

## 噪声抑制线性扩张状态观测器频域分析

王立新<sup>1†</sup>, 李金泽<sup>1</sup>, 赵丁选<sup>1</sup>, 王赫<sup>1</sup>, 贾拓<sup>2</sup>

(1. 燕山大学 机械工程学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 燕山大学 车辆与能源学院, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:** 测量噪声放大制约扩张状态观测器增益提高, 影响扰动估计精度, 然而现有噪声抑制扩张状态观测器间缺乏性能的统一比较, 致使工程设计时难以取舍. 为此, 本文以4种常用噪声抑制LESO为研究对象, 建立扰动估计误差传递函数, 利用频域方法系统地分析观测器带宽对扰动估计能力和噪声抑制性能的影响规律, 从扰动估计精度、收敛速度、能量消耗、噪声抑制效果等6个维度对观测器的实用性进行综合评价. 最后, 通过数值仿真对理论分析结果进行验证. 本文研究成果可为噪声抑制扩张状态观测器的工程设计选择提供依据.

**关键词:** 自抗扰控制; 扩张状态观测器; 测量噪声; 频域分析

**引用格式:** 王立新, 李金泽, 赵丁选, 等. 噪声抑制线性扩张状态观测器频域分析. 控制理论与应用, 2026, 43(3): 549 – 558

DOI: 10.7641/CTA.2025.30798

## Frequency domain analysis of LESO with noise suppression

WANG Li-xin<sup>1†</sup>, LI Jin-ze<sup>1</sup>, ZHAO Ding-xuan<sup>1</sup>, WANG He<sup>1</sup>, JIA Tuo<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China;  
2. School of Vehicles and Energy, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

**Abstract:** The amplification of high-frequency measurement noise restricts the gain of extended state observer (ESO) and affects the estimation accuracy of disturbance. However, the lack of uniform performance comparison among existing noise suppression ESOs makes it challenging to choose in engineering practice. Therefore, this paper establishes the disturbance estimation error transmission function for four kinds of noise suppression ESOs and uses the frequency domain method to systematically analyze the influence rule of the observer bandwidth on the disturbance estimation ability and noise suppression performance. The practicability of the observers is evaluated comprehensively from six dimensions: Disturbance estimation accuracy, convergence rate, energy consumption, and noise suppression. Finally, the results of the theoretical analysis are verified by numerical simulation. The research results of this paper can provide a basis for the engineering design selection of noise suppression ESO.

**Keywords:** active disturbance rejection control; extended state observer; measurement noise; frequency domain analysis

**Citation:** WANG Lixin, LI Jinze, ZHAO Dingxuan, et al. Frequency domain analysis of LESO with noise suppression. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(3): 549 – 558

### 1 引言

自抗扰控制 (active disturbance rejection control, ADRC) 由中科院研究员韩京清提出, 具有结构简便、鲁棒性和抗扰性强等优点, 经过几十年的发展, 已逐步成为一种实用性很强的通用控制技术<sup>[1]</sup>. ADRC提出将系统外部扰动和内部不确定性视为“总扰动”, 构建扩张状态观测器对其进行实时估计与补偿, 从而,

将系统转换为“积分器串联”结构, 然后设计简便的线性或非线性控制律实现闭环控制<sup>[2]</sup>. 经过十几年的发展, 以自抗扰控制为基础框架, 衍生了不同结构的扩张状态观测器和众多的高性能控制方法, 如滑模自抗扰、自适应自抗扰、神经网络自抗扰等<sup>[3-4]</sup>, 其中自抗扰控制的线性形式<sup>[5]</sup>以其优秀的工程实用性已在化工过程、伺服运动、电液伺服系统以及DC-DC变换等工

收稿日期: 2023-12-11; 录用日期: 2025-01-10.

†通信作者. E-mail: wx@ysu.edu.cn.

本文责任编辑: 张承慧.

河北省自然科学基金项目(E2024203035), 机械系统与振动全国重点实验室开放基金课题项目(MSV202421), 河北省教育厅科学研究项目(QN2024075), 燕山大学科研培育项目(2022LGQN018)资助.

Supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province (E2024203035), the State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration (MSV202421), the Science Research Project of Hebei Education Department (QN2024075), and the Basic Innovation Research Cultivation Project of Yanshan University (2022LGQN018).

程领域得到广泛应用<sup>[6-9]</sup>.

扩张状态观测器 (extended state observer, ESO) 作为 ADRC 的核心部件, 肩负估计“总扰动”和不可测状态的任务, 其估计性能决定着系统的整体控制效果. 为使 ESO 具有较快误差估计收敛速度和更小稳态误差, 往往需要较高的观测器增益, 但这不仅会产生数值实现问题, 更主要的是存在状态重构速度、精度与高频测量噪声敏感性之间的折中<sup>[10]</sup>. 高增益导致的测量噪声放大会使执行机构产生振动, 严重时甚至导致系统不稳定, 因此, 如何提高 ESO 的噪声抑制能力是推动 ADRC 工程化的热点研究问题之一<sup>[11]</sup>.

目前, 常采用低通滤波器<sup>[12]</sup>、非线性技术、卡尔曼滤波器<sup>[13]</sup>、设计低功耗结构或级联结构以及增加观测器阶数等方法来减弱高频噪声对 ESO 的影响. 低通滤波器是工程中最常用的一种抗高频噪声方法, 如文献[14]在分析系统测量噪声对 ESO 稳定性影响的基础上, 引入低通滤波器抑制测量噪声; 文献[15]提出将测量输出与观测器输出之差作为滤波器输入, 从而, 有效避免了滤波导致的相位滞后, 并获得了较好的噪声抑制效果; 文献[16]将这项研究成果与 ESO 相结合, 获得了较好的控制效果; 文献[17]提出一种非线性高增益观测器, 瞬态响应时采用较大增益, 加快估计误差收敛速度, 进入稳态后采用较小的观测器增益, 以降低测量噪声的影响; 文献[18]采用自适应方法, 根据测量输出和估计输出的平方范数大小, 自动调节观测器增益, 寻求估计性能和噪声放大间的平衡, 从而降低高频噪声的影响; 类似地, 文献[19]设计了观测器增益切换策略, 通过降低增益均值达到抑制噪声的目的; 文献[20-23]则聚焦于低功率 ESO 结构的改进设计, 即在确保扰动估计精度前提下, 减小观测器增益, 降低噪声敏感性; 文献[24]提出了一种级联 ESO (cascade ESO, CESO), 其将“总扰动”等效为多个分项和, 并以前一级 ESO 输出作为下一级 ESO 输入, 由于测量噪声仅出现在第 1 级, 从而, 有效避免高频噪声放大效应; 文献[25]通过积分方法将测量输出构建为虚拟状态变量, 提高系统阶次, 削弱高增益带来的噪声放大效应.

