

基于信息矩阵迹的分布式容积信息一致性滤波算法

王迪, 郝钢[†]

(黑龙江大学 电子工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 针对非线性分布式无线传感器网络系统, 本文提出了一种基于信息矩阵迹的分布式容积信息一致性滤波算法(TDCIF). 本文首先分析了经典分布式容积信息一致性滤波算法(DCIF)的收敛性, 并证明了所提出的TDCIF算法随着迭代次数的增加, 收敛到次优标量线性最小方差融合估计. TDCIF算法虽然在精度上低于DCIF算法, 但TDCIF在迭代过程中传输的数据量更少, 这使得网络通信负担大幅度减少, 系统的实时性和鲁棒性得到了明显改善. 最后, 仿真实例验证了所提出算法的有效性.

关键词: 分布式容积信息滤波; 线性最小方差融合估计; 一致性

引用格式: 王迪, 郝钢. 基于信息矩阵迹的分布式容积信息一致性滤波算法. 控制理论与应用, 2026, 43(3): 605 – 611

DOI: 10.7641/CTA.2024.30668

Distributed cubature information consensus filtering algorithm based on information matrix trace

WANG Di, HAO Gang[†]

(Electronic Engineering Institute, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China)

Abstract: For nonlinear distributed wireless sensor networks, a distributed cubature information consensus filtering algorithm based on information matrix trace (TDCIF) is proposed in this paper. In this paper, the convergence of the classical distributed cubature information consensus filtering algorithm (DCIF) is analyzed. It is proved that the proposed TDCIF algorithm gradually converges to suboptimal scalar linear minimum variance fusion estimation with the increase of iterations. Although the TDCIF has lower accuracy than the DCIF, it transmits less data during the iteration process, which greatly reduces the communication burden and significantly improves the real-time and robustness of the system. Finally, a simulation example is given to verify the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: distributed cubature information filters; linear minimum variance fusion estimation; consistency

Citation: WANG Di, HAO Gang. Distributed cubature information consensus filtering algorithm based on information matrix trace. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(3): 605 – 611

1 引言

近年来, 无线传感器网络 (wireless sensor networks, WSN) 技术发展迅速, 被广泛应用于结构健康监测^[1]、无线人体传感器网络^[2]、目标跟踪^[3]等领域. 作为无线传感器网络重要应用之一的分布式状态估计也一直备受学者们的关注^[4]. 相比于集中式状态估计, 分布式状态估计通信消耗低, 计算负担小, 并且面对网络故障时, 分布式状态估计具有更好的鲁棒性^[5].

随着技术的发展, 无线传感器网络的拓扑结构更加复杂, 传统的带有融合中心的分布式估计面临着更

多的资源消耗和不稳定因素. 而不带有融合中心的分布式估计所面临的问题就是传感器之间的协作方式. 一致性估计算法是解决这种问题的有效手段之一^[6]. 一致性估计将每个传感器节点的估计达成一致, 以此得到更合理、准确的估计. 在过去十几年里, 基于不同变量的一致性, 提出了大致3种不同类型的一致性算法. 第1种是由Olfati-Saber在文献[7]中提出的基于状态的一致性估计 (consensus on estimates, CE). CE仅要求传输状态估计向量, 数据传输量小, 避免了迭代过程. 但CE的主要问题是缺失误差方差信息, 而误差方

收稿日期: 2023-10-09; 录用日期: 2024-09-10.

[†]通信作者. E-mail: haogang@hlju.edu.cn.

本文责任编辑: 张焕水.

国家自然科学基金项目(61503127), 黑龙江省高校基本业务经费项目(2021-KYYWF-0027), 黑龙江省信息融合估计与检测重点实验室资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61503127), the University Basic Research Foundation of Heilongjiang Province (2021-KYYWF-0027) and the Key Laboratory of Information Fusion Estimation and Detection, Heilongjiang Province.

差是估计精度的重要衡量指标之一. 针对该问题, 文献[8]通过局部最小化滤波误差方差上界, 设计了最优卡尔曼滤波增益和一致性增益, 提出了事件触发分布式卡尔曼一致性滤波算法, 提高了估计精度. 第2种是在文献[9]中被提出的一种基于测量的测量一致性 (consensus on measurements, CM), 它使传感器节点之间的测量和新协方差达成一致性. CM保证了只要所有节点的观测矩阵和状态矩阵形成可观测对, 每个节点就可以得到所有状态的平均值. CM需要足够多的迭代次数才能达到稳态^[10]. 文献[11]分析了在有限迭代次数下, CM滤波算法的性能与集中式滤波性能之间的解析关系, 证明了稳态估计误差方差指数收敛到集中式最优稳态方差. 第3种是信息一致性 (consensus on information, CI), 它可以使信息矩阵和信息向量保持一致. CI保证了迭代次数很少时依旧很稳定^[12]. 但不论是CM还是CI, 都需要传感器节点与邻居节点传输大量数据, 这导致传感器网络面临巨大的通信负担. 综合考虑网络资源, 计算负担与融合精度, 本文对CI进行了改进, 在保证估计精度的前提下有效减少了通信负担.

