

# 融合Steffensen加速迭代与无模型自适应终端滑模的 双轴进给伺服系统轮廓控制

黄亮, 黄华, 赵秋舸, 梅乐

(兰州理工大学 机电工程学院, 甘肃 兰州 730050)

**摘要:** 针对双轴进给伺服系统在跟踪非线性轨迹时, 由于系统负载变化和轮廓误差难以快速、准确地估计, 进而影响加工精度的问题, 提出一种Steffensen加速迭代的轮廓误差估计(CEE)方法和一种无模型自适应离散终端滑模控制(MFA-DTSMC)的轮廓误差控制(CEC)方法. 首先, 考虑系统中存在的不确定动态的影响, 将不依赖系统模型精度的无模型自适应控制(MFAC)与离散终端滑模控制(DTSMC)结合, 同时采用基于最小化代价函数的在线干扰估计算法, 提出一种新的带有干扰补偿的MFA-DTSMC单轴控制器. 进一步地, 为提升双轴进给伺服系统的轮廓性能, 设计了Steffensen加速迭代的CEE方法. 实验结果表明, 与现有的CEE方法相比, Steffensen加速迭代方法能够提高轮廓误差估计准确率和实时性, 所提控制方法可以克服系统不确定动态的影响, 能够准确跟踪期望轮廓曲线, 提高轮廓加工精度.

**关键词:** 双轴进给伺服系统; 轮廓误差; Steffensen加速迭代; 无模型自适应控制; 离散终端滑模控制

**引用格式:** 黄亮, 黄华, 赵秋舸, 等. 融合Steffensen加速迭代与无模型自适应终端滑模的双轴进给伺服系统轮廓控制. 控制理论与应用, 2026, 43(3): 571 – 584

DOI: 10.7641/CTA.2024.30678

## Contour control of a two-axis feed servo system incorporating Steffensen accelerated iteration and model-free adaptive terminal sliding mode

HUANG Liang, HUANG Hua, ZHAO Qiu-ge, MEI Le

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu 730050, China)

**Abstract:** System load changes and the contouring error are difficult to estimate quickly and accurately, which affects the machining accuracy when the two-axis feed servo system is tracking the nonlinear trajectories. To address the problem, Steffensen accelerated iteration, a contouring error estimation (CEE) method is proposed. In addition, model-free adaptive discrete terminal sliding mode control (MFA-DTSMC), a contouring error control (CEC) method is presented. Firstly, considering the influence of the uncertainty dynamics existing in the system, model-free adaptive control (MFAC), which does not depend on the accuracy of the system model, is combined with discrete terminal sliding mode control (DTSMC). At the same time, based on minimization cost function online disturbance estimation algorithm, a new MFA-DTSMC single-axis controller with disturbance compensation is proposed. Further, to improve the contouring performance of the two-axis feed servo system, a CEE method based on Steffensen accelerated iteration method is designed. Finally, the experimental results show that Steffensen accelerated iteration method is able to reduce the computation time and improve the real-time performance compared with the existing CEE methods. The proposed control method can overcome the influence of system uncertainty dynamics and track the desired contour curve accurately as well as improve the contouring accuracy.

**Key words:** two-axis feed servo system; contouring error; Steffensen acceleration iteration; model-free adaptive control; discrete terminal sliding mode control

**Citation:** HUANG Liang, HUANG Hua, ZHAO Qiuge, et al. Contour control of a two-axis feed servo system incorporating Steffensen accelerated iteration and model-free adaptive terminal sliding mode. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(3): 571 – 584

收稿日期: 2023-10-13; 录用日期: 2024-11-20.

†通信作者. E-mail: hh318872@126.com; Tel.: +86 18893113118.

本文责任编辑: 刘允刚.

国家自然科学基金项目(52365057), 甘肃省科技重大专项项目(23ZDGE002), 温州市科技计划项目(G2023045)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (52365057), the Gansu Provincial Science and Technology Major Project (23ZDGE002) and the Wenzhou Science and Technology Program (G2023045).

## 1 引言

双轴进给伺服系统是高档数控机床的主要运动部件,具有响应速度快、可靠性强、精度高等优点<sup>[1]</sup>.在实际加工中,轮廓误差被定义为实际位置与参考轨迹之间的最短距离,是评价加工质量的关键指标.因此,轮廓误差的精确控制是双轴进给伺服系统的一项重要任务<sup>[2]</sup>.目前,进给伺服系统的跟踪滞后和不同轴之间的动态不兼容是产生轮廓误差的两个关键因素<sup>[3-4]</sup>,通过先进的跟踪控制器单独地减小每个轴的跟踪误差并不能保证轮廓误差的减小,并且轮廓误差无法像跟踪误差那样通过理论位置与实际位置的差值直接计算得到.因此,为了减小轮廓误差、提高加工精度,需要设计合适的轮廓误差控制(contouring error control, CEC)方法和建立精确的轮廓误差估计(contouring error estimation, CEE)模型.

根据以往对CEC的研究,可以将现有的CEC方法分为3种类型,即通过先进跟踪控制方法<sup>[5]</sup>来提高轮廓精度、通过多轴协调机制<sup>[6]</sup>生成额外的控制信号、通过轨迹预补偿<sup>[7]</sup>修改参考轨迹.在第1类中,众多学者通过设计高精度的跟踪误差控制器以提升每个轴的跟踪效果,进而间接地减小轮廓误差,提出了各种先进的控制算法,如滑模控制(sliding mode control, SMC)<sup>[8]</sup>、鲁棒控制<sup>[9]</sup>、自适应控制<sup>[10]</sup>等,以及一些干扰抑制方法来克服负载变化的影响<sup>[11]</sup>.但由于参考轮廓沿法线方向的运动学特性和各个轴响应的不同,简单地减少跟踪误差并不能保证轮廓控制性能的提高,需要精心设计先进的协调机制.根据以往的研究,现有的协调机制主要分为两类,即交叉耦合控制(cross-coupled control, CCC)方法<sup>[6]</sup>和任务坐标框架(task coordinate framework, TCF)方法<sup>[12]</sup>.Koren首先提出了一种经典而有效的轮廓误差控制方法,即CCC.后来,基于CCC方法,提出了许多先进的CEC方法,如双层CCC<sup>[13]</sup>、迭代学习CCC<sup>[14]</sup>,已成功应用于机床等高精度设备.然而,CCC的前提是参考轨迹可以用线性轮廓很好地局部逼近,这显然不适用于大曲率轨迹的轮廓控制.为了解决这一问题,拓宽轮廓控制的应用范围,Chiu<sup>[15]</sup>提出了一种TCF,通过将进给伺服系统动力学转化为TCF,实现了切向和法向控制律的设计.基于TCF,Wang等<sup>[16]</sup>开发了一个精确任务坐标系(accurate task coordinate frame, ATCF),其中的轮廓误差和相关的跟踪误差可以很容易地解耦.为了避免过度依赖协调机制来减少轮廓误差,另一种方法,称为预补偿,通过修改参考轨迹来补偿轮廓误差,也引起了许多学者的广泛关注<sup>[17-18]</sup>.基于模型预测控制(model predictive control, MPC),Yang等<sup>[19]</sup>建立了一种通过修改参考位置来预补偿进给伺服系统轮廓误差的改进方法.Dai等<sup>[20]</sup>通过将机床的实际动态模型解耦为标称分量和误差分量,提出了一种时滞滑模控制器,

减少了受摩擦和模型误差影响的机床的轮廓误差.金鸿雁等<sup>[21]</sup>提出一种基于摩擦补偿的自适应非线性滑模轮廓控制方法,能够协调轮廓误差与系统响应速度的关系,显著减小了轮廓误差.但是,MPC和SMC对模型的精度有很高的要求.随着数据驱动控制方法的出现,曾子强等<sup>[22]</sup>将多入多出无模型自适应控制(model-free adaptive control, MFAC)与CCC应用到双轴直线电机中,有效地减小了轮廓误差,但是没有考虑外界负载变化对轮廓误差的影响.

对于CEE,基于几何关系的估计方法是最常用的<sup>[23]</sup>,其中轮廓误差近似为沿法线方向的跟踪误差的分量,仅通过少量的运动状态信息来确定轮廓误差是该方法的一个显著优势.然而在某些极端情况下,如大曲率和尖角处轮廓估计精度将会显著下降.为了解决上述问题,研究人员还提出了一些其他的估计方法,如基于曲率圆的迭代估计方法<sup>[24]</sup>、逐点比较法<sup>[25]</sup>、牛顿迭代方法<sup>[26]</sup>.一般来说,这些方法的估计精度可以得到提高,但计算负担也会相应增加.即使在后续的研究<sup>[27]</sup>中对迭代算法进行了适当的简化,其仍然不能有效地平衡估计精度和计算效率.Steffensen加速迭代方法<sup>[28]</sup>与牛顿迭代、简化牛顿迭代虽然都是求解非线性方程解的重要方法,但是Steffensen加速迭代方法具有更快的求解速度,能够节约计算资源.目前,使用Steffensen加速迭代方法求解轮廓误差尚未见报道.

针对目前已有的CEC方法严重依赖被控对象的数学模型和CEE方法不能平衡轮廓误差估计精度和速度的问题,本文将不依赖系统模型精度的MFAC与离散终端滑模控制(discrete terminal SMC, DTSMC)结合,提出了带有干扰估计和补偿的MFA-DTSMC策略.此外,为了有效地平衡轮廓误差估计精度和计算效率,提出了一种基于Steffensen加速算法的在线迭代方法,该方法相比传统的估计方法具有更快的迭代搜索速度,能够满足轮廓误差估计的实时性要求.首先,通过双轴进给伺服系统的实际位置、速度和期望位置快速、准确地估计出轮廓误差,然后将轮廓误差分别补偿到X,Y轴,进一步减小轮廓误差.通过实验验证了该控制策略可以提升双轴进给伺服系统在复杂轮廓下的跟踪精度,为实现高性能数控装备的精密轮廓加工要求提供了依据.