上述技术的运用均对高频测量噪声起到了较好的抑制效果, 但是具体到特定的应用场景, 对前述方法的选择仍面临困难. 将不同技术融合到 ESO 中, 增强了噪声抑制能力, 同时, 也使控制结构变得复杂(级联和低功率<sup>[20-24]</sup>), 增加参数整定难度(提高观测器阶次<sup>[25]</sup>), 增大系统输出滞后或使理论分析变得更加困难(非线性、饱和函数<sup>[17-18]</sup>). 因此, 面对实际工况, 如何选择适宜的噪声抑制 ESO 是亟待解决的问题, 特别是缺乏对噪声抑制 ESO 性能的统一分析标准. 基于上述分析, 本文从频域角度对常用噪声抑制方法的抗扰性能和噪声抑制能力进行分析, 并从动态和稳态 2 个

方面、6 个维度对不同噪声抑制 ESO 的综合性能进行较为全面、客观的比较, 为工程设计选择提供参考.

基于前述讨论, 本文将利用频域分析工具深刻揭示将不同噪声抑制技术引入到 ESO 中后, 对抗扰能力和噪声抑制性能的影响规律, 为其工程实用化提供参考. 本文的贡献包括两个方面: 1) 建立了在扰动和测量噪声双重作用下, 不同噪声抑制 ESO 的扰动估计误差传递函数, 分析了频率响应特性; 2) 将不同的噪声抑制方法扰动估计能力和噪声抑制性能比较统一到频域范围内, 建立直观、公平的对比方法, 从 6 个维度衡量观测器的综合性能.

文章余下部分安排如下: 第 2 节, 描述一般含测量噪声的系统, 回顾标准二阶线性自抗扰控制方法; 第 3 节, 利用频域方法依次分析标准及 4 种噪声抑制扩张状态观测器的扰动估计性能、高频噪声抑制能力, 对几种改进型 ESO 进行综合对比; 第 4 节, 以某二阶运动控制系统为例, 通过数值仿真验证本文的理论结果; 第 5 节, 对全文内容进行总结.

## 2 问题描述与预备知识

### 2.1 系统描述

考虑如下带有测量噪声和不确定性的二阶单输入单输出系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) + w(t) + bu, \\ y_0 = x_1 + v, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_1, x_2$  为系统的状态变量;  $g(x_1, x_2)$  为系统内部不确定动态;  $w(t)$  为未知外部扰动;  $b$  为控制增益;  $u$  为控制输入;  $y_0$  为包含高频噪声  $v$  的测量输出.

取常数  $b_0$  为控制增益  $b$  的估计, 则  $(b - b_0)u$  作为估计误差扰动, 将系统中的不确定性、外部扰动扩张为新状态  $x_3 = f = g(x_1, x_2) + w(t) + (b - b_0)u$ , 即系统“总扰动”, 定义其一阶导数  $\dot{x}_3 = h$ , 取  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ , 则系统(1)的状态方程可重新描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + b_0 u, \\ \dot{x}_3 = h, \\ y_0 = x_1 + v. \end{cases} \quad (2)$$

### 2.2 线性自抗扰控制器

针对系统(2)构造线性扩张状态观测器

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \beta_1(y_0 - z_1), \\ \dot{z}_2 = z_3 + b_0 u + \beta_2(y_0 - z_1), \\ \dot{z}_3 = \beta_3(y_0 - z_1), \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$  为系统状态及“总扰动”的估计;  $\mathbf{L} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T$  为观测器增益向量, 利用“带宽

法”<sup>[5]</sup>可将观测器的特征值都配置在 $-\omega_0$ 处, 得 $\beta_1 = 3\omega_0, \beta_2 = 3\omega_0^2, \beta_3 = \omega_0^3, \omega_0$ 为观测器带宽.

假设观测器输出 $z$ 可完全跟踪系统状态 $x$ , 设计满足闭环控制性能的控制律为

$$u = \frac{k_1(r - z_1) + k_2(\dot{r} - z_2) + \ddot{r} - z_3}{b_0}, \quad (4)$$

其中:  $r$ 和 $\dot{r}$ 为期望跟踪信号及其微分;  $k_1$ 和 $k_2$ 为状态误差反馈控制增益, 同样将闭环系统极点配置在 $-\omega_c$ 处, 得 $k_1 = \omega_c^2, k_2 = 2\omega_c, \omega_c$ 为控制器带宽.

### 3 测量噪声对ESO性能的影响分析

#### 3.1 标准LESO

定义LESO的估计误差为 $\tilde{x}_i = z_i - x_i, i = 1, 2, 3$ , 则ESO输出与测量输出 $y_0$ 的误差为 $e = z_1 - y_0 = \tilde{x}_1 - v$ , 用式(3)减式(2)得LESO的估计误差方程为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -3\omega_0\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + 3\omega_0v, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -3\omega_0^2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3 + 3\omega_0^2v, \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\omega_0^3\tilde{x}_1 - h + \omega_0^3v. \end{cases} \quad (5)$$

以估计误差 $\tilde{x}_i(i = 1, 2, 3)$ 为输出, 以测量噪声 $v$ 和“总扰动” $f$ 为输入, 对式(5)进行拉普拉斯变换, 得到估计误差的传递函数为

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(s) = \frac{3\omega_0s^2 + 3\omega_0^2s + \omega_0^3}{(s + \omega_0)^3}v - \frac{s}{(s + \omega_0)^3}f, \\ \tilde{x}_2(s) = \frac{3\omega_0^2s^2 + \omega_0^3s}{(s + \omega_0)^3}v - \frac{s^2 + 3\omega_0s}{(s + \omega_0)^3}f, \\ \tilde{x}_3(s) = \frac{\omega_0^3s^2}{(s + \omega_0)^3}v - \frac{s^3 + 3\omega_0s^2 + 3\omega_0^2s}{(s + \omega_0)^3}f. \end{cases} \quad (6)$$

##### 1) 扰动估计性能分析.

首先, 考虑阶跃、斜坡等典型扰动的稳态估计误差, 假设扰动幅值为 $K$ , 则根据终值定理可得

$$\begin{cases} \tilde{x}_3(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^3 + 3\omega_0s^2 + 3\omega_0^2s}{(s + \omega_0)^3} \cdot \frac{K}{s} = 0, \\ \tilde{x}_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^3 + 3\omega_0s^2 + 3\omega_0^2s}{(s + \omega_0)^3} \cdot \frac{K}{s^2} = \frac{3K}{\omega_0}. \end{cases} \quad (7)$$

由上式计算结果可知, 对于阶跃扰动, LESO的估计误差总可以趋于0, 而对于斜坡扰动, 扰动估计误差为一常数值, 且带宽越大, 估计误差越小.

