot{I}_{\text{var}}\| \|\boldsymbol{\omega}\| \leq \epsilon_4 \|\boldsymbol{\omega}\|, \quad (39)$$

$$\|\boldsymbol{\omega} \times I_{\text{var}} \boldsymbol{\omega}\| \leq \|I_{\text{var}}\| \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \leq \epsilon_3 \|\boldsymbol{\omega}\|^2, \quad (40)$$

$$\|I_{\text{var}} \dot{\boldsymbol{\omega}}\| \leq \|I_{\text{var}}\| \|\dot{\boldsymbol{\omega}}\| \leq \epsilon_3 \|\dot{\boldsymbol{\omega}}\|. \quad (41)$$

从而得到不等式:

$$\begin{aligned} \|\Delta f_a\| &\leq \\ & \|I_s^{-1}\| (\epsilon_1 \epsilon_2 g + \epsilon_4 \|\boldsymbol{\omega}\| + \epsilon_3 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \epsilon_3 \|\dot{\boldsymbol{\omega}}\|). \end{aligned} \quad (42)$$

记 $\|I_s^{-1}\| [\epsilon_1 \epsilon_2 g \ \epsilon_4 \ \epsilon_3 \ \epsilon_3]^T \triangleq [\kappa_1 \ \kappa_2 \ \kappa_3 \ \kappa_4]^T = \mathbf{K}_a$ ,  $[1 \ \|\boldsymbol{\omega}\| \ \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \ \|\dot{\boldsymbol{\omega}}\|]^T \triangleq \boldsymbol{\Xi}_a$ , 则

$$\|\Delta f_a\| \leq \mathbf{K}_a^T \boldsymbol{\Xi}_a. \quad (43)$$

向量 $\boldsymbol{\Xi}_a$ 为系统状态变量的函数, 因此可以通过测量得到. 经过前面的讨论, 向量 $\mathbf{K}_a$ 为常值, 但是未知, 可以通过设计自适应律得到其估计值.

**注2** 虽然在不等式中 $\|\boldsymbol{\omega}\|^2$ 项与 $\|\dot{\boldsymbol{\omega}}\|$ 项的系数均为 $\epsilon_3$ , 但在自适应律中仍有可能收敛到不同的值, 因此在 $\mathbf{K}_a$ 将其设为不同的两项. 在后续的仿真中也能得到验证.

记 $\mathbf{W}_\eta = I_\eta^{-1}$ , 姿态角误差与姿态角速率误差为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_e = \boldsymbol{\eta}_d - \boldsymbol{\eta}, \\ \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega} = \mathbf{W}_{\boldsymbol{\eta}_d} \dot{\boldsymbol{\eta}}_d - \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (44)$$

式中 $\mathbf{W}_{\boldsymbol{\eta}_d} = \mathbf{W}_\eta(\boldsymbol{\eta}_d)$ , 对式(44)求导, 得到

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}_e = \dot{\boldsymbol{\eta}}_d - \dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\boldsymbol{\eta}}_d - \mathbf{W}_\eta^{-1} \boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{W}_\eta^{-1} \boldsymbol{\omega}_e, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_e = \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \dot{\boldsymbol{\omega}} = \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - I_s^{-1} (-\boldsymbol{\omega} \times I_s \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{u}_a - \Delta f_a, \end{cases} \quad (45)$$

式中:  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d = \dot{\mathbf{W}}_{\boldsymbol{\eta}_d} \dot{\boldsymbol{\eta}}_d + \mathbf{W}_{\boldsymbol{\eta}_d} \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d$ ,  $\dot{\mathbf{W}}_{\boldsymbol{\eta}_d} = \dot{\mathbf{W}}_\eta(\boldsymbol{\eta}_d)$ .

使用反步法设计控制器, 对于方程(45), 将 $\boldsymbol{\omega}_e$ 视为虚拟控制输入, 取Lyapunov函数为 $V_1$ , 即

$$V_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_e^T \boldsymbol{\eta}_e. \quad (46)$$

对式(46)求导

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \boldsymbol{\eta}_e^T \dot{\boldsymbol{\eta}}_e = \\ & \boldsymbol{\eta}_e^T (\dot{\boldsymbol{\eta}}_d - \mathbf{W}_\eta^{-1} \boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{W}_\eta^{-1} \boldsymbol{\omega}_e). \end{aligned} \quad (47)$$

记 $\boldsymbol{\varpi}_d = \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{W}_\eta(\dot{\boldsymbol{\eta}}_d + \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_e)$ , 其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 正定.

当 $\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\varpi}_d$ 时, 代入式(47), 得到

$$\dot{V}_1 = -\boldsymbol{\eta}_e^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_e \leq 0.$$

取 $\boldsymbol{\varpi}_e = \boldsymbol{\varpi}_d - \boldsymbol{\omega}_e$ , 代入式(45)得

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}_e = -\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_e - \mathbf{W}_\eta^{-1} \boldsymbol{\varpi}_e, \\ \dot{\boldsymbol{\varpi}}_e = \dot{\boldsymbol{\varpi}}_d - \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + I_s^{-1} (-\boldsymbol{\omega} \times I_s \boldsymbol{\omega}) + \\ \mathbf{u}_a + \Delta f_a, \end{cases} \quad (48)$$

式中 $\dot{\boldsymbol{\varpi}}_d = \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \dot{\mathbf{W}}_\eta(\dot{\boldsymbol{\eta}}_d + \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_e) - \mathbf{W}_\eta(\ddot{\boldsymbol{\eta}}_d + \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\eta}}_e)$ .