## 2 带有扰动的进给伺服系统

本文采用进给伺服系统广泛使用的刚体动力学模型<sup>[29-30]</sup>,其中机械系统被描述为一个二阶系统,将高阶柔性模态以及摩擦力、测量噪声等扰动视为总扰动.单轴进给伺服系统机械部分传递函数为

$$y = \frac{K_a K_t r_g}{J s^2 + B s} (u + d), \quad (1)$$

其中: $y$ 表示实际位置; $K_a$ 、 $K_t$ 和 $r_g$ 分别是进给伺服系

统的电流放大因子、扭矩放大因子和滚珠丝杠传动比;  $u$ 表示电压控制信号;  $d$ 表示外部干扰;  $J$ 和 $B$ 分别是进给伺服系统的等效转动惯量和等效粘性阻尼系数;  $s$ 是拉普拉斯运算符. 将式(1)采用前向差分法进行离散化可得

$$y(k+2) = \left(2 - \frac{BT}{J}\right)y(k+1) + \left(\frac{BT}{J} - 1\right)y(k) + \frac{T^2 K_a K_t r_g}{J}(u(k) + d(k)), \quad (2)$$

其中 $T$ 为离散化采样时间. 实际应用中, 由比例比例积分 (proportion proportion intergal, PPI) 控制器控制的进给伺服系统方框图如图1所示. 其中:  $y_d$ 为参考位置;  $K_p$ ,  $K_v$ 和 $T_v$ 分别是PPI控制器的位置环增益、速

度环增益和积分时间常数.

实际上, 无论采用哪种模型, 建模误差都是不可避免的. 因此, 本节为进给伺服系统设计了不依赖于系统模型精度的MFA-DTSMC控制策略, 以实现轮廓误差的精确控制. 由MFA-DTSMC控制的进给伺服系统方框图如图2所示.

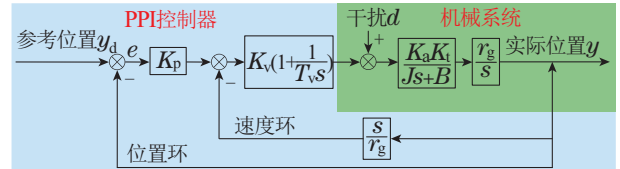


图 1 由PPI控制的进给伺服系统方框图

Fig. 1 Block diagram of a feed servo system controlled by PPI

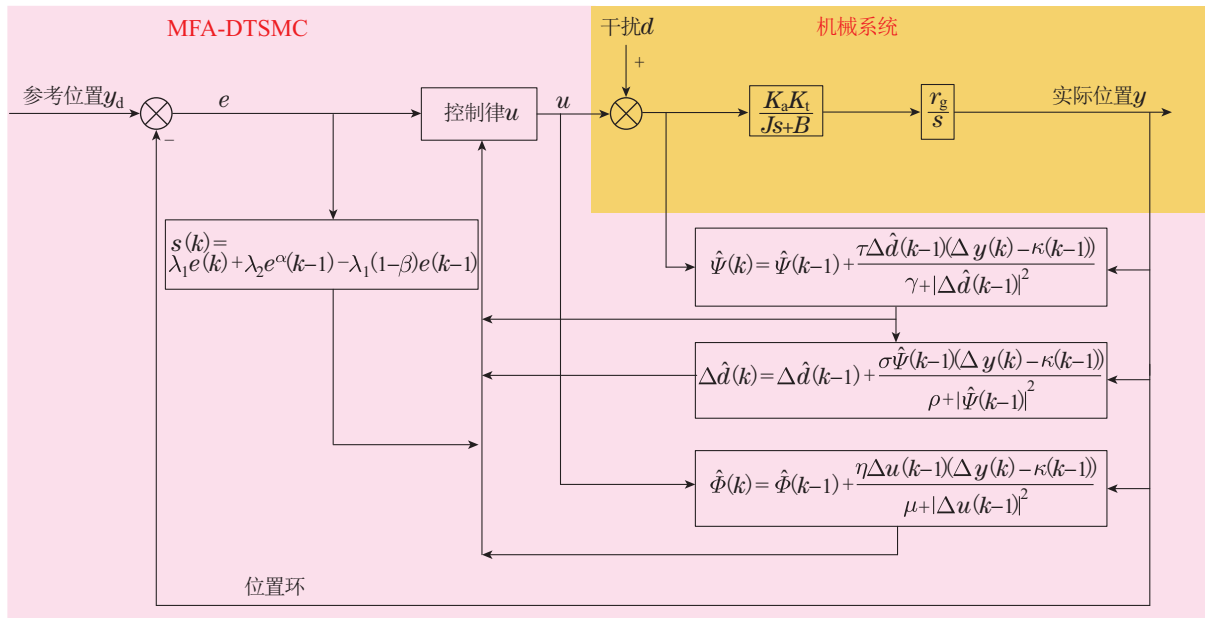


图 2 由MFA-DTSMC控制的进给伺服系统方框图

Fig. 2 Block diagram of feed servo system controlled by MFA-DTSMC

### 3 无模型自适应离散终端滑模控制

#### 3.1 进给伺服系统动态线性化模型

由于进给伺服系统是一个复杂的非线性系统, 具有多变量、时变参数和未知的负载扰动, 它可以表示为带有扰动输入的一般非线性系统, 即

$$y(k+1) = f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k), u(k-1), \dots, u(k-n_u), \dots, d(k), d(k-1), d(k-n_d)), \quad (3)$$

其中:  $y(k+1)$ ,  $u(k)$ 分别是系统 $k+1$ 时刻的位置输出和 $k$ 时刻的电压输入信号;  $d(k)$ 表示系统总扰动;  $n_y$ ,  $n_u$ 和 $n_d$ 是3个未知整数;  $f(\cdot)$ 是未知的非线性函数. 对系统(3)作如下假设:

**假设 1**  $f(\cdot)$ 关于电压输入信号 $u(k)$ 和未知扰动 $d(k)$ 的偏导数是连续的.

**假设 2** 将非线性系统(3)的利普希茨(Lipschitz)推广到 $d(k)$ 和 $u(k)$ , 即对任意的 $k$ 和电压输入信号 $|\Delta u(k)| \neq 0$ 、外部干扰 $|\Delta d(k)| \neq 0$ , 有 $|\Delta y(k+1)| \leq \Upsilon_1 |\Delta d(k)|$ ,  $|\Delta y(k+1)| \leq \Upsilon_2 |\Delta u(k)|$ , 其中:  $\Delta y(k+1) = y(k+1) - y(k)$ ,  $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ ,  $\Delta d(k) = d(k) - d(k-1)$ ,  $\Upsilon_1$ 和 $\Upsilon_2$ 是正常数.

**假设 3** 扰动 $d(k)$ 是未知且有界的, 即存在一个常数 $d_0$ 使得 $|d(k)| \leq d_0$ .

**假设 4** 系统具有一个全局渐近稳定的零动态, 即任何输出序列 $y(k)$ 比输入序列 $u(k)$ 增长的快<sup>[31]</sup>.

**注 1** 在实际的进给伺服控制系统中, 上述假设是合

理的. 首先进给伺服系统是一个连续运动的系统, 其动态系统满足一定的光滑性; 其次, 当输入的控制电压在电机运行的允许范围内, 输入电压的有界变化引起的电机位置变化也必然是有界的, 即满足广义Lipschitz条件. 此外, 进给伺服系统的扰动是有界的, 这是一个常见的条件.

**注2** 最小相位系统是证明标准线性自适应控制问题稳定性的一个必要条件. 这就确保了输出序列会比输入序列增长的更快. 对于所考虑的非线性问题, 必须要有一个相同的假设, 即进给伺服系统的输出序列要比输入序列增长的更快. 由此可见, 假设4是对系统内部动态的一种假设.

下面的引理证明了具有扰动输入的进给伺服系统可以转换为一个等效的动态线性化模型.

**引理1** 对于满足假设1-4, 当 $|\Delta u(k)| \neq 0$ 和 $|\Delta d(k)| \neq 0$ 时, 存在称为伪偏导数(pseudo-partial derivatives, PPDs)的量 $\Phi(k)$ 和 $\Psi(k)$ , 使得系统(3)可以转换为以下的动态数据模型:

$$\Delta y(k+1) = \Phi(k)\Delta u(k) + \Psi(k)\Delta d(k), \quad (4)$$

其中:  $|\Phi(k)| \leq b_1$ ;  $|\Psi(k)| \leq b_2$ ;  $b_1, b_2$  是正常数;  $\Delta y(k+1) = y(k+1) - y(k)$ ;  $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ .

**证** 由系统(3)可知

$$\begin{aligned} \Delta y(k+1) &= y(k+1) - y(k) = \\ &f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_y), \\ &u(k), u(k-1), \dots, u(k-n_u), \\ &d(k), d(k-1), \dots, d(k-n_d)) - \\ &f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_y), \\ &u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_u), \\ &d(k-1), d(k-2), \dots, d(k-n_d)) + \\ &f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_y), \\ &u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_u), \\ &d(k-1), d(k-2), \dots, d(k-n_d)) - \\ &f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_y), \\ &u(k-1), \dots, u(k-n_u-1), \\ &d(k-1), \dots, d(k-n_d-1)), \end{aligned} \quad (5)$$

令

$$\begin{aligned} \pi(k) &= \\ &f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_y), \\ &u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_u), \\ &d(k-1), d(k-2), \dots, d(k-n_d)) - \\ &f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_y), \\ &u(k-1), \dots, u(k-n_u-1), \\ &d(k-1), \dots, d(k-n_d-1)). \end{aligned} \quad (6)$$

根据假设1和微分中值定理, 式(5)可重新组织为

$$\Delta y(k+1) = \frac{\partial f^*}{\partial u(k)} \Delta u(k) + \frac{\partial f^*}{\partial d(k)} \Delta d(k) + \pi(k), \quad (7)$$

其中:  $\frac{\partial f^*}{\partial u(k)}$  是 $f(\cdot)$ 关于 $u(k)$ 的偏导数在 $[u(k), u(k-1)]$ 之间某一点处的值,  $\frac{\partial f^*}{\partial d(k)}$  是 $f(\cdot)$ 关于 $d(k)$ 的偏导数在 $[d(k), d(k-1)]$ 之间某一点处的值.