下面讨论LESO对时变扰动的估计能力. 由式(6)可知, 仅观测器带宽 $\omega_0$ 影响测量噪声和扰动估计传递函数频率特性, 首先分析带宽 $\omega_0$ 对扰动估计误差的影响. 取观测器带宽 $\omega_0 = [10 \ 20 \ 50 \ 100 \ 200]$ , 忽略噪声影响( $v = 0$ ), 绘制 $\tilde{x}_3(s)$ 的Bode图, 如图1所示.

图1中, 低频段频率特性曲线斜率为20 dB/dec, 即LESO对低频扰动具有较高的估计精度, 且带宽越高

估计误差越小, 可处理的频率范围也更宽. 然而, 随着扰动频率增加, 估计误差逐步增大, 表明LESO处理高频扰动的能力有限.

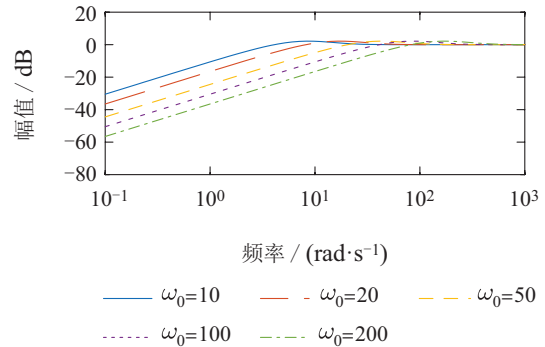


图1 LESO扰动估计频率响应

Fig. 1 Frequency responses of disturbance estimation for LESO

##### 2) 噪声抑制性能分析.

类似地, 忽略“总扰动”的影响, 即令 $f = 0$ , 仍然取 $\omega_0 = [10 \ 20 \ 50 \ 100 \ 200]$ , 绘制 $\tilde{x}_3(s)$ 的Bode图, 如图2所示. 从图中可知随着 $\omega_0$ 增大, 在低频段, 频率特性曲线的斜率是20 dB/dec, 在高频段, 频率特性曲线的斜率是-20 dB/dec, 且 $\omega_0$ 越大, 噪声的放大效应越强, 不同带宽对应的噪声放大倍数峰值变化趋势如图3所示, 可见随着带宽增加, 噪声放大倍数以指数速率增长. 实际上, 噪声以高阶微分形式通过“总扰动”通道进入系统, 进而产生噪声放大效应.

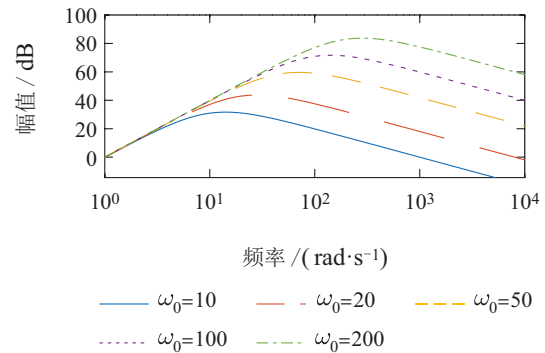


图2 LESO噪声抑制频率响应

Fig. 2 Frequency responses of noise suppression for LESO

### 3.2 低通滤波LESO

下面采用工程中常用的低通滤波器对测量信号 $y_0$ 进行滤波, 将滤波后的信号输入到LESO中, 以降低测量噪声的影响. 一阶低通滤波器形式如下:

$$G_F(s) = \frac{Y_f(s)}{Y_0(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad (8)$$

其中 $\tau$ 为滤波器时间常数.

引入低通滤波器后, 扩张状态观测器(3)变为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \beta_1(y_f - z_1), \\ \dot{z}_2 = z_3 + b_0 u + \beta_2(y_f - z_1), \\ \dot{z}_3 = \beta_3(y_f - z_1). \end{cases} \quad (9)$$

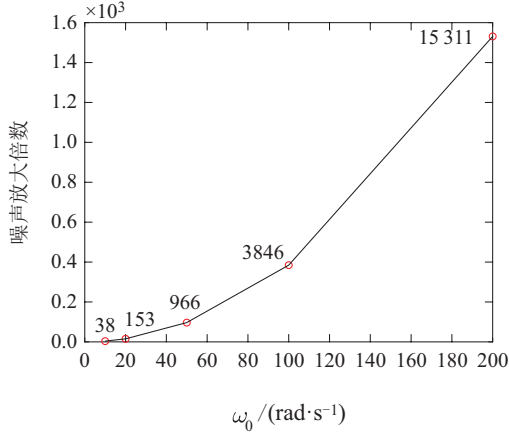


图3 LESO带宽与噪声放大间的关系

Fig. 3 The relationship between LESO bandwidth and noise amplification

由式(9)可知,  $z_1$  追踪低通滤波器输出  $y_f$ , 而非  $y_0$ , 低通滤波器在消除高频测量噪声的同时, 还会降低系统输出幅值, 增加相位滞后, 导致输出延迟, 这种系统实际输出与滤波器输出间的差异会被 LESO 放大, 产生控制惯性, 严重时甚至会破坏闭环系统稳定性<sup>[14]</sup>.

引入低通滤波器后, LESO 输出与测量输出的误差为  $e = z_1 - y_0 = \tilde{x}_1 - v + \tau \dot{y}_f$ , 类似地, 可得到估计误差关于总扰动和测量噪声的传递函数为

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(s) = [(\Delta(s) - s^3)(G_F(s)v - Q(s)) - s f] / \Delta(s), \\ \tilde{x}_2(s) = [(3\omega_0^2 s^2 + \omega_0^3 s)(G_F(s)v - Q(s)) - (s^2 + 3\omega_0 s) f] / \Delta(s), \\ \tilde{x}_3(s) = [\omega_0^3 s^2 (G_F(s)v - Q(s)) - (s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s) f] / \Delta(s), \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $Q(s) = \tau s G_F(s) X_1(s)$ ,  $\Delta(s) = (s + \omega_0)^3$ .

1) 扰动估计性能分析.