取Lyapunov函数 $V_2$ , 即

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varpi}_e^T \boldsymbol{\varpi}_e. \quad (49)$$

对 $V_2$ 求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \boldsymbol{\eta}_e^T \dot{\boldsymbol{\eta}}_e + \boldsymbol{\varpi}_e^T \dot{\boldsymbol{\varpi}}_e = \\ &= -\boldsymbol{\eta}_e^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_e - \boldsymbol{\eta}_e^T \mathbf{W}_\eta^{-1} \boldsymbol{\varpi}_e + \boldsymbol{\varpi}_e^T \dot{\boldsymbol{\varpi}}_e = \\ &= -\boldsymbol{\eta}_e^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_e - \boldsymbol{\varpi}_e^T [(\mathbf{W}_\eta^{-1})^T \boldsymbol{\eta}_e - \dot{\boldsymbol{\varpi}}_e]. \end{aligned} \quad (50)$$

考虑式(48), 设计如下控制器:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= (\mathbf{W}_\eta^{-1})^T \boldsymbol{\eta}_e - \dot{\boldsymbol{\varpi}}_d + \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{I}_s^{-1} (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_s \boldsymbol{\omega}) - \\ &= \lambda_1 \boldsymbol{\varpi}_e - \hat{\mathbf{K}}_a^T \boldsymbol{\Xi}_a \mathbf{Sgn} \boldsymbol{\varpi}_e, \end{aligned} \quad (51)$$

式中:  $\mathbf{Sgn} \boldsymbol{\varpi}_e = [\text{sgn} \omega_{\phi_d} \text{sgn} \omega_{\theta_d} \text{sgn} \omega_{\psi_d}]^T$ ,  $\lambda_1$  为正数,  $\hat{\mathbf{K}}_a$  为  $\mathbf{K}_a$  的估计, 按如下自适应律更新:

$$\dot{\hat{\mathbf{K}}}_a = \begin{cases} \mathbf{0}, & \|\boldsymbol{\varpi}_e\| = 0, \\ \|\boldsymbol{\varpi}_e\| \boldsymbol{\Gamma}_a \boldsymbol{\Xi}_a, & \|\boldsymbol{\varpi}_e\| > 0, \end{cases} \quad (52)$$

式中  $\boldsymbol{\Gamma}_a = \text{diag}\{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4\}$  正定.

**定理 1** 对于包含时变质量所导致系统不确定项的姿态方程(5)(13), 所设计控制器(51)、自适应律(52)能够保证姿态环稳定, 并且姿态误差渐近收敛至 0.

证 令  $\mathbf{K}_{ae} = \mathbf{K}_a - \hat{\mathbf{K}}_a$ , 由于  $\mathbf{K}_a$  为常值, 则  $\dot{\mathbf{K}}_{ae} = -\dot{\hat{\mathbf{K}}}_a$ .

取Lyapunov函数 $V_a$ , 即

$$V_a = V_2 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{ae}^T \boldsymbol{\Gamma}_a^{-1} \mathbf{K}_{ae}. \quad (53)$$

考虑到对任意的向量 $\mathbf{v}$ , 均有  $\|\mathbf{v}\|_1 \geq \|\mathbf{v}\|_2 \triangleq \|\mathbf{v}\|$ . 对式(53)求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= -\boldsymbol{\eta}_e^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_e - \boldsymbol{\varpi}_e^T [\lambda_1 \boldsymbol{\varpi}_e + \hat{\mathbf{K}}_a^T \boldsymbol{\Xi}_a \mathbf{Sgn} \boldsymbol{\varpi}_e - \\ &= \Delta \mathbf{f}_a] - \mathbf{K}_{ae}^T \boldsymbol{\Gamma}_a^{-1} \dot{\hat{\mathbf{K}}}_a \leq \\ &= -\boldsymbol{\eta}_e^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_e - \lambda_1 \|\boldsymbol{\varpi}_e\|^2 - \hat{\mathbf{K}}_a^T \boldsymbol{\Xi}_a \|\boldsymbol{\varpi}_e\|_1 + \\ &= \mathbf{K}_a^T \boldsymbol{\Xi}_a \|\boldsymbol{\varpi}_e\| - \mathbf{K}_{ae}^T \boldsymbol{\Gamma}_a^{-1} \dot{\hat{\mathbf{K}}}_a \leq \\ &= -\boldsymbol{\eta}_e^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_e - \lambda_1 \|\boldsymbol{\varpi}_e\|^2 - \hat{\mathbf{K}}_a^T \boldsymbol{\Xi}_a \|\boldsymbol{\varpi}_e\| + \\ &= \mathbf{K}_a^T \boldsymbol{\Xi}_a \|\boldsymbol{\varpi}_e\| - \mathbf{K}_{ae}^T \boldsymbol{\Gamma}_a^{-1} \dot{\hat{\mathbf{K}}}_a = \\ &= -\boldsymbol{\eta}_e^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_e - \lambda_1 \|\boldsymbol{\varpi}_e\|^2 + \mathbf{K}_{ae}^T \boldsymbol{\Xi}_a \|\boldsymbol{\varpi}_e\| - \\ &= \mathbf{K}_{ae}^T \boldsymbol{\Gamma}_a^{-1} \dot{\hat{\mathbf{K}}}_a = \\ &= -\boldsymbol{\eta}_e^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}_e - \lambda_1 \|\boldsymbol{\varpi}_e\|^2. \end{aligned} \quad (54)$$

从中可以看到, 当 $\dot{V}_a \equiv 0$ 时,  $\boldsymbol{\eta}_e \equiv 0$ ,  $\boldsymbol{\varpi}_e \equiv 0$ . 根据LaSalle不变性原理, 闭环系统渐近稳定, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,  $\boldsymbol{\eta}_e \rightarrow 0$ ,  $\boldsymbol{\varpi}_e \rightarrow 0$ . 证毕.