对每个固定时刻 $k$ , 考虑以下含有变量 $Z(k)$ ,  $W(k)$ 的数据方程:

$$\pi(k) = Z(k)\Delta u(k) + W(k)\Delta d(k), \quad (8)$$

由于 $|\Delta d(k)| \neq 0$ 和 $|\Delta u(k)| \neq 0$ , 则上式一定存在解 $Z^*(k)$ 和 $W^*(k)$ . 令 $\Phi(k) = \frac{\partial f^*}{\partial u(k)} + Z^*(k)$ ,  $\Psi(k) = \frac{\partial f^*}{\partial d(k)} + W^*(k)$ , 则系统(3)可以转化为动态线性化数据模型(4). 由式(4)可得

$$y(k+1) = y(k) + \Phi(k)\Delta u(k) + \Psi(k)\Delta d(k). \quad (9)$$

证毕.

**注3** 当 $|\Delta u(k)| \neq 0$ 成立且 $\Delta u(k)$ 和 $\Delta d(k)$ 不太大时, 方程(9)是一个参数缓慢变化的动态线性系统. 因此, 在实际的控制系统设计中, 保证 $|\Delta u(k)| \neq 0$ 和 $\Delta u(k)$ 不太大是高度合理的.

**注4** 式(9)只是系统(3)的等效形式, 其中不仅PPDs函数 $\Phi(k)$ 和 $\Psi(k)$ 都是未知和时变的, 而且干扰输入 $d(k)$ 也是未知的, 因此需要设计PPDs和干扰 $d(k)$ 估计算法.

### 3.2 干扰估计算法

由于干扰是未知的, 干扰估计准则函数如下所示:

$$\begin{aligned} J(\Delta \hat{d}(k)) &= \\ &|y(k) - y(k-1) - \hat{\Phi}(k-1)\Delta u(k-1) - \\ &\hat{\Psi}(k-1)\Delta \hat{d}(k)|^2 + \rho|\Delta \hat{d}(k) - \Delta \hat{d}(k-1)|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

令 $\frac{\partial J(\Delta \hat{d}(k))}{\partial \Delta \hat{d}(k)} = 0$ , 可得

$$\begin{aligned} \Delta \hat{d}(k) &= \Delta \hat{d}(k-1) + \\ &\frac{\sigma \hat{\Psi}(k-1)(\Delta y(k) - \kappa(k-1))}{\rho + |\hat{\Psi}(k-1)|^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中:  $\sigma \in (0.5, 1)$  是步长常数;  $\rho$  是惩罚因子.

$$\begin{aligned} \kappa(k-1) &= \\ &\hat{\Psi}(k-1)\Delta \hat{d}(k-1) + \hat{\Phi}(k-1)\Delta u(k-1). \end{aligned}$$

**注5** 采用一步学习方法提高了干扰估计算法的学习速度, 避免了全局学习的复杂性. 步长参数 $\sigma$ 会影响学习过程

的收敛速度.

### 3.3 PPDs估计算法

由于函数 $\Phi(k)$ 和 $\Psi(k)$ 是未知和时变的, 采用如下估计算法:

$$\hat{\Phi}(k) = \hat{\Phi}(k-1) + \frac{\eta \Delta u(k-1)(\Delta y(k) - \kappa(k-1))}{\mu + |\Delta u(k-1)|^2}, \quad (12)$$

$$\hat{\Psi}(k) = \hat{\Psi}(k-1) + \frac{\tau \Delta \hat{d}(k-1)(\Delta y(k) - \kappa(k-1))}{\gamma + |\Delta \hat{d}(k-1)|^2}, \quad (13)$$

其中:  $\mu, \gamma$ 为惩罚因子;  $\eta \in (0.5, 1), \tau \in (0.5, 1)$ 是步长常数. 综上所述, 具有干扰补偿的MFAC算法为

$$\hat{\Phi}(k) = \hat{\Phi}(k-1) + \frac{\eta \Delta u(k-1)(\Delta y(k) - \kappa(k-1))}{\mu + |\Delta u(k-1)|^2}, \quad (14a)$$

$$\hat{\Psi}(k) = \hat{\Psi}(k-1) + \frac{\tau \Delta \hat{d}(k-1)(\Delta y(k) - \kappa(k-1))}{\gamma + |\Delta \hat{d}(k-1)|^2}, \quad (14b)$$

$$\Delta \hat{d}(k) = \Delta \hat{d}(k-1) + \frac{\rho \hat{\Psi}(k-1)(\Delta y(k) - \kappa(k-1))}{\rho + |\hat{\Psi}(k-1)|^2}. \quad (14c)$$

当 $|\hat{\Phi}(k) \leq \varepsilon|$ 或 $|\Delta u(k) \leq \varepsilon|$ 时,  $\hat{\Phi}(k) = \hat{\Phi}(1)$ ; 当 $|\hat{\Psi}(k) \leq \varepsilon|$ 或 $|\Delta d(k) \leq \varepsilon|$ 时,  $\hat{\Psi}(k) = \hat{\Psi}(1)$ ; 当 $|\Delta \hat{d}(k)| \geq 2d$ 时,  $\hat{d}(k) = d(1)$ . 其中:  $\hat{\Phi}(1), \hat{\Psi}(1), d(1)$ 分别是 $\hat{\Phi}(k), \hat{\Psi}(k), \hat{d}(k)$ 的初始值;  $\varepsilon$ 为充分小的正数. 由于估计误差的存在, 式(9)可以重写为

$$y(k+1) = y(k) + (\hat{\Phi}(k) - H(k))\Delta u(k) + (\hat{\Psi}(k) - \lambda(k))(\Delta \hat{d}(k) - h(k)), \quad (15)$$

其中:  $H(k) = \hat{\Phi}(k) - \Phi(k), \lambda(k) = \hat{\Psi}(k) - \Psi(k)$ 表示参数估计误差;  $h(k) = \Delta \hat{d}(k) - \Delta d(k)$ 表示扰动估计误差.

### 3.4 定义滑模函数和趋近律

针对式(9)所示系统, 输出误差定义如下:

$$e(k) = y(k) - y_d(k) + \delta \varepsilon(k), \quad (16)$$

其中:  $y(k)$ 是系统输出,  $y_d(k)$ 是期望输出,  $\delta$ 是可调参数,  $\varepsilon(k)$ 表示轮廓误差. 采用以下离散终端滑模函数<sup>[8]</sup>:

$$s(k) = \lambda_1 e(k) + \lambda_2 e^\alpha(k-1) - \lambda_1(1-\beta)e(k-1), \quad (17)$$

其中:  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \alpha \in (0, 1)$ 是两个奇整数的比率; 引入 $\alpha < 1$ 将使得相平面原点附近的滑模面具有更陡峭的斜率, 因此, 将加速收敛速度;  $\beta \in (0, 1)$ 是一个可调参数, 将会影响闭环系统的误差范围.

### 3.5 MFA-DTSMC控制律设计

离散滑模控制方案可以基于趋近律或等效控制进行设计. 为了实现快速收敛和抖振抑制, 基于以下趋近律设计MFA-DTSMC控制策略:

$$s(k+1) = E_1(k)s(k) - E_2(k) \operatorname{sgn} s(k), \quad (18)$$

$$E_1(k) = \frac{2(1-qT)}{\exp(-\delta_1 s(k)) + \exp(\delta_1 s(k))}, \quad (19)$$

$$E_2(k) = \frac{\lambda(\exp(-\delta_2 s(k)) + \exp(\delta_2 s(k)))}{2}, \quad (20)$$

其中:  $q > 0$ 是收敛参数,  $0 < 1 - qT < 1$ ;  $\delta_1, \delta_2$ 是调节指数项变化速度的可调参数;  $\lambda > 0$ 是增益参数. 结合式(16)–(17)可得以下表达式:

$$\lambda_1 e(k+1) + \lambda_2 e^\alpha(k) - \lambda_1(1-\beta)e(k) = E_1(k)s(k) - E_2(k) \operatorname{sgn} s(k), \quad (21)$$

$$\lambda_1(y(k+1) - y_d(k+1) + \delta \varepsilon(k+1)) + \lambda_2(y(k) - y_d(k) + \delta \varepsilon(k))^\alpha - \lambda_1(1-\beta)(y(k) - y_d(k) + \delta \varepsilon(k)) = E_1(k)s(k) - E_2(k) \operatorname{sgn} s(k), \quad (22)$$

将式(15)代入式(22), 得

$$\lambda_1(y(k) + (\hat{\Phi}(k) - H(k))\Delta u(k) + (\hat{\Psi}(k) - \lambda(k))(\Delta \hat{d}(k) - h(k)) - y_d(k+1) + \delta \varepsilon(k+1)) + \lambda_2(y(k) - y_d(k) + \delta \varepsilon(k))^\alpha - \lambda_1(1-\beta)(y(k) - y_d(k) + \delta \varepsilon(k)) = E_1(k)s(k) - E_2(k) \operatorname{sgn} s(k). \quad (23)$$