由式(2)知  $X_1(s)s^2 = f + b_0 U(s)$ , 在系统输出端串联低通滤波器后, 扰动估计误差传递函数为

$$\tilde{x}_3(s) = \frac{\omega_0^3 \tau s G_F(s) + (s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s) f}{\Delta(s)}. \quad (11)$$

忽略测量噪声 ( $v = 0$ ), 取观测器带宽  $\omega_0 = 100$ , 滤波时间常数  $\tau = [0.01 \ 0.02 \ 0.05]$ , 绘制如图4所示 Bode图. 可以发现, 与 LESO 相比较, F-LESO 的扰动估计精度下降, 且随着滤波时间常数的增大而降低, 即滤波作用越强, 扰动估计精度越低.

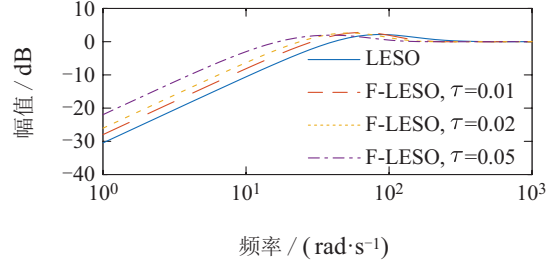


图4 F-LESO扰动估计频率响应

Fig. 4 Frequency responses of disturbance estimation for F-LESO

2) 噪声抑制性能分析.

忽略“总扰动”的影响, 即令  $f = 0$ , 同样取  $\omega_0 = 100$ ,  $\tau = [0.01 \ 0.02 \ 0.05]$ , 绘制扰动估计误差测量噪声的 Bode图, 如图5所示.

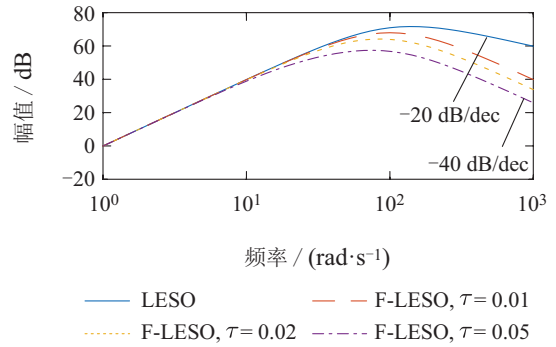


图5 噪声抑制频率响应

Fig. 5 Frequency responses of noise suppression for F-LESO

从图中可以发现, 与 LESO 相比较, F-LESO 高频段频域特性曲线下降斜率为  $-40 \text{ dB/dec}$ , 即对高频测量噪声的抑制作用得到改善, 且随着滤波时间常数的增加, 噪声抑制效果越好, 噪声放大效应也越弱. 由此可见, 在选择滤波常数时应综合考虑扰动估计精度和噪声抑制效果, 通常应小于  $1/\omega_0$ <sup>[23]</sup>.

### 3.3 改进的F-LESO

为消除低通滤波器导致的输出幅值下降和相位滞后, 文献[16]中提出一种改进的低通滤波 LESO, 其与 F-LESO 对比结构如图6所示.

由图6可知, IF-LESO 将低通滤波器内嵌到标准扩张状态观测器中, 即滤波器的输入为系统测量输出  $y_0$  与观测器输出  $z_1$  之差, 滤波器的输出作为观测器输入, 从而利用扩张状态观测器对低通滤波滞后进行估计补偿, 重新构造 LESO 为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \beta_1 y_f, \\ \dot{z}_2 = z_3 + \beta_2 y_f + b_0 u, \\ \dot{z}_3 = \beta_3 y_f, \\ \dot{y}_f = -\frac{1}{\tau} y_f + \frac{1}{\tau} (y_0 - z_1), \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\tau$ 为滤波器时间常数. 同样计算IF-LESO估计误差关于总扰动和测量噪声的传递函数为

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(s) = [(\tau s + 1)/\Delta(s)]h \\ \quad - [(\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3)/\Delta(s)]v, \\ \tilde{x}_2(s) = [(\tau s^2 + s + \beta_1)/\Delta(s)]h - \\ \quad [(\beta_2 s^2 + \beta_3 s)/\Delta(s)]v, \\ \tilde{x}_3(s) = [(\tau s^3 + s^2 + \beta_1 s + \beta_2)/\Delta(s)]h - \\ \quad [\beta_3 s^2/\Delta(s)]v, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\Delta(s) = \tau s^4 + s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3$ .

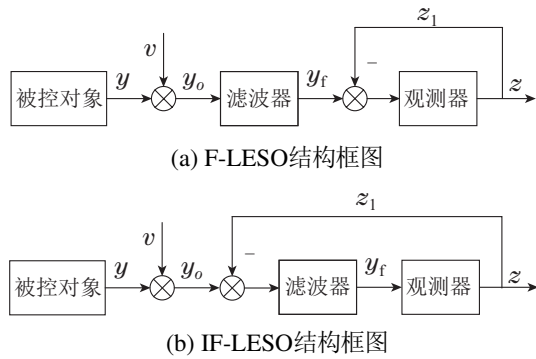


图6 IF-LESO与F-LESO结构对比

Fig. 6 Structure comparison of IF-LESO and F-LESO

1) 扰动估计性能分析.

为实现扰动和状态估计的分离, 增加参数调节的自由度<sup>[16]</sup>, 观测器参数取为 $\beta_1 = 2\omega_0$ ,  $\beta_2 = \omega_0^2$ ,  $\beta_3 = k_3\beta_2$ , 且设 $k_3 = 0.8\omega_0$ . 由式(13), 忽略测量噪声( $v = 0$ ), IF-LESO的扰动估计误差为

$$\tilde{x}_3(s) = \frac{\tau s^4 + s^3 + 2\omega_0 s^2 + \omega_0^2 s}{\tau s^4 + s^3 + 2\omega_0 s^2 + \omega_0^2 s + k_3 \omega_0^2} f. \quad (14)$$

取 $\tau = 0.01$ ,  $\omega_0 = [10 \ 20 \ 50 \ 100]$ , 绘制Bode图. 如图7所示, 从图中可以发现, 横向比较, 取相同带宽时, IF-LESO比F-LESO的扰动估计精度要高大约20倍. 纵向比较时, 随着滤波时间常数的增大, 估计精度逐步降低, 而且估计高频扰动时, 会产生较大的超调, 这是IF-LESO较为明显的缺点.

2) 噪声抑制性能分析.

忽略总扰动( $f = 0$ ), 得到噪声关于扰动估计误差的传递函数为

$$\tilde{x}_3(s) = \frac{-k_3 \omega_0^2 s^3}{\tau s^4 + s^3 + 2\omega_0 s^2 + \omega_0^2 s + k_3 \omega_0^2} v. \quad (15)$$

观测器参数保持不变, 仍然取 $k_3 = 0.8\omega_0$ ,  $\omega_0 = [10 \ 20 \ 50 \ 100]$ , 滤波时间常数 $\tau = 0.01$ , 绘制Bode图, 如图8所示. 从图中可以发现, 与F-LESO相比较, IF-LESO对高频段测量噪声的抑制作用改善效果并不明显. 但结合扰动估计频域特性曲线, 可知在相同带

宽取值前提下, 扰动估计精度提高, 但是噪声放大倍数并未增加.