### 3.2 位置环控制器设计

同姿态环控制器设计一样, 首先需要确定扰动部分 $\Delta \mathbf{f}_p$ 的界. 由于姿态环部分的缩放过于宽松, 如果按照相同的方式进行缩放, 会得到

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{f}_p\| &= m_s^{-1} \|\mathbf{f}_{\text{ext}}\| \leq \\ &= \frac{m_{\text{var}}}{m_s} [\|\dot{\mathbf{v}}_r\| + \|\dot{\boldsymbol{\omega}}\| \|\mathbf{r}_{\text{sv}}\| + \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \|\mathbf{r}_{\text{sv}}\| + \\ &= 2\|\boldsymbol{\omega}\| \|\mathbf{v}_r\| + \|\ddot{\mathbf{p}}\| + \mathbf{g}]. \end{aligned} \quad (55)$$

但这会造成一个问题,  $\mathbf{g} \mathbf{e}_3$ 项只在向量的第3分量上有值 $\mathbf{g}$ , 并且很大, 如果按照上式进行缩放, 会对向量 $\Delta \mathbf{f}_p$ 的前两个分量造成较大影响.

**定义 1** 对于任意向量 $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ , 定义 ${}^\vee|\mathbf{v}| = [|v_1| \ |v_2| \ |v_3|]^T$ . 对于 $\mathbf{v}_a = [v_{a1} \ v_{a2} \ v_{a3}]^T$ ,  $\mathbf{v}_b = [v_{b1} \ v_{b2} \ v_{b3}]^T$ , 规定 ${}^\vee|\mathbf{v}_a| \leq {}^\vee|\mathbf{v}_b|$ 等价于 $|v_{a1}| \leq |v_{b1}|$ ,  $|v_{a2}| \leq |v_{b2}|$ ,  $|v_{a3}| \leq |v_{b3}|$ .

根据定义1, 可以得到

$$\begin{aligned} {}^\vee|\Delta \mathbf{f}_p| &= m_s^{-1} {}^\vee|\mathbf{f}_{\text{ext}}| \leq \\ &= \frac{m_{\text{var}}}{m_s} (\|\dot{\mathbf{v}}_r\| z_{111} + \|\dot{\boldsymbol{\omega}}\| \|\mathbf{r}_{\text{sv}}\| z_{111} + \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \times \\ &= \|\mathbf{r}_{\text{sv}}\| z_{111} + 2\|\boldsymbol{\omega}\| \|\mathbf{v}_r\| z_{111} + {}^\vee|\ddot{\mathbf{p}}| + \mathbf{g} \mathbf{e}_3) \leq \\ &= m_s^{-1} (\epsilon_2 \epsilon_6 z_{111} + \epsilon_1 \epsilon_2 \|\dot{\boldsymbol{\omega}}\| z_{111} + \epsilon_1 \epsilon_2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 z_{111} + \\ &= 2\epsilon_2 \epsilon_5 \|\boldsymbol{\omega}\| z_{111} + \epsilon_2 {}^\vee|\ddot{\mathbf{p}}| + \epsilon_2 \mathbf{g} \mathbf{e}_3) = \\ &= m_s^{-1} [\epsilon_3 \ z_{111} \ \|\boldsymbol{\omega}\| z_{111} \ \|\boldsymbol{\omega}\|^2 z_{111} \ \|\dot{\boldsymbol{\omega}}\| z_{111} \ {}^\vee|\ddot{\mathbf{p}}|] \times \\ &= [\epsilon_2 \mathbf{g} \ \epsilon_2 \epsilon_6 \ 2\epsilon_2 \epsilon_5 \ \epsilon_1 \epsilon_2 \ \epsilon_1 \epsilon_2 \ \epsilon_2]^T, \end{aligned} \quad (56)$$

式中 $\mathbf{z}_{111} = [1 \ 1 \ 1]^T$ .

记 $[\epsilon_3 \ z_{111} \ \|\boldsymbol{\omega}\| z_{111} \ \|\boldsymbol{\omega}\|^2 z_{111} \ \|\dot{\boldsymbol{\omega}}\| z_{111} \ {}^\vee|\ddot{\mathbf{p}}|] \triangleq \boldsymbol{\Xi}_p$ .

**注 3** 同样, 虽然这里的 $\|\boldsymbol{\omega}\|^2 z_{111}$ 与 $\|\dot{\boldsymbol{\omega}}\| z_{111}$ 有相同的系数, 但在自适应律中仍有可能收敛到不同的值, 将其在 $\mathbf{K}_p$ 记为不同的两项.

记 $m_s^{-1} [\epsilon_2 \mathbf{g} \ \epsilon_2 \epsilon_6 \ 2\epsilon_2 \epsilon_5 \ \epsilon_1 \epsilon_2 \ \epsilon_1 \epsilon_2 \ \epsilon_2]^T \triangleq [\kappa_5 \ \kappa_6 \ \kappa_7 \ \kappa_8 \ \kappa_9 \ \kappa_{10}]^T = \mathbf{K}_p$ .