整理式(23), 并忽略干扰误差 $h(k)$ , 可得等效控制

$$\begin{aligned} \Delta u^{\text{eq}}(k) = & (\hat{\Phi}(k) - H(k))^{-1} \times (\lambda_1^{-1} E_1(k)s(k) - \lambda_1^{-1} E_2(k) \operatorname{sgn} s(k) + \\ & (1-\beta)(y(k) - y_d(k) + \delta \varepsilon(k)) - \lambda_1^{-1} \lambda_2 (y(k) - y_d(k) + \delta \varepsilon(k))^\alpha - \\ & (\hat{\Psi}(k) - \lambda(k))\Delta \hat{d}(k) + \\ & y_d(k+1) - \delta \varepsilon(k+1) - y(k)), \quad (24) \end{aligned}$$

由于 $y_d(k+1)$ 为要跟踪的期望轨迹, 因此,  $y_d(k+1)$ 是已知的. 如果系统的初始状态不在滑模面上, 或者在滑动运动期间出现外部干扰, 则单独的等效控制不能驱动系统的轨迹到达滑模面. 因此, 为了提高控制器的鲁棒性, 应设计鲁棒DTSMC控制器, 而切换控制用不连续的切换动作来控制系统的轨迹到达滑模面, 通过克服干扰来确保系统的鲁棒性. 切换控制设计如下:

$$\Delta u^{\text{sw}}(k) = \frac{-\lambda_s}{\hat{\Phi}(k) - H(k)} \operatorname{sgn} s(k), \quad (25)$$



因此, 根据牛顿递推公式, 只需要知道沿着参考轨迹的位置、速度和实际轮廓的位置就可以估计出轮廓误差。

### 4.2 Steffensen加速迭代

虽然牛顿迭代在很多情况下能够很好地完成轮廓误差的估计, 但是在一些极端情况下, 牛顿迭代法难以快速又精确地完成轮廓误差估计。例如, 当期望运动点到轮廓误差点的距离较远时, 由迭代的基本原理可知, 当初始值离收敛点较远时, 迭代次数会急剧增加。因此在这类情况下, 牛顿迭代法难以完成满足精度要求的迭代次数, 轮廓误差估计精度得不到保证。不仅如此, 在一些高频控制系统中, 需要更快的计算速度才能保证数据更新的实时性。

为了更好的完成轮廓误差的估计, 本节基于Steffensen迭代提出收敛速度更快的加速迭代轮廓误差估计法, 提高估算速度, 保证数据更新的实时性。

由式(41)可知, 对于求解轮廓误差问题, 可以转化为求解  $t = \varphi(t)$  的根  $t^*$  的问题。已知  $t^*$  的近似值  $t_i$  和  $\varphi(t_i)$ , 其误差分别为

$$l(t_i) = \varphi(t_i) - t_i, \quad (42)$$

$$l(\varphi(t_i)) = \varphi(\varphi(t_i)) - \varphi(t_i), \quad (43)$$

将误差  $l(t)$  “外推到零”, 即过  $(t_i, l(t_i))$  及  $(\varphi(t_i), l(\varphi(t_i)))$  两点做线性插值函数, 令线性插值函数等于零可得

$$l(t_i) + \frac{l(\varphi(t_i)) - l(t_i)}{\varphi(t_i) - t_i} (t - t_i) = 0, \quad (44)$$

可求得

$$t = t_i - \frac{l(t_i)}{l(\varphi(t_i)) - l(t_i)} (\varphi(t_i) - t_i), \quad (45)$$

结合式(42)–(43)有以下Steffensen加速迭代公式:

$$t_{i+1} = t_i - \frac{(\varphi(t_i) - t_i)^2}{\varphi(\varphi(t_i)) - 2\varphi(t_i) + t_i}. \quad (46)$$

从上述公式可以看出, Steffensen加速迭代的本质是将不动点迭代法计算两步合并一步得到的。Steffensen加速迭代计算流程如图4所示, 其中绿色实线表示传统的牛顿迭代方法的迭代过程。首先, 由  $t_{i+1} = \varphi(t_i)$  计算出  $t_{i+1}$ , 得到坐标点  $(t_i, t_{i+1})$ , 然后, 再计算出  $t_{i+2}$ , 得到坐标点  $(t_{i+1}, t_{i+2})$ , 以此类推按照图4中的绿色实线一圈一圈的逼近轮廓误差点  $(t^*, t^*)$ 。蓝色实线表示 Steffensen 加速迭代计算流程。同样先由  $t_{i+1} = \varphi(t_i)$  计算出  $t_{i+1}$ , 得到坐标点  $(t_i, t_{i+1})$ , 然后, 再计算出  $t_{i+2}$ , 得到坐标点  $(t_{i+1}, t_{i+2})$ , 然后连接  $(t_i, t_{i+1})$  和  $(t_{i+1}, t_{i+2})$  获得蓝色实线, 与  $y = t$  的交点坐标为  $(\bar{t}_{i+1}, \bar{t}_{i+1})$ , 以此类推可得到坐标点  $(\bar{t}_{i+2}, \bar{t}_{i+2})$ , 按照上述计算流程可一步一步逼近轮廓误差点  $(t^*, t^*)$ 。由上述分析可以发现Steffensen加速迭代轮廓误差估

计法要比传统的牛顿迭代快得多。

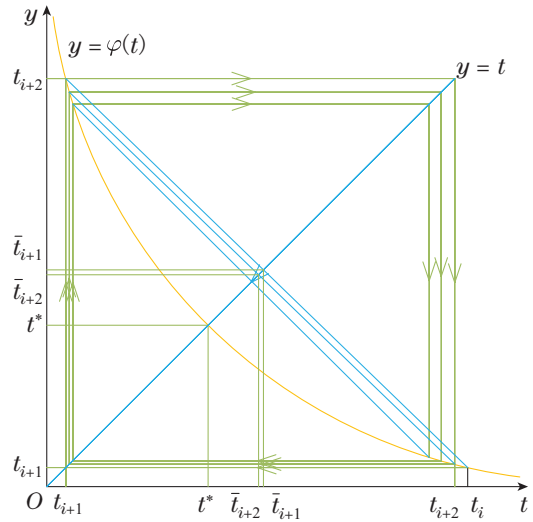


图 4 Steffensen加速迭代原理图

Fig. 4 Steffensen accelerated iteration schematic

### 4.3 Steffensen加速迭代法收敛性分析

根据式(46)定义迭代函数为

$$\Theta(t) = t - \frac{(\varphi(t) - t)^2}{\varphi(\varphi(t)) - 2\varphi(t) + t}.$$

**定理 1** 若  $t^*$  为  $\Theta(t)$  的不动点, 则  $t^*$  为  $\varphi(t)$  的不动点。反之, 若  $t^*$  为  $\varphi(t)$  的不动点, 则设  $\dot{\varphi}(t)$  存在,  $\dot{\varphi}(t^*) \neq 1$ , 则  $t^*$  为  $\Theta(t)$  的不动点, 且 Steffensen 加速迭代是二阶收敛的。

证明见参考文献[32]。

需要指出的是, Steffensen加速迭代的结果不是全局的, 而是局部的, 这意味着迭代的初值选择必须正确, 以防止发散或收敛到错误的结果。解决这一问题的一般方法是使用估计值作为下一步迭代的初始值。迭代获取轮廓误差的过程总结如下:

- 1) 初始化  $\hat{t}$ ;
- 2) 通过  $\varphi(\hat{t}) = \hat{t} - \frac{(y_d(\hat{t}) - y(t)) \cdot \dot{y}_d(\hat{t})}{\|\dot{y}_d(\hat{t})\|^2}$  获取  $\varphi(\hat{t})$ ;
- 3) 将  $\varphi(\hat{t})$  代入式(46)中得到一个新的  $\hat{t}_{i+1}$ ;
- 4) 重复过程2), 3)的迭代公式;
- 5) 通过式(32)计算得到轮廓误差。

## 5 稳定性分析

**引理 2** 对于以下迭代方程<sup>[33]</sup>:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (47)$$

其中  $A(k)$  和  $B(k)$  是时变迭代矩阵和向量, 对于任何  $k$  有  $\|B(k)\| \leq \varpi$ , 其中  $\varpi$  是一个正常数。当任意选择初始向量  $x(1)$  时,  $x(k+1)$  有界的充分条件是  $\|A(k)\| < 1$ 。

**定理 2** 系统(3)满足假设1-4, 如果参考信号  $y_d(k+1)$  有界, 时变参数  $\Phi(k)$  采用式(14a)估计,  $\Psi(k)$  采用式(14b)估计,  $\Delta d(k)$  采用式(14c)估计, 控制律采用式(28), 则离散滑模运动将在有限数量的步骤内达到准滑动模态, 输入输出信号  $\{u(k)\}$  和  $\{y(k)\}$  是有界序列, 并且当  $0.5 < \eta < 1, 0.5 < \tau < 1, 0.5 < \sigma < 1, \mu, \gamma, \rho$  满足以下不等式时,  $\hat{\Phi}(k), \hat{\Psi}(k), \Delta \hat{d}(k)$  是有界的.