非线性系统的一致性估计一直备受学者们的关注. 其中, 基于扩展卡尔曼滤波 (extended Kalman filter, EKF) 的一致性估计算法, 当系统的非线性度很高时, 很容易变得不稳定^[13-14]. 文献[15]提出了一种基于加权平均一致性的无迹卡尔曼滤波算法. 为了避免系统维度较高时出现的非正定现象^[16-17], 文献[18]提出了基于加权平均共识的分布式容积信息滤波算法, 该算法在迭代步数较少时依旧稳定. 文献[19]提出了一种基于分布式混合共识的平方根容积信息滤波算法, 该算法将一种新颖的测量更新加入到混合共识滤波中, 由于考虑了预测的测量误差使得估计更加准确, 但也极大的增加了计算成本和通信负担. 文献[20]提出了一种鲁棒共识非线性信息滤波器, 用于具有测量异常值的分布式状态估计.

一致性估计需要在有限局域网内进行足够步长的连续迭代, 以达到共识目的. 以上提及的各种经典算法均以信息矩阵(估计误差方差的逆)作为迭代依据传输并进行一致性迭代. 然而对于局部节点较多、迭代步数较长或者局部网络通信能力不足的情形, 大量信息矩阵的传输极易导致网络不稳定(延迟或者丢包). 针对以上问题, 本文提出了一种基于信息矩阵迹的分布式容积信息一致性滤波算法 (information matrix trace-based distributed cubature information consensus filter, TDCIF). 该算法在一致性迭代过程中采用了信息矩阵的迹, 相比较于传统的信息一致性估计, 该方法可以很大程度节省网络传输资源, 使得传感器网络更简单、高效, 更具有鲁棒性. 本文的主要贡献总结如下: 1) 针对非线性分布式传感器网络系统, 提出了一种一致性估计算法TDCIF, 该算法在一致性迭代过程

中, 采用了信息矩阵的迹, 从而使得传感器节点之间的数据传输量大幅度降低, 通信负担小, 鲁棒性高; 2) 证明了该算法的收敛性, 即在一致性迭代步长趋于无穷时, 在正态分布假设下TDCIF算法收敛到次优标量加权线性最小方差融合估计.

符号说明: \mathbb{R}^n 表示 n 维欧式空间; $E(\cdot)$ 表示数学期望; M^T 和 M^{-1} 分别表示矩阵的转置和逆矩阵; I_n 为 $n \times n$ 的单位阵; δ_{kt} 表示克罗内克 δ 函数, $\delta_{tt} = 1$, $\delta_{kt} = 0 (t \neq k)$; $\text{chol}(\mathbf{P})$ 为对称正定矩阵 \mathbf{P} 的Cholesky分解.

2 问题阐述

考虑具有多传感器离散非线性随机系统

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k^{(i)} = \mathbf{h}^{(i)}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ 为 k 时刻的状态向量; $\mathbf{z}_k^{(i)} \in \mathbb{R}^{m_i}$ 为 k 时刻的观测向量; $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^n$ 是非线性状态函数; $\mathbf{h}^{(i)}(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{m_i}$ 是非线性观测函数; $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ 是过程噪声; $\mathbf{v}_k^{(i)} \in \mathbb{R}^{m_i}$ 为观测噪声.

假设 1 系统噪声 \mathbf{w}_k 和观测噪声 $\mathbf{v}_k^{(i)}$ 为不相关的零均值高斯白噪声, 方差分别为 \mathbf{Q}_k 和 \mathbf{R}_k ,

$$E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t^T & (\mathbf{v}_t^{(j)})^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_k^{(j)} \delta_{ij} \end{bmatrix} \delta_{kt}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

假设 2 \mathbf{x}_0 与 $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k^{(i)}$ 不相关, 且 \mathbf{x}_0 满足

$$E[\mathbf{x}_0] = \boldsymbol{\mu}_0, \quad E[(\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_0)^T] = \mathbf{P}_0. \quad (4)$$

考虑 N 个传感器节点组成的一个无线传感器网络, 以无向图 $G = \{V, E\}$ 表示, 其中: $V = \{1, 2, \dots, N\}$ 是节点集, $E \subset V \times V$ 是边集. 具有元素 a_{ij} 的邻接矩阵 \mathbf{A} 被定义为: 当且仅当 $(i, j) \in E$ 时, $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$. 对于无向图, 如果 $(j, i) \in E$, 那么 $(i, j) \in E$. i 节点的邻居集用 N 表示.

3 容积信息滤波算法

在信息一致性滤波算法中, 传感器节点之间通过多次交换信息矩阵和信息向量后, 所有传感器节点在信息矩阵和信息向量上达成一致, 并计算得到一致性状态估计. 容积信息滤波 (cubature information filter, CIF)^[21]算法是CKF的信息形式, 适用于非线性系统的信息一致性滤波算法. 其具体算法如算法1所示.

算法 1 容积信息滤波(CIF)算法.

1) 时间更新.

计算得到 n 个容积点

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_{k-1|k-1}^{i,s} &= \text{chol}((\mathbf{Y}_{k-1|k-1}^i)^{-1}) \boldsymbol{\xi}_s^i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^i, \\ s &= 1, 2, \dots, 2n, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5)$$

其中: $\mathbf{Y}_{k-1|k-1}^i = (\mathbf{P}_{k-1|k-1}^i)^{-1}$, N 是状态向量的维度, $\boldsymbol{\xi}_s^i$ 是 $\sqrt{n}[\mathbf{I}_n - \mathbf{I}_n]$ 的第 s 列向量. 将式(5)的容积点经过状态转移函数传播得到

$$\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{*,i,s} = f(\boldsymbol{\chi}_{k-1|k-1}^{i,s}), \quad s = 1, 2, \dots, 2n, \quad (6)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^i = \frac{1}{2n} \sum_{s=1}^{2n} \boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{*,i,s}, \quad (7)$$

$$\mathbf{Y}_{k|k-1}^i = \left[\frac{1}{2n} \sum_{s=1}^{2n} (\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{*,i,s} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^i)(\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{*,i,s} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^i)^{\text{T}} + \mathbf{Q}_{k-1} \right]^{-1}, \quad (8)$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^i = \mathbf{Y}_{k|k-1}^i \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^i. \quad (9)$$

2) 量测更新.