根据式(56)得到

$${}^\vee|\Delta \mathbf{f}_p| \leq \boldsymbol{\Xi}_p \mathbf{K}_p. \quad (57)$$

记 $\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_d - \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{s} = \dot{\mathbf{p}}_e + \boldsymbol{\Psi} \mathbf{p}_e$ ,  $\boldsymbol{\Psi} = \text{diag}\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ 正定, 则

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \ddot{\mathbf{p}}_e + \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{p}}_e = \\ &= \ddot{\mathbf{p}}_d - \Delta \mathbf{f}_p - \mathbf{g} \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{p}}_e - \mathbf{u}_p. \end{aligned} \quad (58)$$

取Lyapunov函数 $V_3$ , 即

$$V_3 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}. \quad (59)$$

对 $V_3$ 求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \\ &= \mathbf{s}^T (\ddot{\mathbf{p}}_d - \Delta \mathbf{f}_p - \mathbf{g} \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{p}}_e - \mathbf{u}_p). \end{aligned} \quad (60)$$

设计如下控制律:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p &= \ddot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{g} \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{p}}_e + \lambda_2 \mathbf{s} + \\ &= \text{diag}\{\mathbf{Sgn} \mathbf{s}\} \boldsymbol{\Xi}_p \hat{\mathbf{K}}_p, \end{aligned} \quad (61)$$

式中:  $\lambda_2$  为正数,  $\hat{K}_p$  为  $K_p$  的估计, 按如下自适应律更新:

$$\dot{\hat{K}}_p = \begin{cases} \mathbf{0}, & \|s\| = 0, \\ \Gamma_p \Xi_p^T v |s|, & \|s\| > 0, \end{cases} \quad (62)$$

式中  $\Gamma_p = \text{diag}\{\gamma_5 \ \gamma_6 \ \gamma_7 \ \gamma_8 \ \gamma_9 \ \gamma_{10}\}$  正定.

**定理 2** 对于包含时变质量所导致系统不确定项的位置方程 (19), 所设计控制器 (61)、自适应律 (62) 能够保证位置环稳定, 并且位置误差渐近收敛至 0.

证 令  $K_{pe} = K_p - \hat{K}_p$ , 满足  $\dot{K}_{pe} = -\dot{\hat{K}}_p$ . 取 Lyapunov 函数为  $V_p$ , 即

$$V_p = V_3 + \frac{1}{2} K_{pe}^T \Gamma_p^{-1} K_{pe}. \quad (63)$$

对式 (63) 求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_p &= s^T [-\Delta f_p - \lambda_2 s - \text{diag}\{\text{Sgn } s\} \Xi_p \hat{K}_p] - \\ & K_{pe}^T \Gamma_p^{-1} \dot{\hat{K}}_p = \\ & -\lambda_2 \|s\|^2 - s^T \Delta f_p - v |s|^T \Xi_p \hat{K}_p - \\ & K_{pe}^T \Gamma_p^{-1} \dot{\hat{K}}_p \leq \\ & -\lambda_2 \|s\|^2 + v |s|^T \Xi_p K_p - v |s|^T \Xi_p \hat{K}_p - \\ & K_{pe}^T \Gamma_p^{-1} \dot{\hat{K}}_p = \\ & -\lambda_2 \|s\|^2 + v |s|^T \Xi_p K_{pe} - K_{pe}^T \Gamma_p^{-1} \dot{\hat{K}}_p = \\ & -\lambda_2 \|s\|^2. \end{aligned} \quad (64)$$

可以看出, 当  $\dot{V}_p \equiv 0$  时,  $s \equiv 0$ . 根据 LaSalle 不变性原理, 闭环系统渐近稳定, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $s \rightarrow 0$ .

证毕.

姿态环需要的期望滚转角  $\phi_d$  与俯仰角  $\theta_d$  需要由位置环提供, 按照下式求解:

$$\begin{cases} \theta_d = \arctan\left(\frac{u_{px} \cos \psi + u_{py} \sin \psi}{u_{pz}}\right), \\ \phi_d = \arctan\left(\frac{u_{px} \sin \psi - u_{py} \cos \psi}{u_{pz}} \cos \theta_d\right). \end{cases} \quad (65)$$

### 4 仿真实验

在这一部分, 将使用数值仿真来验证所建立模型以及所设计控制算法的有效性. 根据假设 1, 为了得到燃油体积与质量的关系, 需要知道燃油的密度  $\rho$ , 从而得到  $l_z = \frac{m_{var}}{\rho l_x l_y}$ . 油箱部分质量随时间的变化规律定义为  $\dot{m}_{var} = -k_f \sqrt{\|f\|}$ ,  $k_f$  为油耗因子, 记油箱的初始质量为  $m_{var0}$ . 模型的具体参数见表 1.

仿真探究针对时变质量模型 (式 (5)(13)(19)), 所设计控制器 (式 (51)(61)) 的轨迹跟踪表现. 所有状态变量的初始值设为 0, 即  $p = \dot{p} = \eta = \omega = \mathbf{0}$ . 期望的轨迹为  $p_d = [\cos(0.5t) \ \sin(0.5t) \ -1 - 0.5t]^T$ , 期望的偏航角  $\psi_d = 0$ . 控制器参数见表 2. 为了避免滑模控制带来的抖振现象, 使用  $\tanh \frac{*}{\beta}$  代替切换函数  $\text{sgn}(*)$ .