$$\mu > \frac{\eta^2 (2d_0 + b_2)^2}{4(1 - \eta)}, \tag{48}$$

$$\gamma > \frac{\tau^2 (2d_0 + b_2)^2}{4(1 - \tau)}, \tag{49}$$

$$\rho > \frac{\sigma^2 (2d_0 + b_2)^2}{4(1 - \sigma)}, \tag{50}$$

$$|\Delta u(k)| \geq \sqrt{\frac{\mu}{2\eta - 1}}, \tag{51}$$

$$|\Delta \hat{d}(k)| \geq \sqrt{\frac{\gamma}{2\tau - 1}}, \tag{52}$$

$$|\hat{\Psi}(k)| \geq \sqrt{\frac{\rho}{2\sigma - 1}}. \tag{53}$$

**证** 1)  $\hat{\Phi}(k), \hat{\Psi}(k), \Delta \hat{d}(k)$  的有界性.

将式(14a)代入参数估计误差  $H(k) = \hat{\Phi}(k) - \Phi(k)$  中可得

$$\begin{aligned} H(k) = & (1 - \frac{\eta \Delta u^2(k-1)}{\mu + |\Delta u(k-1)|^2})H(k-1) - \\ & \frac{\eta \Delta u(k-1) \Delta \hat{d}(k-1)}{\mu + |\Delta u(k-1)|^2} \lambda(k-1) - \\ & \frac{\eta \Delta u(k-1) \Psi(k-1)}{\mu + |\Delta u(k-1)|^2} \bar{h}(k-1) + \\ & \Phi(k-1) - \Phi(k), \end{aligned} \tag{54}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \lambda(k) = & -\frac{\tau \Delta u(k-1) \Delta \hat{d}(k-1)}{\gamma + |\Delta \hat{d}(k-1)|^2} H(k-1) + \\ & (1 - \frac{\tau \Delta \hat{d}^2(k-1)}{\gamma + |\Delta \hat{d}(k-1)|^2}) \lambda(k-1) - \\ & \frac{\tau \Psi(k-1) \Delta \hat{d}(k-1)}{\gamma + |\Delta \hat{d}(k-1)|^2} \bar{h}(k-1) + \\ & \Psi(k-1) - \Psi(k), \end{aligned} \tag{55}$$

$$\bar{h}(k) =$$

$$\frac{\eta |\Delta u(k-1)| (|\Delta u(k-1)| + |\Delta \hat{d}(k-1)| + |\Psi(k-1)|)}{\mu + |\Delta u(k-1)|^2} < 1, \tag{59}$$

$$\frac{\tau |\Delta \hat{d}(k-1)| (|\Delta u(k-1)| + |\Delta \hat{d}(k-1)| + |\Psi(k-1)|)}{\gamma + |\Delta \hat{d}(k-1)|^2} < 1, \tag{60}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma \Delta u(k-1) \Psi(k-1)}{\rho + |\hat{\Psi}(k-1)|^2} H(k-1) - \\ & \frac{\sigma \hat{\Psi}(k-1) \Delta d(k-1)}{\rho + |\hat{\Psi}(k-1)|^2} \lambda(k-1) + \\ & (1 - \frac{\sigma \hat{\Psi}^2(k-1)}{\rho + |\hat{\Psi}(k-1)|^2}) \bar{h}(k-1) + \\ & \Delta d(k-1) - \Delta d(k). \end{aligned} \tag{56}$$

将式(54)-(56)写成矩阵的形式有

$$\begin{bmatrix} H(k) \\ \lambda(k) \\ \bar{h}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(k-1) \\ \lambda(k-1) \\ \bar{h}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi(k-1) - \Phi(k) \\ \Psi(k-1) - \Psi(k) \\ \Delta d(k-1) - \Delta d(k) \end{bmatrix}, \tag{57}$$

其中:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1 - \frac{\eta \Delta u^2(k-1)}{\mu + |\Delta u(k-1)|^2} \\ A_{12} &= -\frac{\eta \Delta u(k-1) \Delta \hat{d}(k-1)}{\mu + |\Delta u(k-1)|^2} \\ A_{13} &= -\frac{\eta \Delta u(k-1) \Psi(k-1)}{\mu + |\Delta u(k-1)|^2} \\ A_{21} &= -\frac{\tau \Delta u(k-1) \Delta \hat{d}(k-1)}{\gamma + |\Delta \hat{d}(k-1)|^2} \\ A_{22} &= 1 - \frac{\tau \Delta \hat{d}^2(k-1)}{\gamma + |\Delta \hat{d}(k-1)|^2} \\ A_{23} &= -\frac{\tau \Psi(k-1) \Delta \hat{d}(k-1)}{\gamma + |\Delta \hat{d}(k-1)|^2} \\ A_{31} &= -\frac{\sigma \Delta u(k-1) \Psi(k-1)}{\rho + |\hat{\Psi}(k-1)|^2} \\ A_{32} &= -\frac{\sigma \hat{\Psi}(k-1) \Delta d(k-1)}{\rho + |\hat{\Psi}(k-1)|^2} \\ A_{33} &= 1 - \frac{\sigma \hat{\Psi}^2(k-1)}{\rho + |\hat{\Psi}(k-1)|^2}. \end{aligned}$$

由于

$$\left\| \begin{bmatrix} \Phi(k-1) - \Phi(k) \\ \Psi(k-1) - \Psi(k) \\ \Delta d(k-1) - \Delta d(k) \end{bmatrix} \right\|_1 \leq 2(b_1 + b_2 + 2d_0). \tag{58}$$

所以矩阵  $A$  满足  $\|A\| < 1$  的条件是

$$\frac{\sigma|\hat{\Psi}(k-1)|(|\Delta u(k-1)| + |\Delta d(k-1)| + |\hat{\Psi}(k-1)|)}{\rho + |\hat{\Psi}(k-1)|^2} < 1, \quad (61)$$

$$1 - \frac{\eta\Delta u^2(k-1)}{\mu + |\Delta u(k-1)|^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (62)$$

$$1 - \frac{\tau\Delta\hat{d}^2(k-1)}{\gamma + |\Delta\hat{d}(k-1)|^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (63)$$

$$1 - \frac{\sigma\hat{\Psi}^2(k-1)}{\rho + |\hat{\Psi}(k-1)|^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (64)$$

根据式(59)–(64)可以得到式(48)–(53)。进一步的, 根据引理2可以得到  $H(k)$ ,  $\lambda(k)$ ,  $h(k)$  是收敛的。由于  $\Phi(k)$ ,  $\Psi(k)$ ,  $\Delta d(k)$  是收敛的, 所以可得  $\hat{\Phi}(k)$ ,  $\hat{\Psi}(k)$ ,  $\Delta\hat{d}(k)$  也是收敛的。

2) 跟踪误差的有界性。

由式(19)–(20)可知  $E_1(k)$  和  $E_2(k)$  的取值范围为  $E_1(k) \in (0, 1)$ ,  $E_2(k) \in [\lambda, +\infty)$ 。当  $s(k) > 0$  时, 根据式(18)可得

$$\begin{aligned} s(k+1) &= \\ E_1(k)s(k) - E_2(k)\operatorname{sgn} s(k) &= \\ E_1(k)s(k) - E_2(k) &< s(k) - E_2(k). \end{aligned} \quad (65)$$

由式(65)可得

$$s(k+1) - s(k) < -E_2(k) < 0, \quad (66)$$

当  $s(k) < 0$  时

$$\begin{aligned} s(k+1) &= \\ E_1(k)s(k) - E_2(k)\operatorname{sgn} s(k) &= \\ E_1(k)s(k) + E_2(k) &> s(k) + E_2(k), \end{aligned} \quad (67)$$

由式(67)可得

$$s(k+1) - s(k) > E_2(k) > 0, \quad (68)$$

考虑式(66)(68), 可得出

$$\begin{cases} s(k+1) < s(k), & s(k) > 0, \\ s(k+1) > s(k), & s(k) < 0, \end{cases} \quad (69)$$

式(69)满足离散滑模存在和到达条件

$$\begin{cases} (s(k+1) - s(k))\operatorname{sgn}(s(k)) < 0, \\ (s(k+1) + s(k))\operatorname{sgn}(s(k)) > 0, \end{cases} \quad (70)$$

因此,  $s(k)$  单调减小, 且式(70)是离散滑模状态存在的充要条件, 即意味着在式(28)的作用下, 系统的跟踪误差收敛到零的领域内, 即  $e(k)$  是有界的。

3) 输出信号的有界性。

由于  $e(k) = y(k) - y_d(k) + \delta\varepsilon(k)$ ,  $y_d(k)$  为期望轨迹, 故  $y_d(k)$  有界, Steffensen加速迭代是二阶收敛, 故  $\varepsilon(k)$  有界, 且已证明  $e(k)$  有界, 故  $y(k)$  也是有界的。

4) 输入信号的有界性。

由假设4可知, 系统具有一个全局渐近稳定的零动态, 即存在常数  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  和  $k_0$  满足

$$|u(k-1)| < \Gamma_1 \max |y(k)| + \Gamma_2, \quad \forall k \geq k_0, \quad (71)$$

因为输出信号  $y(k)$  有界, 故根据式(71)可知  $u(k)$  有界。

证毕。

## 6 系统实验分析

双轴进给伺服系统实验装置如图5所示。该实验系统采用Beckhoff工控机作为控制器, 通过与之配套的TwinCAT3软件实时控制伺服系统, 伺服系统选用OMRON工业伺服驱动器和电机, 采用外部光栅尺作为位置反馈。实验装置通过RJ54网线将上位机与两台电机的驱动器相连。利用MATLAB/Simulink将算法模型导入到TwinCAT3中, 使双轴进给伺服系统按照输入指令运行。实验中采用的双轴运动系统的有效行程分别为150 mm(X轴), 150 mm(Y轴), 其主要参数为:  $J_x = J_y = 0.8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $B_z = B_y = 0.255 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$ ,  $K_{ax} = K_{ay} = 3.2 \text{ A/V}$ ,  $K_{tx} = K_{ty} = 0.9 \text{ Nm/A}$ ,  $r_{gx} = r_{gy} = 5 \text{ mm/rad}$ 。

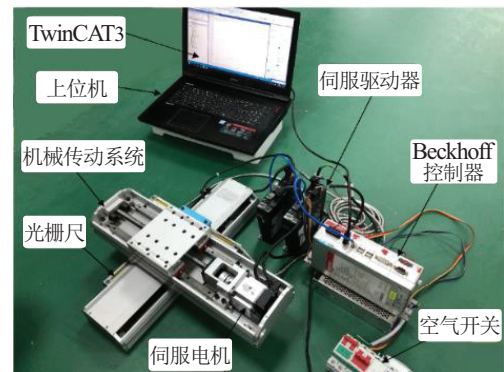


图5 双轴进给伺服系统实验装置图

Fig. 5 Experimental setup of two-axis feeding servo system

### 6.1 干扰估计效果验证

为了验证干扰估计算法的效果, 在算法模型中添加正弦干扰信号, 将干扰的真实值和估计值绘制成图6。图6中, 红色实线代表正弦干扰曲线的实际值, 蓝色划线代表干扰的估计值, 黑色实线代表干扰估计误差值, 从图6中可以看出, 干扰估计算法能够有效地估计出实际干扰。

### 6.2 轮廓误差估计准确性、时效性对比实验

由于圆轨迹可以根据实际位置点、圆心位置及圆弧半径, 确定准确的真实轮廓误差。因此, 利用圆轨迹验证所提出的Steffensen加速迭代轮廓误差估计方法的准确性和时效性并与几何近似法、牛顿迭代法进行对比, 具体如下:

M1方法: 几何近似法;  
 M2方法: 牛顿迭代法;  
 M3方法: Steffensen加速迭代法.