预报容积点计算如下:

$$\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{i,s} = \text{chol}((\mathbf{Y}_{k|k-1}^i)^{-1}) \boldsymbol{\xi}_s^i + \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^i, \quad s = 1, 2, \dots, 2n, \quad (10)$$

通过非线性测量函数 $\mathbf{h}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k)$ 传播得到

$$\mathbf{Z}_{k|k-1}^{i,s} = \mathbf{h}^i(\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{i,s}), \quad s = 1, 2, \dots, 2n, \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^i = \frac{1}{2n} \sum_{s=1}^{2n} \mathbf{Z}_{k|k-1}^{i,s}, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^i = \mathbf{z}_k^i - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^i, \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_{zz,k|k-1}^i = \frac{1}{2n} \sum_{s=1}^{2n} (\mathbf{Z}_{k|k-1}^{i,s} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^i)(\mathbf{Z}_{k|k-1}^{i,s} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^i)^{\text{T}} + \mathbf{R}_k^i, \quad (14)$$

更新的信息向量 $\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k}^i$ 和信息矩阵 $\mathbf{Y}_{k|k}^i$ 为

$$\mathbf{P}_{xz,k|k-1}^i = \frac{1}{2n} \sum_{s=1}^{2n} (\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{i,s} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^i)(\mathbf{Z}_{k|k-1}^{i,s} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^i)^{\text{T}}, \quad (15)$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k}^i = \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^i + \mathbf{Y}_{k|k-1}^i \mathbf{P}_{xz,k|k-1}^i (\mathbf{R}_k^i)^{-1} [\boldsymbol{\varepsilon}_k^i + (\mathbf{Y}_{k|k-1}^i \mathbf{P}_{xz,k|k-1}^i)^{\text{T}} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^i], \quad (16)$$

$$\mathbf{Y}_{k|k}^i = \mathbf{Y}_{k|k-1}^i + \mathbf{Y}_{k|k-1}^i \mathbf{P}_{xz,k|k-1}^i (\mathbf{R}_k^i)^{-1} \times (\mathbf{Y}_{k|k-1}^i \mathbf{P}_{xz,k|k-1}^i)^{\text{T}}, \quad (17)$$

最后可以得到

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^i = (\mathbf{Y}_{k|k}^i)^{-1} \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k}^i. \quad (18)$$

4 基于信息矩阵迹的容积信息一致性滤波算法

4.1 经典的分布式容积信息一致性滤波算法

对于信息一致性算法, 首先, 每个节点仅与邻居节点交换信息矩阵和信息向量; 进而基于接收到的来自邻居节点的信息, 更新局部估计信息矩阵和信息向量. 引入如下定理:

定理 1 给出 $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ 形式的信息对, 如果对于每个传感器节点 i 都存在以下极限, 则称它们的加权平均共识是一致的^[14].

$$(\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k}^*, \mathbf{Y}_{k|k}^*) = \lim_{l \rightarrow \infty} (\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k,l}^i, \mathbf{Y}_{k|k,l}^i), \quad (19)$$

其中 $(\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k,l}^i, \mathbf{Y}_{k|k,l}^i)$, $i \in N$ 表示第 l 次迭代后在时间 k 处的节点 i 的信息对, 且满足

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k,l+1}^i = \pi^{i,i} \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k,l}^i + \sum_{j \in N} \pi^{i,j} \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k,l}^j, \\ \mathbf{Y}_{k|k,l+1}^i = \pi^{i,i} \mathbf{Y}_{k|k,l}^i + \sum_{j \in N} \pi^{i,j} \mathbf{Y}_{k|k,l}^j, \end{cases} \quad (20)$$

其中: $\pi^{i,j} \geq 0$, $j \in N$ 为加权系数, 且 $\pi^{i,i} + \sum_{j \in N} \pi^{i,j} = 1$, 初始条件为 $\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k,0}^i = \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k,0}^i$ 和 $\mathbf{Y}_{k|k,0}^i = \mathbf{Y}_{k|k,0}^i$.

当 $\pi^{i,j}$ 构成的权重矩阵 Π 为双随机矩阵时, 式(20)随着迭代次数 l 的增大渐近收敛到信息矩阵和信息向量全局平均值, 即

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k}^* = \lim_{l \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k,l}^i = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k,0}^i}{N}, \quad (21)$$

$$\mathbf{Y}_{k|k}^* = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_{k|k,l}^i = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{Y}_{k|k,0}^i}{N}, \quad (22)$$

进而, 通过信息一致性算法得到的状态估计为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^0 = (\mathbf{Y}_{k|k}^*)^{-1} \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k}^*, \quad (23)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^0$ 表示一致性算法得到的全局状态估计向量.