表 1 模型参数

Table 1 Model parameters

参数	值
$m_s$	10.5 kg
$m_{var0}$	1.2 kg
$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>
$I_s$	$\text{diag}\{0.330, 0.157, 0.213\}$ kg · m <sup>2</sup>
$a_2, a_3$	-0.11 m, 0.2 m
$l_x, l_y, l_z0$	0.1 m, 0.18 m, 0.08 m
$\ r_{sv0}\ $	0.27 m
$\rho$	$0.85 \times 10^3$ kg/m <sup>3</sup>
$k_f$	$17.6 \times 10^{-4}$

表 2 控制器参数

Table 2 Controller parameters

参数	值
$\Lambda$	$\text{diag}\{10, 10, 10\}$
$\lambda_1, \lambda_2$	1, 1
$\Gamma_a$	$\text{diag}\{5, 4, 2, 0.5\}$
$\Psi$	$\text{diag}\{1, 1, 1\}$
$\Gamma_p$	$\text{diag}\{0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.01, 0.05\}$
$\beta$	0.1

为了验证所设计控制器的性能, 仿真设置 4 组对照实验: 经典 PID 控制、滑模控制 (sliding mode control, SMC), 以及文献 [27–28] 针对变质量无人机分别提出的分数阶滑模控制 (fractional order SMC, FOSMC)、非奇异快速终端滑模控制 (non-singular fast terminal SMC, NFTSMC). 其中后面两组涉及到自适应控制与质量估计, 仿真时将其简写为 FOSMC-ad, NFTSMC-mE.

图 4 给出了本文所设计控制器在仿真中变质量部分的质量以及转动惯量随时间变化曲线. 正是这种时变的质量与转动惯量带来的模型不确定性导致了后续仿真中几组对照组效果不甚理想.

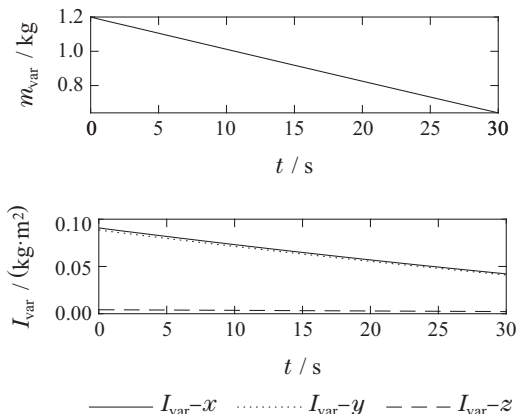


图 4 变质量部分质量及转动惯量变化曲线  
Fig. 4 Mass and moment of inertia curves of variable mass part

图5给出了5种控制器的姿态跟踪与误差曲线. 可以看到, 即使是PID这类无模型控制器, 也不能达到预期的跟踪表现, 同时会存在稳态误差. 稳态误差的出现并不是控制器缺少积分环节导致, 而是由于时变质量带来的不确定性. 而普通的滑模控制器已无法应对这种模型不确定性, 跟踪曲线初始阶段出现较大幅度的震荡, 同时存在较大的稳态误差. FOSMC-ad与NFTSMC-mE在设计控制器时虽然有考虑到时变质量的作用, 但由于对质心位置、转动惯量做了不变假设, 其控制效果稍好于PID与SMC, 仍存在跟踪曲线初始阶段震荡、稳态偏差的情况. 而本文所提出控制方法综合考虑了质量、质心位置与转动惯量的变化, 在姿态跟踪中的表现优异, 在不到0.5 s的时间便已实现姿态的跟踪效果, 稳态误差在0.01 rad以下. 姿态跟踪响应速度、稳态精度方面都有显著提升.

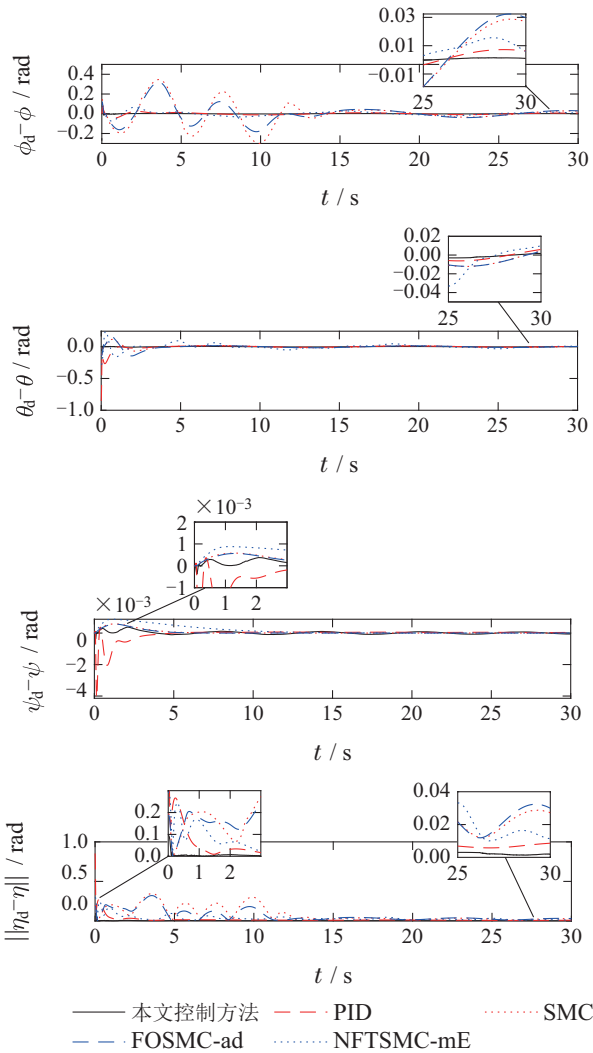


图5 姿态跟踪误差  
Fig. 5 Attitude tracking errors

5种控制器的位置跟踪与误差曲线如图6所示. 同姿态控制一样, PID与SMC在位置跟踪的速度与稳态精度上均不尽如人意. 由于5种控制器均采用串级控

制的结构, FOSMC-ad与NFTSMC-mE在姿态跟踪环节存在的偏差到位置环这里进一步放大, 位置跟踪效果不甚理想. 而本文所提出控制方法在实现稳定跟踪期望姿态的基础上, 在5 s左右便实现轨迹跟踪, 并且稳态误差控制在0.02 m以下.