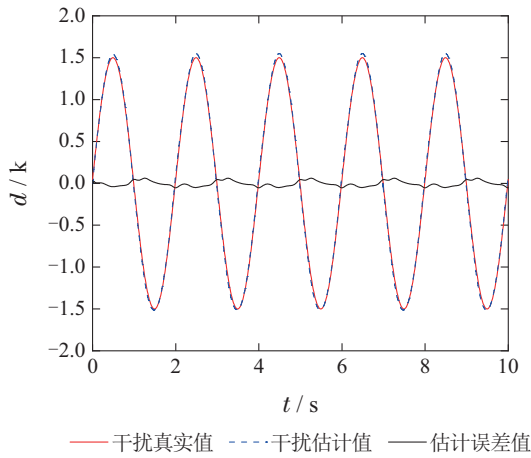
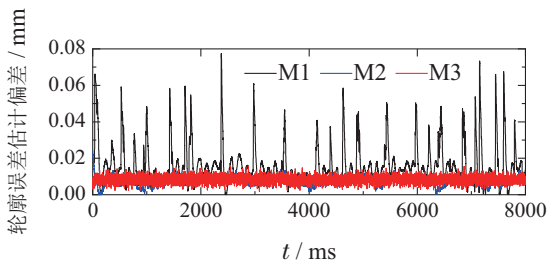


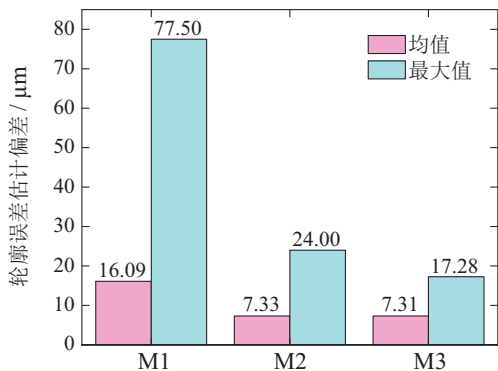
图6 干扰估计效果

Fig. 6 Interference estimation effect

将3种方法的轮廓误差估计准确性对比结果绘制成图7, 通过图7(a)可以看出, 本文所提出的M3方法相比M1方法在估计准确性上有较大提升. 具体性能指标对比如图7(b)所示, M3方法的轮廓误差估计偏差均值为7.31  $\mu\text{m}$ , 最大值为17.28  $\mu\text{m}$ , 相比于M1方法分别降低54.57%和77.7%. 然而, M3方法的估计偏差均值、最大值和M2方法相差不大, 这是因为M3方法是在M2方法的基础上进行了加速, 估计精度上没有较大提升, 主要提升的是计算的速度, 对比结果可见图8.



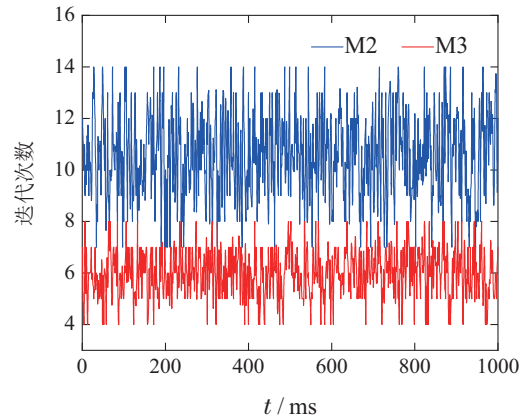
(a) 估计偏差整体对比



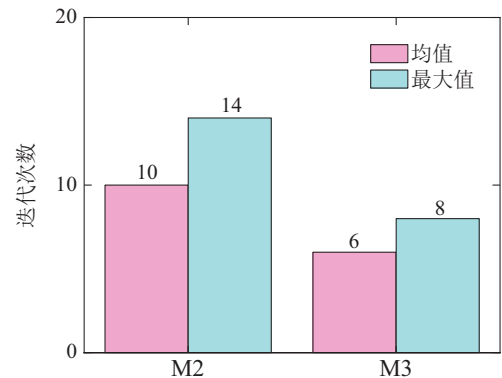
(b) 估计偏差均值与最大值对比

图7 轮廓误差估计准确性对比

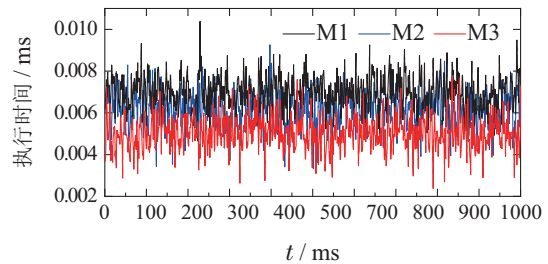
Fig. 7 Comparison of contour error estimation accuracy



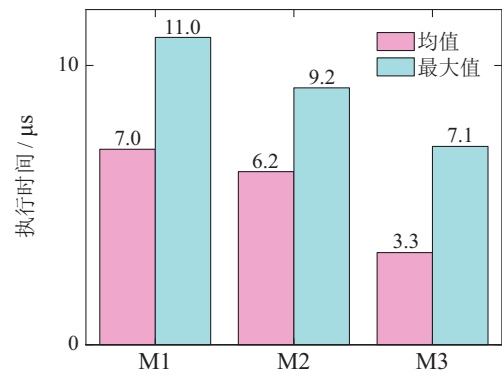
(a) 迭代次数对比



(b) 迭代次数均值、最大值对比



(c) 执行时间对比



(d) 执行时间均值、最大值对比

图8 轮廓误差估计时效性对比

Fig. 8 Comparison of timeliness of contour error estimates

将3种方法的轮廓误差估计时效性对比结果绘制成图8, 由于M1使用几何关系进行轮廓误差的估计, 所以估计过程中不需要迭代, 因此图8(a)-(b)只对

了M2和M3在估计轮廓误差时所需要的迭代次数. 从图8(a)–(b)可以看出, M3的整体迭代次数仅为M2的 $\frac{1}{2}$ , 其迭代次数的均值和最大值分别为6和8, 相比M2的10和14, 迭代次数的均值和最大值分别降低40%, 42.86%. 评价轮廓误差估计时效性的另一个指标是每次估计时所需要的时间, 图8(c)–(d)将3种方法在每次估计轮廓误差所需要的时间进行了对比. 从图8(c)–(d)可以看出, M3在估计轮廓误差时执行时间始终是最少的, 其执行时间均值和最大值分别为3.3  $\mu$ s和7.1  $\mu$ s, 相比M1的7  $\mu$ s和11  $\mu$ s, 执行时间均值和最大值分别减少52.86%, 35.45%. M2执行时间均值和最大值分别为6.2  $\mu$ s和9.2  $\mu$ s, M3相比M2, 其执行时间均值和最大值分别减少46.77%, 22.83%. 以上对比分析表明了所提M3方法在保持轮廓误差估计准确性的同时仍可以保证其估计的时效性.

### 6.3 轮廓误差控制策略效果对比实验

为验证 Steffensen 加速迭代和MFA-DTSMC对实现高精度轮廓控制的有效性, 实验原理框图如图9所示. 实验分别在空载和负载条件下进行, 采用如下4种

控制方法:

C1方法: 牛顿迭代和积分滑模控制<sup>[34]</sup>;

C2方法: 牛顿迭代和离散分数阶滑模控制<sup>[35]</sup>;

C3方法: Steffensen 加速迭代和无模型自适应控制<sup>[22]</sup>;

C4方法: Steffensen加速迭代和无模型自适应离散终端滑模控制.

根据现有的参考文献, MFA-DTSMC的控制参数  $\eta, \tau, \sigma$  在(0.5,1)之间进行选择, 其余控制参数则在满足稳定性的条件下, 经过不断地调整, 最终选择一组较优的控制参数, 如下所示:

C1:  $a = 20, b = 20, k = 4, \mu = 0.125$ ;

C2:  $\lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 0.6, \alpha = 0.5, \xi_1 = 500, \xi_2 = 10, \xi_3 = 450$ ;

C3:  $\mu = 0.5, \lambda = 0.1, \rho = 0.6, \eta = 1, \varepsilon = 10^{-5}$ ;

C4:  $\mu = 0.5, \eta = 0.8, \lambda_s = 0.5, \lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0.2; \alpha = \frac{5}{7}, \beta = 0.75, \sigma = 0.8, \gamma = 0.4, \tau = 0.8, \rho = 0.3, \delta = 20, q = 500, T = 0.001, \delta_1 = 0.25, \delta_2 = 0.25, \varepsilon = 10^{-5}, \lambda = 0.04$ .