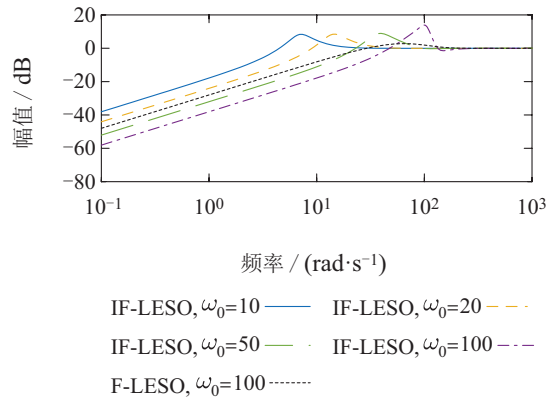


图7 IF-LESO扰动估计频率响应

Fig. 7 Frequency responses of disturbance estimation for IF-LESO

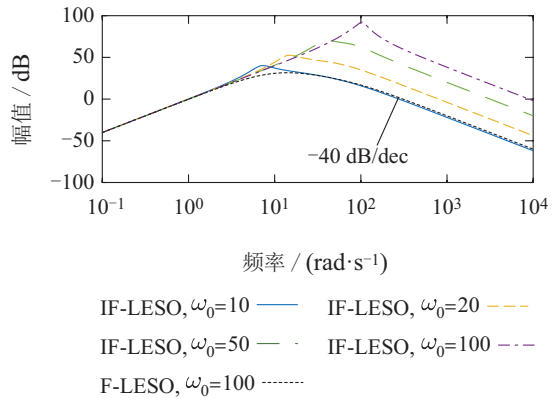


图8 IF-LESO噪声抑制频率响应

Fig. 8 Frequency responses of noise suppression for IF-LESO

3.4 虚拟状态扩充LESO

文献[25]中提出一种将含噪声的测量输出通过积分方式, 扩张为虚拟状态变量, 即重新描述系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 + v, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + b_0 u, \\ \dot{x}_3 = h, \\ \dot{y}_0 = x_1 + v, \end{cases} \quad (16)$$

其中:  $x_0 \triangleq \int_0^t [x_1(\tau) + v(\tau)] d\tau$ 为扩张的虚拟状态变量, 其余状态变量的含义不变.

针对系统(16)构造新的扩张状态观测器为

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = z_1 + \beta_0 \varepsilon_0, \\ \dot{z}_1 = z_2 + \beta_1 \varepsilon_0, \\ \dot{z}_2 = z_3 + \beta_2 \varepsilon_0 + b_0 u, \\ \dot{z}_3 = \beta_3 \varepsilon_0, \end{cases} \quad (17)$$

其中 $\varepsilon_0 = x_0 - z_0$ .

此时, V-LESO输出与测量输出的误差为  $e = z_1 - y_0 = \tilde{x}_1 - v$ . 观测器的估计误差为

$$\varepsilon_0^{(4)} + \beta_0 \varepsilon^{(3)} + \beta_1 \ddot{\varepsilon}_0 + \beta_2 \dot{\varepsilon}_0 + \beta_3 \varepsilon_0 = h + v^{(3)}. \quad (18)$$

通过构建虚拟状态, 实现了观测器增益与测量噪声间的解耦, 从而降低噪声的影响. 进一步整理得传递函数为

$$\begin{cases} \tilde{x}_0(s) = [s/\Delta(s)]f + [s^3/\Delta(s)]v, \\ \tilde{x}_1(s) = [(s^2 + \beta_0 s)/\Delta(s)]f - [(\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3)/\Delta(s)]v, \\ \tilde{x}_2(s) = [(s^3 + \beta_0 s^2 + \beta_1 s)/\Delta(s)]f - [(\beta_2 s^2 + \beta_3 s)/\Delta(s)]v \\ \tilde{x}_3(s) = [(s^4 + \beta_0 s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s)/\Delta(s)]f - [\beta_3 s^2/\Delta(s)]v, \end{cases} \quad (19)$$

其中  $\Delta(s) = s^4 + \beta_0 s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3$ .

1) 扰动估计性能分析.

根据式(19), 忽略测量噪声 ( $v = 0$ ), V-LESO的扰动估计误差传递函数为

$$\tilde{x}_3(s) = \frac{s^4 + \beta_0 s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s}{\Delta(s)} f. \quad (20)$$

由于扩张状态观测器阶次升高, 其增益重新整定为  $\beta_0 = 4\omega_0, \beta_1 = 24\omega_0^2, \beta_2 = 32\omega_0^3, \beta_3 = 16\omega_0^4$ , 取  $\omega_0 = [10 \ 20 \ 50 \ 100]$ , 绘制Bode图, 如图9所示. 从图中可以发现, V-LESO的扰动估计误差传递函数频率响应曲线变化趋势与LESO基本相同, 但在观测器增益取值相同时, V-LESO的估计精度更高.

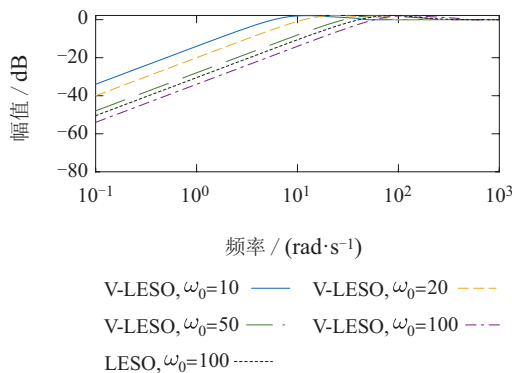


图9 V-LESO扰动估计频率响应

Fig. 9 Frequency responses of disturbance estimation for V-LESO

2) 噪声抑制性能分析.

忽略总扰动 ( $f = 0$ ), 扰动估计误差传递函数为

$$\tilde{x}_3(s) = \frac{\beta_3 s^2}{\Delta(s)} v. \quad (21)$$

仍然取  $\omega_0 = [10 \ 20 \ 50 \ 100]$ , 绘制Bode图, 如图

10所示. 从图中可以发现, 与LESO相比较, V-LESO高频段频域特性曲线下斜率增加了20 dB/dec, 表明具有更好的测量噪声抑制效果. 但是V-LESO的增益无法完全沿用“带宽法”整定, 是其存在的最大缺点.