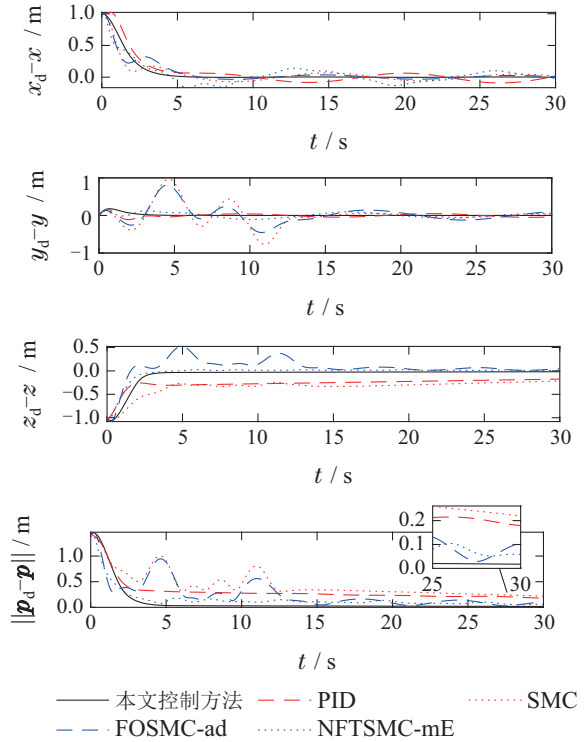
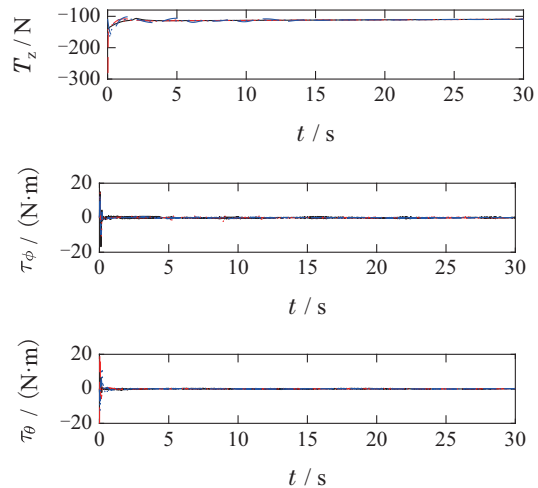


图6 位置跟踪误差  
Fig. 6 Position tracking errors

图7与图8分别为控制器计算得到的力、力矩与实际的执行器输入曲线. 在仿真的初始阶段, 相较于其他4组对照仿真, 所设计控制器的控制输入整体会上小些. 从涡喷发动机的实际推力曲线 $F_t$ 来看, 本文所提出控制分配方法, 对涡喷发动机的响应速度无过高要求. 几种有模型控制算法对舵机的响应速度要求相较于PID会高一些.



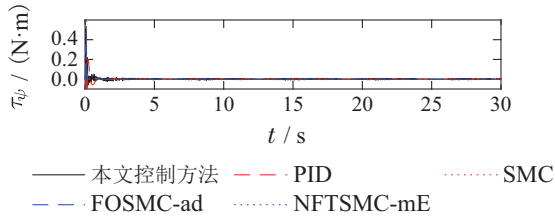


图7 控制输入曲线

Fig. 7 Control input curves

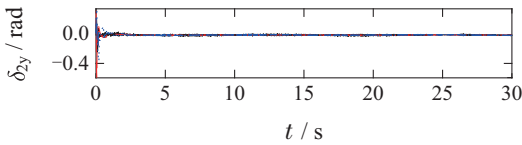
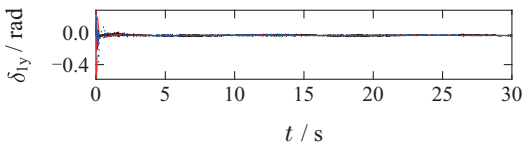
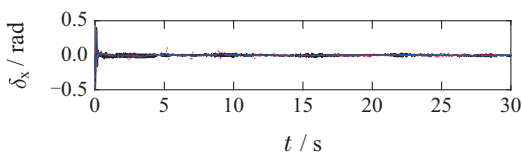
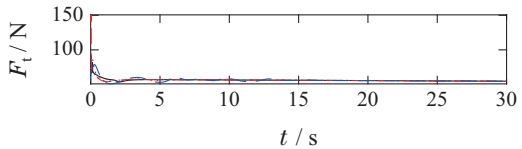
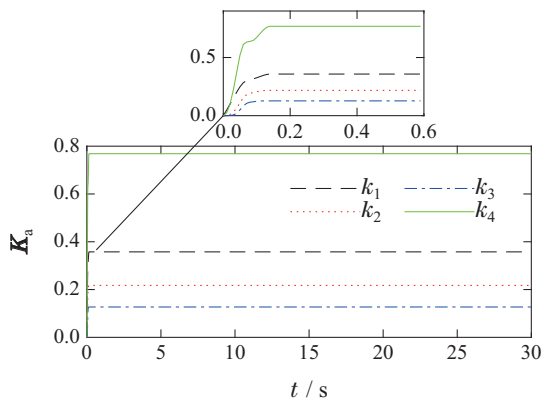