注 1 在分布式容积信息一致性滤波算法 (distributed cubature information consensus filter, DCIF) 一致性估计过程中, 由于缺失互协方差阵信息, 从式(23)可以看出, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, 每个传感器节点的状态估计和信息矩阵收敛到最优集中式极大后验估计 (MAP)^[22]. 在正态分布假设下, 极大后验估计等价于忽略互协方差阵的次优线性无偏最小方差估计^[23].

加权平均一致性取决于传感器网络的拓扑结构. 当传感器节点的个数越多, 达到一致性所需要的迭代次数可能越多^[24]. 定理1中的一致性权重矩阵 Π 为非负双随机矩阵, 加权系数 $\Pi^{i,j}$ 为 Π 的第 (i, j) 元素, Π^l 为权重矩阵 Π 的 l 次方, 随着 l 的增加, Π^l 的每个元素都将趋近于 $1/N$.

收敛到次优线性最小方差估计的容积信息一致性滤波算法的主要缺点是在一致性迭代过程中, 节点之间需要传输误差方差阵数据. 当系统维数过高时, 这极大的增加了通信成本. 为了减少通信成本, 便于实时应用, 本文基于 DCIF 框架, 用信息矩阵的迹来代替信息矩阵进行一致性迭代, 提出了基于信息矩阵迹的容积信息一致性滤波 (TDCIF) 算法, 并证明了该算法的一致性.

4.2 基于信息矩阵迹的分布式容积信息一致性滤波 (TDCIF) 算法

引理 1^[25] 设 $\hat{\boldsymbol{x}}_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, N$) 为随机变量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 的 N 个无偏估计, 记估计误差为 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}_i$, 相应的误差方差矩阵为 $\mathbf{P}_i = \mathbf{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\text{T}}]$, 忽略估计误差, 即 $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_i \tilde{\boldsymbol{x}}_j^{\text{T}}] = 0$ ($i \neq j$), 则按标量加权次优线性最小方差最优融合估计为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0 = \rho \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\text{tr}(\boldsymbol{P}_i)} \hat{\boldsymbol{x}}_i \right), \quad (24)$$

$$\rho = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\text{tr}(\boldsymbol{P}_i)} \right)^{-1}, \quad (25)$$

相应的最小方差阵为

$$\boldsymbol{P}_0 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho}{\text{tr}(\boldsymbol{P}_i)} \right)^2 \boldsymbol{P}_i, \quad (26)$$

且有关系

$$\text{tr} \boldsymbol{P}_0 \leq \text{tr} \boldsymbol{P}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (27)$$

注 2 引理1中的次优融合算法是忽略互协方差的线性无偏最小方差(linear unbiased minimum variance, LUMV)意义上的,可用于任何多传感器估计系统,包括线性估计和非线性估计.次优标量线性最小方差融合估计精度低于次优线性最小方差融合估计.因此,所提出的收敛到标量次优线性最小方差融合估计的TDCIF算法的估计精度要低于收敛到次优线性最小方差融合估计的DCIF算法.

定理 2 给出 $(\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k}^i, \boldsymbol{Y}_{k|k}^i)$, $i \in N$ 形式的信息对,定义如下形式的信息对 $(\boldsymbol{a}_{k|k,0}^i, \boldsymbol{\beta}_{k|k,0}^i)$,其中:

$$\boldsymbol{a}_{k|k,0}^i = \frac{1}{\text{tr}((\boldsymbol{Y}_{k|k}^i)^{-1})}, \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{k|k,0}^i = \boldsymbol{\alpha}_{k|k,0}^i (\boldsymbol{Y}_{k|k}^i)^{-1} \hat{\boldsymbol{y}}_k^i = \boldsymbol{\alpha}_{k|k,0}^i \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^i, \quad (29)$$

且信息对 $(\boldsymbol{a}_{k|k,0}^i, \boldsymbol{\beta}_{k|k,0}^i)$ 满足

$$\boldsymbol{\beta}_{k|k,l+1}^i = \pi^{i,i} \boldsymbol{\beta}_{k|k,l}^i + \sum_{j \in N} \pi^{i,j} \boldsymbol{\beta}_{k|k,l}^j, \quad (30)$$

$$\boldsymbol{a}_{k|k,l+1}^i = \pi^{i,i} \boldsymbol{a}_{k|k,l}^i + \sum_{j \in N} \pi^{i,j} \boldsymbol{a}_{k|k,l}^j. \quad (31)$$

当 $l \rightarrow \infty$ 时,状态估计收敛到引理1中的次优标量加权线性最小方差估计

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^0 = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\text{tr}(\boldsymbol{P}_{k|k}^i)} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\text{tr}(\boldsymbol{P}_{k|k}^i)} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^i \right). \quad (32)$$

证 对于式(30)的迭代过程可以写为如下更直观的扩维矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{k|k,l+1}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{k|k,l+1}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi^{1,1} & \dots & \pi^{N,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi^{N,1} & \dots & \pi^{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{k|k,l}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{k|k,l}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi^{1,1} & \dots & \pi^{N,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi^{N,1} & \dots & \pi^{N,N} \end{bmatrix}^l \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{k|k,0}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{k|k,0}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_l^{1,1} & \dots & \pi_l^{N,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_l^{N,1} & \dots & \pi_l^{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{k|k,0}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{k|k,0}^N \end{bmatrix}, \quad (33)$$