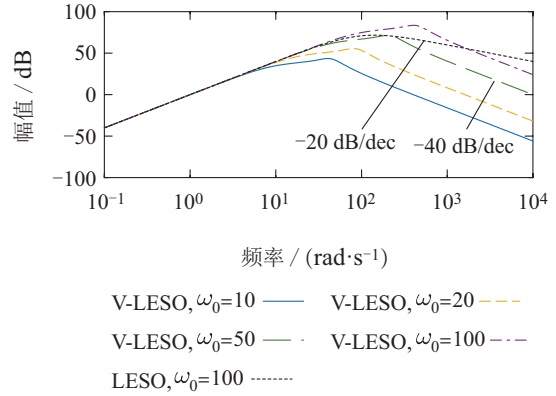


图10 V-LESO噪声抑制频率响应

Fig. 10 Frequency responses of noise suppression for V-LESO

3.5 串级ESO

文献[24]中提出了一种级联结构的改进型扩张状态观测器 (CESO), 其结构如图11所示. CESO将“总扰动”划分为扰动分项之和, 扰动分项个数与级联个数相同. 由于测量噪声仅在第1级ESO中出现, 从而避免了噪声放大效应. 但文献[24]中未对CESO频域特性进行分析, 使得实际应用时, 级联个数选择和参数选取并不明确.

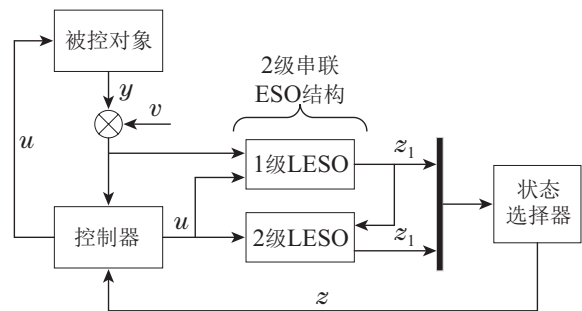


图11 CESO结构框图

Fig. 11 CESO structure block diagram

下面以2级CESO为例, 对其进行频域分析, 2级CESO的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{z}_{i,1} = \hat{z}_{i,2} + 3\omega_{0i}(y_i - z_{i,1}), \\ \dot{z}_{i,2} = \sum_{k=1}^i z_{i,k} + b_0 u + 3\omega_{0i}^2(y_i - z_{i,1}), \\ \dot{z}_{i,3} = \omega_{0i}^2(y_i - z_{i,1}), \end{cases} \quad (22)$$

其中:  $y_i = z_{i-1,1} (i = 2, \dots, N), y_1 = y_0$ .

对式(22)进行拉氏变换, 可求得2级串联CESO输出的传递函数为

$$\left\{ \begin{aligned} z_{2,1}(s) &= [((\Delta_1(s) - s^3)(\Delta_2(s) - s^3) + \\ &\quad s^3\omega_{01}^3)y_0(s) + b_0(\Delta_1(s) + \Delta_2(s) - \\ &\quad s^3 - \omega_{01}^3)su(s)]/\Delta_1(s)\Delta_2(s), \\ z_{2,2}(s) &= [((\omega_{02}^3 + 3s\omega_{02}^2)(\Delta_1(s) - s^3)s + \\ &\quad s^4\omega_{01}^3 + 3s^3\omega_{01}^3\omega_{02})y_0(s) + ((3s\omega_{02}^2 + \\ &\quad \omega_{02}^3)s^2 + (s^2 + 3s\omega_{02})(\Delta_1(s) - \\ &\quad \omega_{01}^3))b_0u(s)]/\Delta_1(s)\Delta_2(s), \\ \hat{f}(s) &= [\omega_{01}^3\Delta_2(s) + \omega_{02}^3(3\omega_{01}s^2 + 3\omega_{01}^2s)] \times \\ &\quad (s^2y_0(s) - b_0u(s))/\Delta_1(s)\Delta_2(s), \end{aligned} \right. \quad (23)$$

其中:  $\Delta_i(s) = (s + \omega_{01})^3, i = 1, 2; \hat{f}(s) = z_{1,3} + z_{2,3}$ .

1) 扰动估计性能分析.

定义  $e_i = z_{2,i} - x_i, i = 1, 2$ . 忽略测量噪声影响 ( $v = 0$ ), 得到扰动对估计误差的传递函数为

$$\begin{aligned} e_f(s) &= s^2f[s^4 + 3(\omega_{01} + \omega_{02})s^3 + \\ &\quad (3\omega_{01}^2 + 3\omega_{02}^2 + 9\omega_{01}\omega_{02})s^2 + \\ &\quad 9\omega_{01}\omega_{02}(\omega_{01} + \omega_{02})s + \omega_{02}^2s + \\ &\quad 9\omega_{01}^2\omega_{02}^2]/\Delta_1(s)\Delta_2(s). \end{aligned} \quad (24)$$

取  $\omega_{01} = [10 \ 20 \ 50 \ 100]$ , 根据文献[24], 可取第2级 LESO 的带宽  $\omega_{02} = 2\omega_{01}$ , 绘制 Bode 图, 如图 12 所示. 从图中可以发现, 与传统 LESO 相比较, CESO 的扰动估计精度具有很大改善作用, 低频段频率特性曲线斜率为 40 dB/dec, 是 LESO 的两倍, 因此 CESO 可以使斜坡扰动的估计误差为 0. 对于高频扰动 CESO 与 LESO 的性能相当, 但 CESO 对扰动估计存在较小的超调.

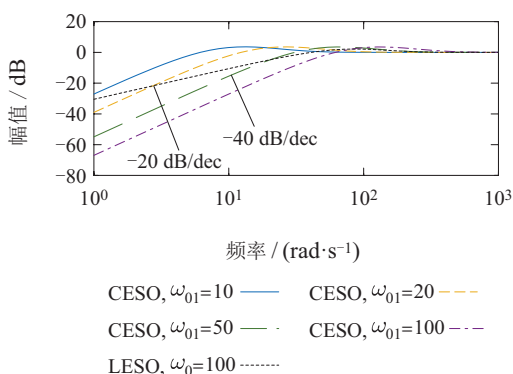


图 12 CESO 扰动估计频率响应

Fig. 12 Frequency responses of disturbance estimation for CESO

2) 噪声抑制性能分析.