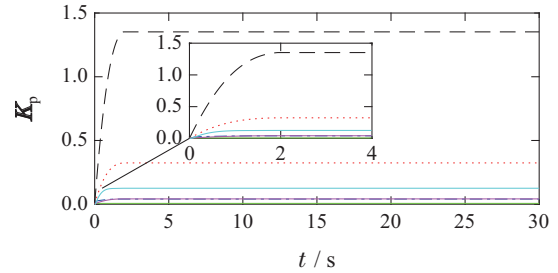
图8 执行器输出曲线

Fig. 8 Actuator output curves

图9为所设计控制器姿态环与位置环的自适应律更新曲线. 可以看到姿态环关于时变质量所造成系统不确定性部分的因子估计收敛是十分迅速的, 这也使得外环的轨迹跟踪有了可能. 同时, 也可以看到位置环自适应律中的 $\kappa_5$ 相较于 $\kappa_6, \kappa_7, \kappa_8, \kappa_9, \kappa_{10}$ 会收敛到一个较大值, 这也呼应了前文指出的位置环缩放要比姿态环更加严格.



(a) 姿态环自适应律



(b) 位置环自适应律

图9 自适应律

Fig. 9 The adaptive law

图10给出了所设计控制器与其他4种控制器在三维空间中的轨迹跟踪对比曲线. 正如前面具体数据分析的那样, 本文所提出控制器的轨迹跟踪表现要明显优于其他4种控制器.

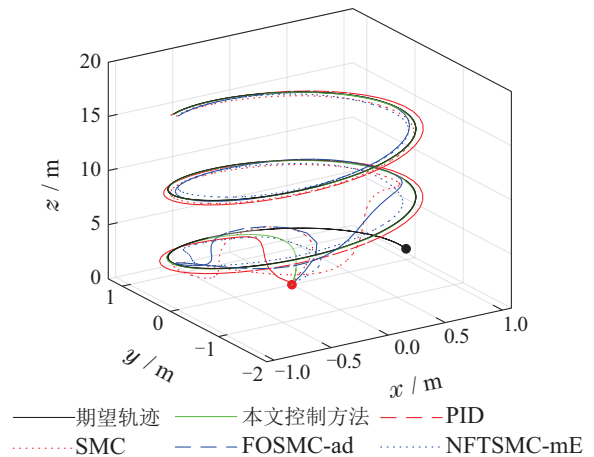


图10 三维轨迹跟踪

Fig. 10 3D trajectory tracking

### 5 结论

文章研究了一类时变质量双涡喷发动机构型无人机的建模与轨迹跟踪控制问题. 提出一种自适应滑模控制器实现对目标轨迹的跟踪. 面对时变质量所带来的模型不确定性, 闭环系统跟踪误差渐近收敛于零. 仿真结果证明了所设计控制器对目标轨迹的高效跟踪效果, 并且设置了4组对照实验, 轨迹跟踪效果有着明显的提升. 本文采用的自适应滑模控制算法, 与传统的PID控制算法相比计算量有所增加, 但其对时变质量引起的各种不确定性具有较强的鲁棒性, 随着无人机载计算机算力的提升, 本文所提出的控制算法具有一定的工程应用价值. 后面的工作可以着手所设计控制器的实物验证.

### 参考文献:

[1] HUI T, PAOLINO A, NAVA G, et al. Centroidal aerodynamic modeling and control of flying multibody robots. *IEEE International Con-*