式(31)的迭代与式(30)类似,用 $\boldsymbol{\beta}_{k|k,0}^i = \boldsymbol{\alpha}_{k|k,0}^i \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^i$ 代替 $\boldsymbol{\beta}_{k|k,0}^i$,则迭代过程可以写为

$$\boldsymbol{\alpha}_{k|k,l}^i = \sum_{j=1}^N \pi_l^{i,j} \boldsymbol{\alpha}_{k|k,0}^j, \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{k|k,l}^i \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^0 = \sum_{j=1}^N \pi_l^{i,j} \boldsymbol{\alpha}_{k|k,0}^j \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^j, \quad (35)$$

其中 $\pi_l^{i,j}$ 为权重矩阵 $\boldsymbol{\Pi}^l$ 的第 (i,j) 个元素.将式(34)–(35)合并后得到

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^0 = (\boldsymbol{\alpha}_{k|k,l}^i)^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{k|k,l}^i \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^i = \left(\sum_{j=1}^N \pi_l^{i,j} \boldsymbol{\alpha}_{k|k,0}^j \right)^{-1} \sum_{j=1}^N \pi_l^{i,j} \boldsymbol{\alpha}_{k|k,0}^j \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^j, \quad (36)$$

当 $l \rightarrow \infty$ 时, $\pi_l^{i,j} \rightarrow 1/N$, 则

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^0 = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \boldsymbol{\alpha}_{k|k,0}^i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \boldsymbol{\alpha}_{k|k,0}^i \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^i = \left(\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\alpha}_{k|k,0}^i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\alpha}_{k|k,0}^i \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^i. \quad (37)$$

根据式(28)有

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^0 &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\text{tr}((\boldsymbol{Y}_{k|k}^i)^{-1})} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\text{tr}((\boldsymbol{Y}_{k|k}^i)^{-1})} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^i \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\text{tr}(\boldsymbol{P}_{k|k}^i)} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\text{tr}(\boldsymbol{P}_{k|k}^i)} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^i \right), \end{aligned} \quad (38)$$

该形式与引理1中一致. 证毕.

对于共识权重矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$,可以通过Metropolis权重计算得到,该方法可以确保矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$ 是非负且双随机性的^[26].Metropolis权重是目前应用比较广泛的一致性权值选取方法,根据各节点的连通度选取节点之间的一致性权值.

Metropolis权重的计算方式如下:

$$\pi^{i,j} = \begin{cases} 0, & (i,j) \notin E, \\ \min \left\{ \frac{1}{1+|N|}, \frac{1}{1+|N_j|} \right\}, & (i,j) \in E, i \neq j, \\ 1 - \sum_{j \in N} \pi^{i,j}, & i = j. \end{cases} \quad (39)$$

通过选择Metropolis权重矩阵并利用CIF算法以及定理2,提出算法2(见表1).

注 3 关于算法2,一致性迭代过程中传感器之间传输的是信息矩阵的迹 $\boldsymbol{a}_{k|k,l}^i$ 以及相应的信息向量 $\boldsymbol{\beta}_{k|k,l}^i$,相比于DCIF算法,TDCIF算法传输的数据量更少,传感器网络的通信负担更小,这在实际应用中,尤其是大规模传感器网络中非常重要.需要说明的是,算法2给出的是多传感器在估计误差无关情形($\boldsymbol{P}_{ij} = 0, i \neq j$)下的标量加权线性最小方差融合估计,因此,TDCIF算法是全局次优的,且融合精度低于定理1中一致性融合估计算法.

4.3 算法时间复杂度分析

本节将深入分析TDCIF与DCIF算法的时间复杂度,如表2所示.TDCIF与DCIF算法的主要差异在于一致性迭代过程.对于信息向量 $\boldsymbol{\beta}_{k|k}^i$ 的传输及处理,

两者并无本质区别, 故仅以信息矩阵 $\mathbf{Y}_{k|k}^i$ 为研究对象. DCIF算法中, 节点需传输信息矩阵给邻居节点并接收邻居节点的信息矩阵, 而TDCIF算法先计算信息标量 $\alpha_{k|k}^i$ 后再与邻居交换信息标量. 在融合阶段, DCIF算法需处理所有邻居及自身的信息矩阵, 而TDCIF算法只需处理信息标量. 经过 L 次迭代后, DCIF算法需要通过式(18)求得一致性估计, 涉及信息矩阵的逆矩阵, 而TDCIF算法不需要.

表1 算法2: 基于信息矩阵迹的分布式容积信息一致性滤波算法(TDCIF)

Table 1 Algorithm 2: Information matrix trace-based distributed cubature information consensus filter (TDCIF)

1	根据式(5)–(9)进行预测步骤, 得到预测信息矩阵 $\mathbf{Y}_{k k-1}^i$ 和预测信息向量 $\hat{\mathbf{y}}_{k k-1}^i$.
2	收集每个传感器节点 i 处的所有测量值 \mathbf{z}_k^i , 通过式(16)–(17)计算得到信息矩阵 $\mathbf{Y}_{k k}^i$ 和信息向量 $\hat{\mathbf{y}}_{k k}^i$.
3	通过式(28)–(29)计算得到初始化信息标量 $\alpha_{k k,0}^i$ 和信息向量 $\beta_{k k,0}^i$.
4	根据以下过程, 实现一致性迭代.
For $l = 1 : L$ do	
	通过式(30)–(31)计算得到一次迭代后的信息标量 $\alpha_{k k,l+1}^i$ 和信息向量 $\beta_{k k,l+1}^i$.
end	
5	得到一致性状态估计
	$\hat{\mathbf{x}}_{k k}^0 = (\mathbf{a}_{k k,L}^i)^{-1} \beta_{k k,L}^i$.