假设总扰动 ( $f = 0$ ), 由式(23)得到测量噪声对估计误差的传递函数为

$$e_f(s) = -s^2 \frac{\omega_{01}^3\Delta_2(s) + \omega_{02}^3(3\omega_{01}s^2 + 3\omega_{01}^2s)}{\Delta_1(s)\Delta_2(s)}v. \quad (25)$$

结合图12, 在考虑扰动估计精度近似相当的前提下, 取  $\omega_0 = 100, \omega_{01} = [10 \ 20 \ 50]$ , 绘制 Bode 图, 如图 13 所示. 从图中可以发现, 当 CESO 观测器增益  $\omega_{01}$  为 LESO 带宽  $\omega_0$  一半时, CESO 对高频噪声抑制能力仍然比 LESO 强.

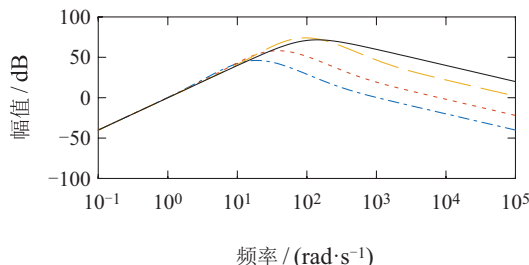


图 13 CESO 噪声抑制频率响应

Fig. 13 Frequency responses of noise suppression for CESO

4 数值仿真

本文以文献[16]中的二阶运动控制系统作为数值仿真案例, 系统动态模型为

$$\ddot{y}(t) = -1.41\dot{y}(t) + 23.2u(t) + w(t), \quad (26)$$

其中:  $y(t)$  为输出,  $u(t)$  为控制信号,  $w(t)$  为扰动.

为验证各类噪声抑制扩张状态观测器的性能, 选用 MATLAB/Simulink 中的白噪声模块, 将其叠加到输出端, 其噪声强度设置为  $1e-9$ , 采样时间设置为 0.001 s, 为了更加准确评估 5 种扩张状态观测器的扰动估计能力和噪声抑制效果, 定义如下 3 个性能指标:

$$J_z = \int_{t_0}^T |\tilde{x}_3(t)| dt, \quad (27)$$

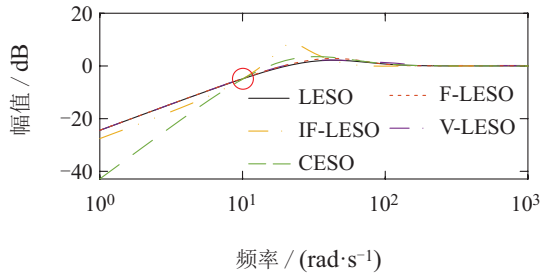
$$J_e = \int_{t_0}^T |e(t)| dt, \quad (28)$$

$$M = \int_{t_0}^T u^2 dt, \quad (29)$$

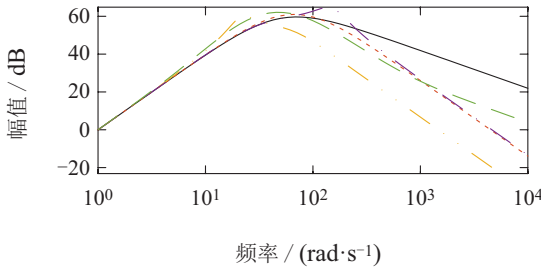
其中:  $J_z$  衡量对扰动的估计精度;  $J_e$  衡量轨迹跟踪性能, 间接反应噪声抑制效果;  $M$  衡量能量消耗.

为保证噪声抑制效果对比的公平性, 通过频率特性曲线调节 5 种 ESO 参数, 使其在无噪声状态下的扰动估计精度基本相等, 频率特性曲线如图 14 所示.

由图 14 可知, 通过调节观测器增益, 5 种观测器的扰动估计误差频率特性曲线约在 10 rad/s 处相交, 故仿真过程中, 在 3.5 s 处施加频率为 10 rad/s 的正弦扰动, 即  $w(t) = 0.5 \sin(10t/2\pi)$ . 此外, 噪声抑制频率曲线相交点对应的噪声频率约为 1000 rad/s, 这与噪声仿真参数设置相对应. 根据图 14 得到的观测器参数整定结果如表 1 所示. 仿真中闭环控制器的控制参数  $b_0$  和  $\omega_c$  保持不变.



(a) 扰动估计频率特性曲线



(b) 噪声抑制频率特性曲线

图 14 不同噪声抑制LESO频率响应

Fig. 14 Frequency responses of noise suppression for different LESO

表 1 仿真参数

Table 1 The parameters of simulation

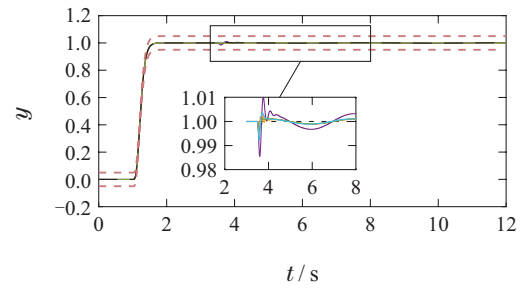
	$b_0$	$\omega_c$	观测器参数
LESO	23.2	50	$\omega_0 = 50 \text{ rad/s}$
F-LESO	23.2	50	$\omega_0 = 60 \text{ rad/s}, \tau = 0.01$
IF-LESO	23.2	50	$\omega_0 = 30 \text{ rad/s}, \beta_1 = 2\omega_0$ $\beta_2 = \omega_0^2, \beta_3 = 0.8\omega_0^3, \tau = 0.01$
V-LESO	23.2	50	$\omega_0 = 34 \text{ rad/s}, \beta_0 = 4\omega_0$ $\beta_1 = 24\omega_0^2, \beta_2 = 32\omega_0^3$ $\beta_3 = 16\omega_0^4$
CESO	23.2	50	$\omega_{01} = 25 \text{ rad/s}, \omega_{02} = 2\omega_{01}$

1) 无测量噪声.

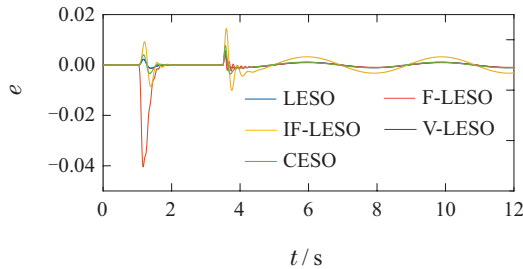
首先, 考察在无测量噪声环境下, 5种ESO的控制效果如图15所示. 从如图15可以看出, 利用扰动估计误差频率特性曲线调节的观测器增益, LESO, V-LESO, IF-LESO, F-LESO的扰动估计精度基本相近, CESO的估计精度明显更高, 其次系统输出跟踪误差最大的是IF-LESO, 这和观测器的增益选取有关; 若系统输出无噪声影响, 增加低通滤波后产生较大输出滞后, 甚至产生振荡, 导致系统不稳定, CESO, V-LESO相对影响较小; 在能量消耗方面, 在无噪声的情况下, 几种观测器的能量消耗基本相等.