- ference on Robotics and Automation (ICRA). Philadelphia: IEEE, 2022: 2017 – 2023.
- [2] LIU B S, GAO Y S, GAO L, et al. Design and experimental study of a turbojet VTOL aircraft with one-dimensional thrust vectoring nozzles. *Aerospace*, 2022, 9: 678.
- [3] LEDERER C, ALTSTADT S, ANDRIAMONJE S, et al. Modeling and simulation of JetQuad aerial robot. *The 4th IEEE International Conference on Knowledge-Based Engineering and Innovation*. Tehran: IEEE, 2017: 753 – 762.
- [4] WU L F, LI H Y, LI Y J, et al. Position tracking control of tailsitter VTOL uav with bounded thrust-vectoring propulsion system. *IEEE Access*, 2019, 7: 137054 – 137064.
- [5] TURKMEN A, ALTUG E. Design of a Quad-Jet VTOL UAS for heavy-lift applications. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems*. Athens: IEEE, 2020: 875 – 882.
- [6] MOHAMED H A O, NAVA G, L'ERARIO G, et al. Momentum-based extended Kalman filter for thrust estimation on flying multi-body robots. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2022, 7(1): 526 – 533.
- [7] MARTINI S, VALAVANIS K P, STEFANOVIC M, et al. Correction to the euler lagrange multirotor model with euler angles generalized coordinates. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2024, 110: 17 – 25.
- [8] LIAO Weizhong, ZONG Qun, MA Yali. Modeling and finite-time control for quad-rotor mini unmanned aerial vehicles. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(10): 1343 – 1350.  
(廖卫中, 宗群, 马亚丽. 小型四旋翼无人机建模与有限时间控制. 控制理论与应用, 2015, 32(10): 1343 – 1350.)
- [9] XU Changliang, YANG Zhong, JIANG Yuhong, et al. Active disturbance rejection control of a novel multi-rotor aerial robot with a manipulator. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(4): 581 – 592.  
(许昌亮, 杨忠, 姜遇红, 等. 新型多旋翼作业型空中机器人自抗扰控制. 控制理论与应用, 2022, 39(4): 581 – 592.)
- [10] SUN Guhao, ZENG Qingshuang, CAI Zhongze. Safety-critical trajectory tracking control of quadrotor UAVs. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(7): 1261 – 1269.  
(孙谷昊, 曾庆双, 蔡中泽. 四旋翼无人机安全轨迹跟踪控制. 控制理论与应用, 2023, 40(7): 1261 – 1269.)
- [11] XU Jing, CAI Chenxiao, LI Yongqi, et al. Dual-loop path tracking and control for quad-rotor miniature unmanned aerial vehicles. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(10): 1335 – 1342.  
(许璟, 蔡晨晓, 李勇奇, 等. 小型四旋翼无人机双闭环轨迹跟踪与控制. 控制理论与应用, 2015, 32(10): 1335 – 1342.)
- [12] SONG Z K, SUN K B. Adaptive fault tolerant control for a small coaxial rotor unmanned aerial vehicles with partial loss of actuator effectiveness. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 88: 362 – 379.
- [13] DROUOT A, RICHARD E, BOUTAYEB M. An approximate backstepping based trajectory tracking control of a gun launched micro aerial vehicle in crosswind. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2013, 70: 133 – 150.
- [14] NGUYEN N P, OH H, MOON J. Continuous nonsingular terminal sliding-mode control with integral-type sliding surface for disturbed systems: Application to attitude control for quadrotor uavs under external disturbances. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, 58(6): 5635 – 5660.
- [15] WU Yuxiang, WANG Cong. Adaptive neural network control and learning for uncertain robot. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(8): 990 – 997.  
(吴玉香, 王聪. 不确定机器人的自适应神经网络控制与学习. 控制理论与应用, 2013, 30(8): 990 – 997.)
- [16] NODLAND D, ZARGARZADEH H, JAGANNATHAN S. Neural network-based optimal adaptive output feedback control of a helicopter UAV. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2013, 24(7): 1061 – 1073.
- [17] LUO Y H, YU H, ZHANG H G, et al. A novel Newton – Euler method-based nonlinear anti-swing control for a quadrotor UAV carrying a slung load. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2024, 54(4): 2266 – 2275.
- [18] PALUNKO I, FIERRO R, CRUZ P. Trajectory generation for swing-free maneuvers of a quadrotor with suspended payload: A dynamic programming approach. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Saint Paul: IEEE, 2012: 2691 – 2697.
- [19] OKTAY T, SULTAN C. Modeling and control of a helicopter slung-load system. *Aerospace Science and Technology*, 2013, 29(1): 206 – 222.
- [20] YANG Y N, WU J, ZHENG W. Variable structure attitude control for an uav with parameter uncertainty and external disturbance. *Procedia Engineering*, 2011, 15: 408 – 415.
- [21] PALUNKO I, FIERRO R. Adaptive control of a quadrotor with dynamic changes in the center of gravity. *The International Federation of Automatic Control*, 2011, 44(1): 2626 – 2631.
- [22] OUTEIRO P, CARDEIRA C, OLIVEIRA P. Adaptive/multi-model height control system of a quadrotor constant unknown load transportation. *IEEE International Conference on Autonomous Robot Systems and Competitions (ICARSC)*. Torres Vedras: IEEE, 2018: 65 – 70.
- [23] HAUS T, PRKUT N, BOROVINA K, et al. A novel concept of attitude control for large multirotor-UAVs based on moving mass control. *Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. Athens: IEEE, 2016: 832 – 839.
- [24] HAUS T, ORSAG M, BOGDAN S. Design considerations for a large quadrotor with moving mass control. *2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. Arlington: IEEE, 2016: 1327 – 1334.
- [25] PEDRO J O, PANDAY A, DALA L. A nonlinear dynamic inversion-based neurocontroller for unmanned combat aerial vehicles during aerial refuelling. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2013, 23(1): 75 – 90.
- [26] WU X W, XIAO B, QU Y H. Modeling and sliding mode-based attitude tracking control of a quadrotor UAV with time-varying mass. *ISA Transactions*, 2022, 124: 436 – 443.
- [27] VAHDANIPOUR M, KHODABANDEH M. Adaptive fractional order sliding mode control for a quadrotor with a varying load. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 86: 737 – 747.
- [28] ZHAO J, DING X Q, JIANG B, et al. A novel control strategy for quadrotors with variable mass and external disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31(17): 8605 – 8631.
- [29] LI Y J, WU L F, LI C W. Modeling and control of a micro aero-engine thrust vector system. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 2020, 60(3): 198 – 205.

#### 作者简介:

闫林 硕士研究生, 目前研究方向为非线性系统、自适应控制,

E-mail: yeln.w@outlook.com;

李鹏 博士, 副教授, 目前研究方向为制导与控制一体化、智能飞行控制, E-mail: lipeng\_2010@163.com;

何家兴 硕士研究生, 目前研究方向为非线性系统、无人机控制, E-mail: hejiaxing211@163.com;

张钊 硕士研究生, 目前研究方向为制导与控制、无人机定位, E-mail: 2281223069@qq.com.