表2 时间复杂度对比表

Table 2 Time complexity comparison table

算法	一次迭代时间复杂度	L 次迭代时间复杂度
DCIF	$O(\max\{n^3, N\})$	$O(\max\{n^3, LN\})$
TDCIF	$O(\max\{n^3, n^2N\})$	$O(\max\{n^3, Ln^2N\})$

通过表2可以看出, 相比于DCIF算法, TDCIF算法的时间复杂度显然更低, 更适用于实时性要求较高的系统. 并且在信息传输时, TDCIF算法传输的是标量形式的信息, 传输的信息量更少, 在面对干扰时, 延时和丢包的可能性更小, 这无疑增强了系统的鲁棒性.

5 仿真分析

考虑一个平面目标跟踪系统, 系统的状态空间模型^[27]为

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega} & 0 & -\left(\frac{1 - \cos(\Omega T)}{\Omega}\right) & 0 \\ 0 & \cos(\Omega T) & 0 & -\sin(\Omega T) & 0 \\ 0 & \frac{1 - \cos(\Omega T)}{\Omega} & 1 & \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega} & 0 \\ 0 & \sin(\Omega T) & 0 & \cos(\Omega T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (40)$$

其中: 系统状态 $\mathbf{x}_k = [x_k \ \dot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k \ \Omega]^T$, x_k 和 y_k 分别为 x 方向和 y 方向上的位置, \dot{x}_k 和 \dot{y}_k 分别为 x 方向和 y 方向上的速度, Ω 为转弯率, 扫描时刻 $T = 1$ s. 传感器网络共有10个节点, 且每个节点都具有局部估计功能, 其坐标如表3所示, 连接如图1所示. 每个节点的观测方程为

$$\mathbf{z}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_k - x_{0i})^2 + (y_k - y_{0i})^2} \\ \arctan((y_k - y_{0i})/(x_k - x_{0i})) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 10. \quad (41)$$

表3 10传感器节点的位置

Table 3 10 position of the sensor nodes

节点	坐标	节点	坐标
1	(8.3, 8.2)	2	(2.8, 6.7)
3	(5.8, 6.7)	4	(8.2, 5.7)
5	(3.9, 4.7)	6	(0.6, 3.1)
7	(1.9, 1.6)	8	(4.4, 1.4)
9	(5.8, 1.3)	10	(9.4, 2.0)

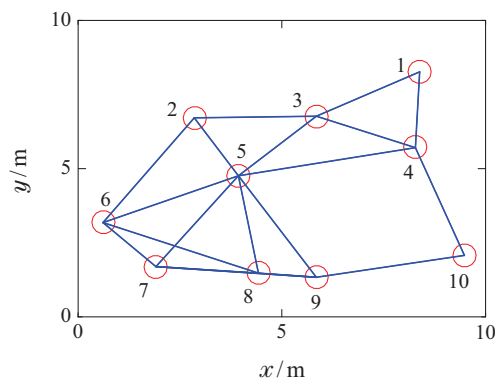


图1 传感器网络连接图

Fig. 1 Sensor network connection diagram

所提出的滤波算法的性能指标为位置的累计均方误差(accumulation mean square error, AMSE), 对于第 k 时刻传感器节点 i 的AMSE可以表示为

$$\text{AMSE}_k = \sum_{t=1}^k \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M ((x_t^i - \hat{x}_t^i)^2 + (y_t^i - \hat{y}_t^i)^2), \quad (42)$$

其中: $M = 500$ 为蒙特卡罗实验次数, (x_k^i, y_k^i) 和 $(\hat{x}_k^i, \hat{y}_k^i)$ 分别表示目标在二维坐标平面中的真实位置和估计位置. 非线性系统的初始状态 $\mathbf{x}_0 = [5 \text{ m} \ 1 \text{ m/s} \ 5 \text{ m} \ 1 \text{ m/s} \ -0.01 \text{ m rad/s}]$, 初始协方差 $P_0 = \mathbf{I}_5$, 过程噪声的方差为 $\mathbf{Q}_k = \text{diag}\{0.2 \text{ m}^2, 0.1^2 \text{ m}^2/\text{s}^2, 0.2 \text{ m}^2, 0.1^2 \text{ m}^2/\text{s}^2, 0.003^2 \text{ m rad}^2/\text{s}^2\}$, 10个传感器的观测噪声 $v_k^{(i)}$ 的方差为 $\mathbf{R}^{(i)} = \text{diag}\{(0.3 + 0.02(i-1))^2 \text{ m}^2, (7 + 0.5(i-1))10^{-4} \text{ m} \cdot \text{rad}^2\}$. 图2显示了各种跟踪算法跟踪轨迹, 其中: TDCIF为本文所提出基于信息矩阵迹的分布式容积信息一致性滤波算法, 集中式融合容积滤波算法(centralized fusion cubature Kalman

filter, C-CKF)为集中式融合容积滤波算法, DCIF为经典的分布式容积信息一致性滤波算法, DCMF(distributed cubature measurement consensus filtering algorithm)为分布式容积测量一致性滤波算法, CIF为容积信息滤波算法, FCI(fast covariance intersection fusion)为快速协方差交叉融合算法. 跟踪曲线验证了这几种融合估计算法的有效性. 图3表示了在一致性迭代次数 $L = 20$ 时 TDCIF, DCIF, DCMF, C-CKF, CIF, FCI, 线性最小方差融合估计(LUMV)以及次优标量线性最小方差融合估计(suboptimal LUMV, SLUMV)的RMSE对比图. 图4-5分别表示了迭代次数 $L = 6$ 和 $L = 20$ 时的AMSE对比图. 从图4可以看出, 所提出的TDCIF算法的估计精度略低于DCIF算法, 验证了注3的结论. 并且在迭代次数很少时, DCMF算法的精度低于DCIF算法. 结合图4-5可以看出, TDCIF算法随着迭代次数从6次增加到20次, AMSE曲线逐渐接近次优标量线性最小方差融合的AMSE曲线, 这验证了定理2的正确性.