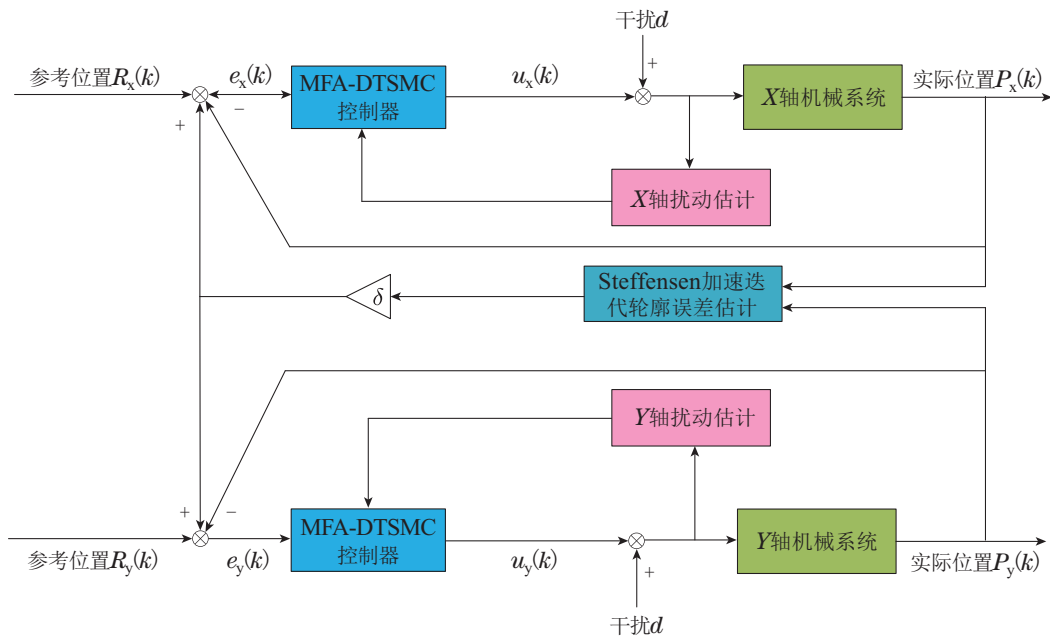


图 9 双轴进给伺服系统实验原理图

Fig. 9 Experimental schematic diagram of two-axis feed servo system

为评估轮廓控制策略的控制性能, 定义如下指标:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k)}{N}}, \quad (72)$$

$$MAX = \max(|\varepsilon(k)|), \quad (73)$$

其中: RMS为轮廓误差的均方根值, MAX为轮廓误差的最大绝对值. 为了验证所提出的Steffensen加速迭代和MFA-DTSMC的轮廓控制性能, 选择圆形轨迹为期望轮廓, 进给伺服系统在标称状态下空载运行.

图10描述了在4种控制方法下实际轮廓和参考轮廓. 通过局部放大图可以看出, C4方法下的实际轮廓更接近参考轮廓. 为了更清晰的进行对比, 给出了4种方法下的双轴进给伺服系统的轮廓误差曲线, 如图11所示. 根据图11可以看出, C4方法下的轮廓误差始终是最小的, 仅为C2方法下轮廓误差的 $\frac{1}{3}$ .

在工业应用中, 存在着各种不确定性和干扰, 鲁棒性也是评价控制方法性能的重要指标. 因此, 将一个

3 kg的负载加到运动阶段的工作台上,并保持所有参数不变的情况下再次运行圆轨迹,在无负载和有负载情况下,将4种方法下轮廓误差RMS值和MAX值绘制成表1.

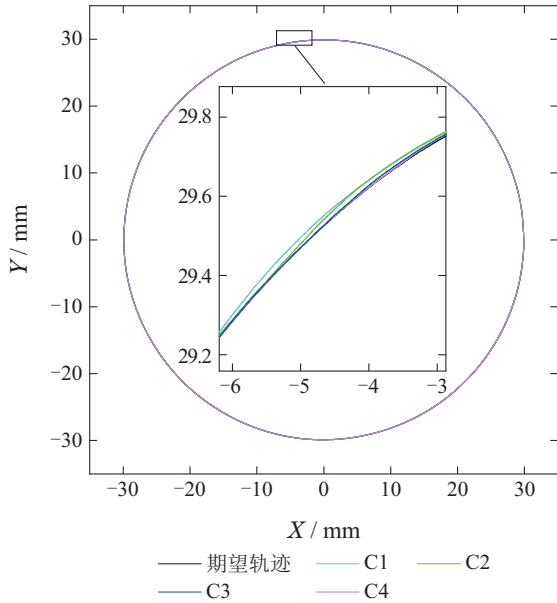


图 10 圆轮廓跟踪效果对比

Fig. 10 Comparison of circular contour tracking effects

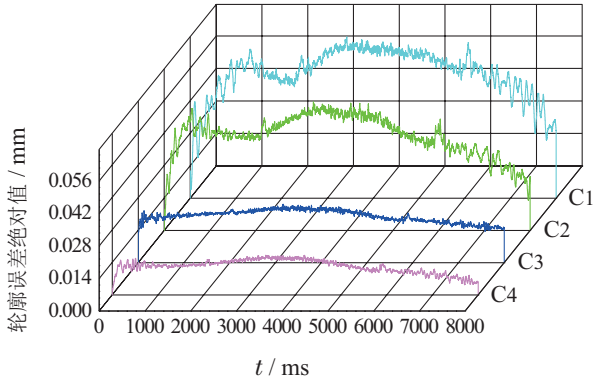


图 11 圆轮廓误差对比

Fig. 11 Comparison of round profile errors

表 1 圆轮廓实验性能指标

Table 1 Performance indices of round profile test

方法	无负载		有负载	
	RMS/ $\mu m$	MAX/ $\mu m$	RMS/ $\mu m$	MAX/ $\mu m$
C1	45.23	56.36	45.28	56.42
C2	40.67	51.28	40.85	51.45
C3	28.77	38.34	30.77	40.18
C4	14.28	22.11	14.34	22.75

分析表1可知,在无负载情况下,C4方法轮廓误差RMS值为14.28  $\mu m$ ,相比C1, C2, C3,轮廓误差精度分别提高68.43%, 64.89%, 50.36%, C4方法轮廓误差

MAX值为22.11  $\mu m$ ,相比C1, C2, C3,轮廓误差精度分别提高60.77%, 56.88%, 42.33%.在有负载情况下,C4方法轮廓误差RMS值为14.34  $\mu m$ ,相比C1, C2, C3,轮廓误差精度分别提高68.33%, 64.90%, 53.40%, C4方法轮廓误差MAX值为22.75  $\mu m$ ,相比C1, C2, C3,轮廓误差精度分别提高59.68%, 55.78%, 43.38%.通过有无负载两种情况的对比可以发现C1, C2, C4相比C3具有更好的鲁棒性,因为C1, C2, C4 3种方法都含有滑模控制,已经在很多文献中得到了证明.另外,通过C3, C4方法的对比可以表明MFAC和DTSMC结合的有效性.

为研究C4方法对复杂轮廓的跟踪能力,将参考轮廓设置为具有尖角的心形曲线,采用与圆轨迹相同的验证步骤.在空载情况下C1, C2, C3, C4 4种方法对心形曲线的跟踪效果如图12所示.从曲线的局部放大图可以看出,C4方法的实际轮廓相比其他方法更贴近参考轮廓.为了研究在高度弯曲的尖角处的轮廓控制性能,给出了尖角处的放大图,由局部放大图可以看出C3, C4方法相比C1, C2具有更理想的效果,这可能与Steffensen加速迭代的优良性能有关.为了更清晰的进行对比,给出了4种方法下的双轴进给伺服系统的轮廓误差曲线,如图13所示.通过图13可以发现,C1, C2, C3, C4的轮廓误差值逐渐减小,并且C4方法的轮廓误差始终最小.

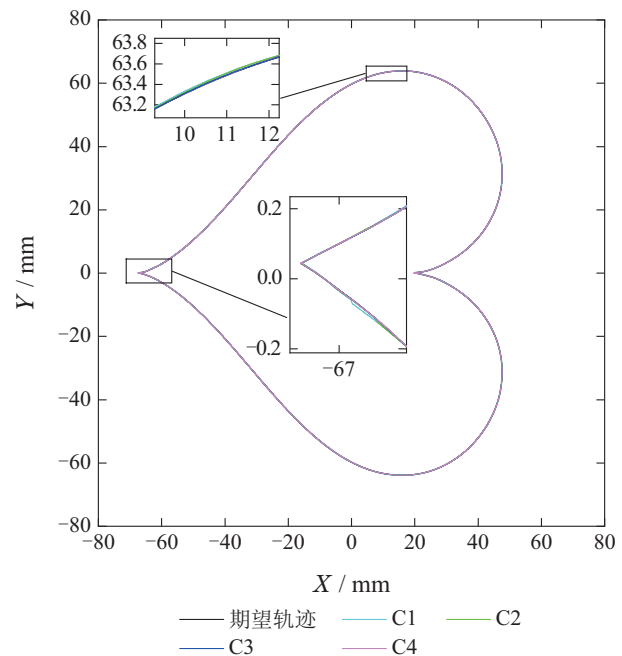


图 12 心形轮廓跟踪效果对比

Fig. 12 Comparison of heart contour tracking effect

同样,将一个3 kg的负载加到运动阶段的工作台上,并在保持所有参数不变的情况下再次运行心形轨迹,在无负载和有负载情况下,将4种方法下轮廓误差MAX值和RMS值绘制成表2.