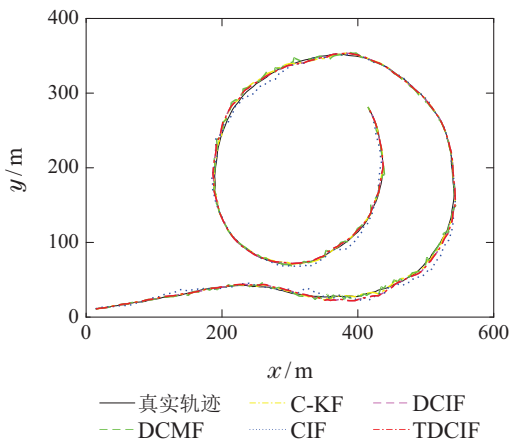


图2 真实轨迹, C-CKF, DCIF, DCMF, CIF和TDCIF跟踪轨迹曲线
Fig. 2 Real trajectory and tracking curves of C-CKF, DCIF, DCMF, CIF, TDCIF

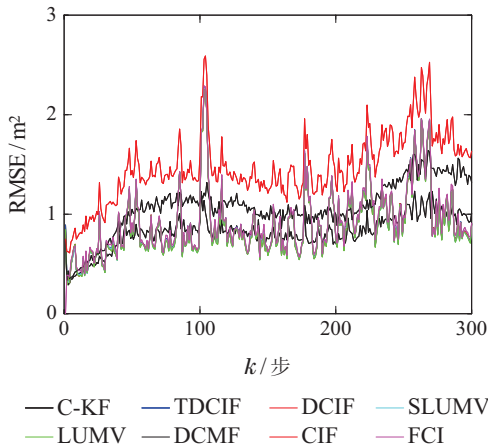


图3 $L = 20$ 时, C-CKF, TDCIF, DCIF, SLUMV, LUMV, DCMF, CIF, FCI的RMSE曲线
Fig. 3 RMSEs of C-CKF, TDCIF, DCIF, SLUMV, LUMV, DCMF, CIF, FCI when $L = 20$

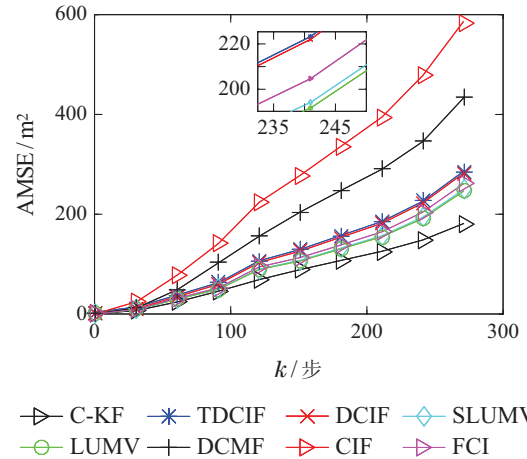


图4 $L = 6$ 时, C-CKF, TDCIF, DCIF, SLUMV, LUMV, DCMF, CIF, FCI的AMSE曲线
Fig. 4 AMSEs of C-CKF, TDCIF, DCIF, SLUMV, LUMV, DCMF, CIF, FCI when $L = 6$

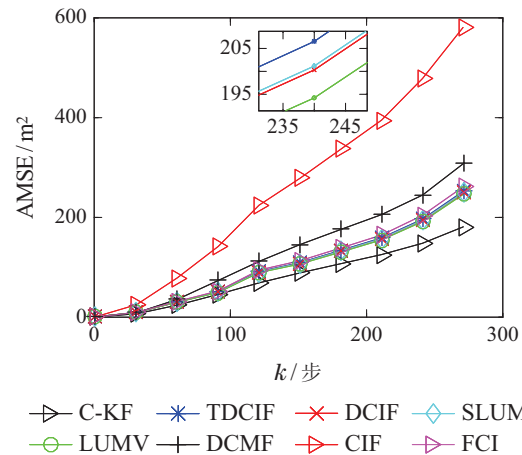


图5 $L = 20$ 时, C-CKF, TDCIF, DCIF, SLUMV, LUMV, DCMF, CIF, FCI的AMSE曲线
Fig. 5 AMSEs of C-CKF, TDCIF, DCIF, SLUMV, LUMV, DCMF, CIF, FCI when $L = 20$

6 结论

对于非线性的分布式无线传感器网络系统, 提出了基于信息矩阵迹的分布式容积信息一致性滤波算法(TDCIF), 相比于传统的DCIF算法, 该算法有效的减少了传感器节点间传输的数据量, 提高了系统的实时性和鲁棒性. 证明了所提出的TDCIF算法收敛到次优标量线性最小方差融合估计, 并最终能达成一致估计. 该算法极大减少了数据通信量, 在高维度系统, 传感器数量多, 非线性度更高的场合优势明显.

参考文献:

[1] ABDULKAREM M, SAMSUDIN K, ROKHANI F Z. Wireless sensor network for structural health monitoring: A contemporary review of technologies, challenges, and future direction. *Structural Health Monitoring*, 2019, 19(3): 693 - 735.

- [2] TIAN X, LEE P M, TAN Y J. Wireless body sensor networks based on metamaterial textiles. *Nature Electronics*, 2019, 2(6): 243 – 251.
- [3] QU Z, ZHAO X, XU H. An improved Q-learning-based sensor-scheduling algorithm for multi-target tracking. *Sensors*, 2022, 22(18): 6972.
- [4] LIU J, CHEN F, FENG M. Diffusion distributed quantized state estimation with variable bandwidth. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, 58(1): 406 – 419.
- [5] YANG H, LI H, XIA Y. Distributed Kalman filtering over sensor networks with transmission delays. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(11): 5511 – 5521.
- [6] SABER R O, MURRAY R M. Consensus protocols for networks of dynamic agents. *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Denver, Colorado, USA: IEEE, 2003: 951 – 956.
- [7] OLFATI-SABER R. Distributed Kalman filter with embedded consensus filters. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 8179 – 8184.
- [8] LIU Chunyu, SUN Shuli. Design of a distributed Kalman consistent filtering algorithm based on event trigger. *Journal of Air Force Engineering University*, 2021, 22(3): 89 – 95.
(刘春玉, 孙书利. 一种基于事件触发的分布式卡尔曼一致性滤波算法设计. *空军工程大学学报*, 2021, 22(3): 89 – 95.)
- [9] HLINKA O, HLAWATSCH F. Likelihood consensus and its application to distributed particle filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(8): 4334 – 4349.
- [10] KAMGARPOUR M, TOMLIN C. Convergence properties of a decentralized Kalman filter. *The 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Firenze, Italy: IEEE, 2008: 1995 – 2000.
- [11] QIAN J, DUAN P, DUAN Z. Consensus-based distributed filtering with fusion step analysis. *Automatica*, 2022, 142: 110408.
- [12] BATTISTELLI G, CHISCI L. Kullback-Leibler average, consensus on probability densities, and distributed state estimation with guaranteed stability. *Automatica*, 2014, 50(3): 707 – 718.
- [13] LONG H, QU Z, FAN X. Distributed extended Kalman filter based on consensus filter for wireless sensor network. *The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Beijing, China: IEEE, 2012: 4315 – 4319.
- [14] CHEN H, WANG J N, WANG C Y. Composite weighted average consensus filtering for space object tracking. *Acta Astronautica*, 2020, 168: 69 – 79.
- [15] LI W, WEI G, HAN F. Weighted average consensus-based unscented Kalman filtering. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 46(2): 558 – 567.
- [16] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1254 – 1269.
- [17] KHODAPARAST J. A review of dynamic phasor estimation by nonlinear Kalman filters. *IEEE Access*, 2022, 10: 11090 – 11109.
- [18] CHEN Q, WANG W, YIN C. Distributed cubature information filtering based on weighted average consensus. *Neurocomputing*, 2017, 243: 115 – 124.
- [19] LIU J, LIU Y, DONG K. Distributed hybrid consensus-based square-root cubature quadrature information filter and its application to maneuvering target tracking. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2019, 15(12): 1550147719895952.
- [20] DONG P, JING Z L, LEUNG H. Robust consensus nonlinear information filter for distributed sensor networks with measurement outliers. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(10): 3731 – 3743.
- [21] PAKKI K, CHANDRA B, GU D W. Cubature information filter and its applications. *The American Control Conference*. San Francisco, CA, USA: IEEE, 2011: 3609 – 3614.
- [22] KAMAL A T, FARRELL J A, ROY-CHOWDHURY A K. Information weighted consensus. *The 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Maui, HI, USA: IEEE, 2012: 2732 – 2737.
- [23] XU Ningshou. *Random Signal Estimation and System Control*. Beijing: Beijing University of Technology Press, 2001.
(徐宁寿. 随机信号估计与系统控制. 北京: 北京工业大学出版社, 2001.)
- [24] LI W, WANG Z, WEI G. A survey on multisensor fusion and consensus filtering for sensor networks. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2015, DOI: 10.1155/2015/683701.
- [25] DENG Zili, QI Rongbin. Multi-sensor information fusion suboptimal steady-state Kalman filter. *Chinese Academic Journal Abstracts (Science and Technology Letters)*. 2000, 6(2): 183 – 184.
(邓自立, 祁荣宾. 多传感器信息融合次优稳态Kalman滤波器. 中国学术期刊文摘(科技快报), 2000, 6(2): 183 – 184.)
- [26] XIAO L, BOYD S, LALL S. A scheme for robust distributed sensor fusion based on average consensus. *IPSN 2005 4th International Symposium on Information Processing in Sensor Networks*. Boise, ID, USA: IEEE, 2005: 63 – 70.
- [27] HAO G, SUN S. Distributed fusion cubature Kalman filters for nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(17): 5979 – 5991.

作者简介:

王迪 硕士研究生, 主要从事状态估计、多传感器信息融合等方向的研究, E-mail: dai.tu_5018@163.com;

郝钢 教授, 硕士生导师, 主要从事状态估计、信息融合、人工智能等方向的研究, E-mail: haogang@hlju.edu.cn.