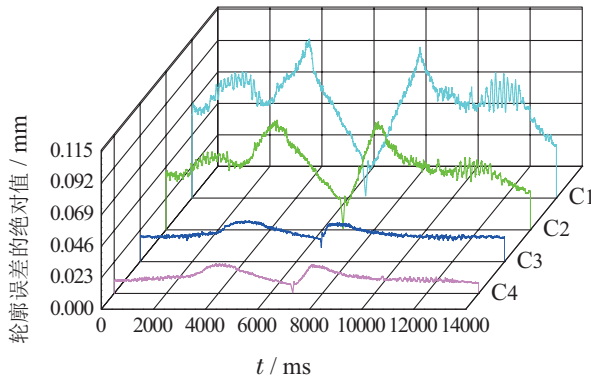


图13 心形轮廓误差对比

Fig. 13 Comparison of heart contour errors

表2 心形轮廓实验性能指标

Table 2 Experimental performance indicators for heart shape profile

方法	无负载		有负载	
	RMS/ $\mu\text{m}$	MAX/ $\mu\text{m}$	RMS/ $\mu\text{m}$	MAX/ $\mu\text{m}$
C1	61.35	116.36	61.59	116.68
C2	39.21	79.88	40.24	80.85
C3	29.36	45.64	32.37	49.28
C4	14.96	26.18	15.13	27.05

分析表2可知, 在无负载情况下, C4方法轮廓误差RMS值为 $14.96 \mu\text{m}$ , 相比C1, C2, C3, 轮廓误差精度分别提高75.62%, 61.85%, 49.05%, C4方法轮廓误差MAX值为 $26.18 \mu\text{m}$ , 相比C1, C2, C3, 轮廓误差精度分别提高77.50%, 67.23%, 42.64%。在有负载情况下, C4方法轮廓误差RMS值为 $15.13 \mu\text{m}$ , 相比C1, C2, C3, 轮廓误差精度分别提高75.43%, 62.40%, 53.26%, C4方法轮廓误差MAX值为 $27.05 \mu\text{m}$ , 相比C1, C2, C3, 轮廓误差精度分别提高76.82%, 66.54%, 45.11%。因此, 本文提出的C4方法无论是跟踪简单轨迹还是复杂轨迹, 都有优良的跟踪性能。此外, 本文提出的C4方法无论是无干扰还是有干扰, 都有很好的鲁棒性。

综合以上分析, 本文提出的C4方法能有效提高双轴进给伺服系统的轮廓跟踪精度。

## 7 结论

为实现双轴进给伺服系统在实际加工过程中的高精度运行, 提出基于Steffensen加速迭代和MFA-DTSMC的轮廓误差控制方法。针对传统牛顿迭代存在计算耗时, 难以用于实时估计轮廓误差的问题, 提出基于Steffensen加速迭代轮廓误差估计方法。为了补偿负载变化对轮廓控制精度的影响, 实现更好的轮廓控制效果, 将MFAC与DTSMC结合作为单轴控制器。通过对比实验证明了所提轮廓误差控制策略能有效地减小实时计算负担, 同时, 可以有效补偿负载变化对

轮廓控制精度的影响, 从而使双轴进给伺服系统具有更强的鲁棒性。所提控制策略具有精度高、性能良好的优点, 适用于数控机床、工业机器人等工业设备。

## 参考文献:

- [1] LIU Yanxiong, WANG Genju, HUA Lin, et al. Double-drive coordinated control systems of fine stamping machines based on adaptive sliding mode variable structure control. *China Mechanical Engineering*, 2021, 32(18): 2189–2196. (刘艳雄, 王根聚, 华林, 等. 采用自适应滑模变结构控制的精冲机双驱动协调控制系统. *中国机械工程*, 2021, 32(18): 2189–2196.)
- [2] CHEN Z, LI C, YAO B. Integrated coordinated/synchronized contouring control of a dual-linear-motor-driven gantry. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(5): 3944–3954.
- [3] CHEN Z, YAO B. Accurate motion control of linear motors with adaptive robust compensation of nonlinear electromagnetic field effect. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2013, 12(3): 1122–1129.
- [4] LIE T. Multi-axis contour control—the state of the art. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21(6): 1997–2010.
- [5] WAN M, DAI J, ZHANG W H. Adaptive feed-forward friction compensation through developing an asymmetrical dynamic friction model. *Mechanism and Machine Theory*, 2022, 170(3): 104691.
- [6] KOREN Y. Cross-coupled biaxial computer control for manufacturing systems. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the ASME*, 1980, 102(23): 265–272.
- [7] KIM S H, MIN B K. Real-time tool path modification for machine tool contour error reduction. *International Journal of Advance Manufacturing Technology*, 2022, 120(9): 6969–6981.
- [8] HOU H Z, YU X H, XU L. Discrete-time terminal sliding mode tracking control with alleviated chattering. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2019, 23(5): 1808–1817.
- [9] HE M L, HE J. Model-based real-time robust controller for a small helicopter. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 14(6): 107022.
- [10] HU C X, OU T S, ZHU Y, et al. GRU-type larc strategy for precision motion control with accurate tracking error prediction. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2021, 68(1): 812–820.
- [11] ALTAN A, HACIOGLU R. Modeling of three-axis gimbal system on unmanned air vehicle (UAV) under external disturbances. *The 25th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU)*. Antalya, Turkey: IEEE, 2017: 1–4.
- [12] HU C, HU Z, ZHU Y, et al. Advanced GTCF-LARC contouring motion controller design for an industrial X–Y linear motor stage with experimental investigation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(4): 3308–3318.
- [13] ZHANG D, YANG J, CHEN Y, et al. A two-layered cross coupling control scheme for a three-dimensional motion control system. *International Journal of Advance Manufacturing Technology*, 2015, 98(23): 12–20.
- [14] WU J, LIU C, XIONG Z, et al. Precise contour following for biaxial systems via an A-type iterative learning cross-coupled control algorithm. *International Journal of Advance Manufacturing Technology*, 2015, 93(12): 10–18.
- [15] CHIU GT-C, TOMIZUKA M. Contouring control of machine tool feed drive systems: A task coordinate frame approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, 9(6): 130–139.
- [16] WANG Z, HU C, ZHU Y, et al. The modular design of trajectory compensation based on ATCF for precision motion control. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 135(8): 106393.

- [17] XIAO Q B, WAN M, YANG Y, et al. Pre-compensation of contour errors for five-axis machine tools through constructing a model reference adaptive control. *Mechanism and Machine Theory*, 2023, 183(28): 105258.
- [18] LIU W, SHU F, XU Y, et al. Iterative learning based neural network sliding mode control for repetitive tasks: With application to a PMLSM with uncertainties and external disturbances. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 172(6): 108950.
- [19] YANG S, GHASEMI A, LU X, et al. Pre-compensation of servo contour errors using a model predictive control framework. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2015, 98(36): 50 – 60.
- [20] DAI J, WAN M, QIN X, et al. A time-delay-based sliding mode controlling method for reducing contour errors of machine tools. *Journal of Manufacturing Processes*, 2023, 106(3): 407 – 421.
- [21] JIN Hongyan, WANG Lei, ZHAO Ximei. Adaptive nonlinear sliding mode contour control of two-axis direct drive servo feed systems based on friction compensation. *China Mechanical Engineering*, 2023, 34(11): 1335 – 1342.  
(金鸿雁, 王磊, 赵希梅. 基于摩擦补偿的两轴直驱伺服进给系统自适应非线性滑模轮廓控制. 中国机械工程, 2023, 34(11): 1335 – 1342.)
- [22] ZENG Ziqiang, CAO Rongmin, HOU Zhongsheng, et al. Multiple input multiple output model free adaptive contour control for two-dimensional linear motor. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(5): 1007 – 1017.  
(曾子强, 曹荣敏, 侯忠生, 等. 二维直线电机的多入多出无模型自适应轮廓控制. 控制理论与应用, 2020, 37(5): 1007 – 1017.)
- [23] YI-TI S, CHIN-SHENG C. A novel cross-coupling control design for bi-axis motion. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2002, 42(14): 1539 – 1548.
- [24] YANG J Z, LI Z X. A novel contour error estimation for position loop-based cross-coupled control. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2011, 25(4): 16 – 23.
- [25] YANG J X, ALTINTAS Y. A generalized on-line estimation and control of five-axis contouring errors of CNC machine tools. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2015, 88(5): 9 – 23.
- [26] WANG Z, HU C X, ZHU Y, et al. Newton-ILC contouring error estimation and coordinated motion control for precision multi-axis systems with comparative experiments. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(2): 1470 – 1480.
- [27] KUANG Z A, SUN G H, GAO H J. Simplified newton-based CEE and discrete-time fractional-order sliding-mode CEC. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2018, 24(1): 175 – 185.
- [28] WANG Xiaofeng. *Research on Multipoint Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations*. Beijing: Science Publishing House, 2019.  
(王晓锋. 解非线性方程(组)的多点迭代法研究. 北京: 科学出版社, 2019.)
- [29] LI J G, YOU Z Y, LI Y N. Five-axis contour error control based on spatial iterative learning. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2022, 20(1): 112 – 123.
- [30] CHEN W, LIU X. Generalized predictive cross-coupling position control of biaxial motion system. *Control Theory & Applications*, 2018, 65(11): 8488 – 8497.
- [31] CHEN L, NARENDRA K S. Nonlinear adaptive control using neural networks and multiple models. *Automatica*, 2001, 37(8): 1245 – 1255.
- [32] GUAN Zhi, LU Jinfu. *Fundamentals of Numerical Analysis*. Beijing: Higher Education Press, 1998.  
(关治, 陆金甫. 数值分析基础. 北京: 高等教育出版社, 1998.)
- [33] LI H, WANG Y, PANG M. Disturbance compensation based model-free adaptive tracking control for nonlinear systems with unknown disturbance. *Asian Journal of Control*, 2019, 26(36): 1 – 10.
- [34] GHAFARI A, ULISOY A. Dynamic contour error estimation and feedback modification for high-precision contouring. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, 21(6): 1732 – 1741.
- [35] SUN G, MA Z, YU J. Discrete-time fractional order terminal sliding mode tracking control for linear motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 35(8): 3386 – 3394.

#### 作者简介:

黄亮 硕士研究生, 目前研究方向为无模型自适应控制、滑模控制, E-mail: huangliang20210304@163.com;

黄华 教授, 博士研究生导师, 目前研究方向为运动控制、数控技术, E-mail: hh318872@126.com;

赵秋舸 硕士研究生, 目前研究方向为数据驱动控制、神经网络控制, E-mail: 2718593582@qq.com;

梅乐 硕士研究生, 目前研究方向为数据驱动控制、数字孪生技术, E-mail: 2404030632@qq.com.