2) 有测量噪声.

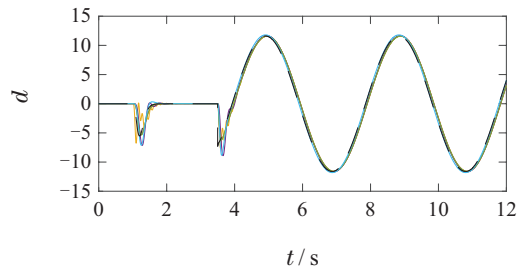
在前述仿真环境基础上, 在系统输出端叠加测量噪声, 5种观测器的控制效果如图16所示.



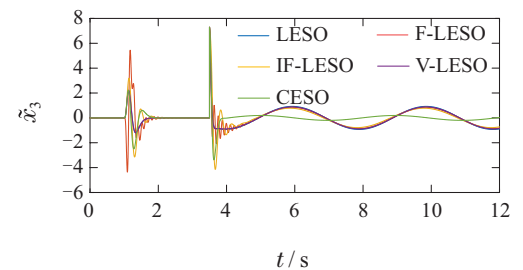
(a) 输出跟踪曲线



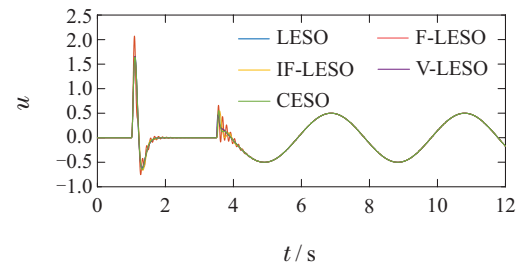
(b) 跟踪误差曲线



(c) 扰动估计曲线



(d) 控制量曲线



(e) 噪声抑制频率特性曲线

图 15 无测量噪声的仿真结果

Fig. 15 Simulation results without measurement noise

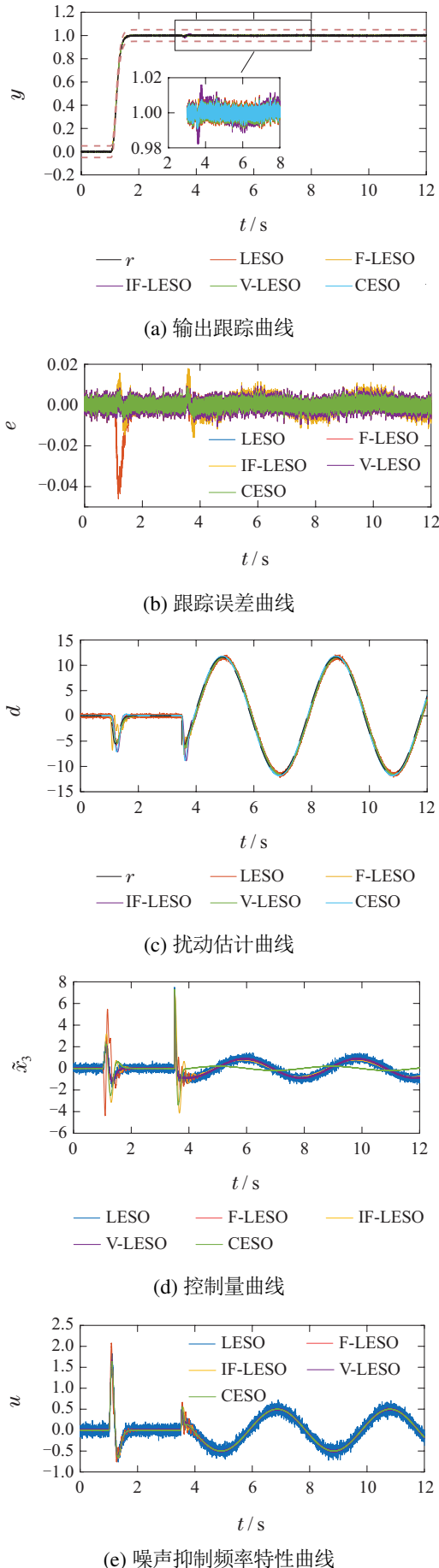


图 16 含测量噪声的仿真结果

下面从动态指标和稳态指标两个方面充分考察 ESO 的综合性能. 选取扰动估计收敛时间  $t_s$ 、峰值时间  $t_p$  以及超调量绝对值  $|\sigma_p|$  作为动态指标. 取 4~8 s 的数据为样本, 计算式(27)–(29)所描述的 3 个稳态性能指标, 结果如表 2 所示. 由表 2 中的扰动观测误差可知, 4 种改进的 LESO 均展现了一定的噪声抑制能力, 噪声抑制效果最好的是 CESO, 其次依次为 IF-LESO, V-LESO 以及 F-LESO, 特别是对扰动跟踪速度和精度方面, CESO 具有非常大的潜力. 此外, 在噪声环境中, LESO 消耗的能量是最高的, 其他几种观测器几乎没有太大变化, 这是噪声抑制效果的体现.

表 2 性能指标

Table 2 The Performance indexes

测试条件	观测器	性能指标					
		$t_s$	$t_p$	$ \sigma_p $	$J_e$	$M$	$J_z$
无噪声	LESO	0.16	0.13	1.35	2.8	0.492	2.386
	F-LESO	1.24	0.08	0.42	2.4	0.492	2.364
	IF-LESO	0.93	0.16	1.75	3.4	0.492	2.286
	V-LESO	0.18	0.11	1.06	2.7	0.492	2.274
	CESO	0.36	0.11	0.94	2.8	0.492	0.492
有噪声	LESO	0.17	0.13	1.50	8.6	0.511	2.437
	F-LESO	1.12	0.09	0.38	9.2	0.492	2.204
	IF-LESO	1.05	0.15	1.64	8.4	0.492	2.016
	V-LESO	0.18	0.11	1.06	8.5	0.492	2.075
	CESO	0.37	0.1	0.94	8.3	0.492	0.493

为使评价更加全面、客观, 下面从稳定时间、峰值时间、超调量绝对值、扰动估计精度、输出跟踪精度以及能量消耗等 6 个维度对 5 种状态观测器的性能进行综合评估. 首先, 对 6 个衡量指标进行数值量化处理, 即按每项性能指标最好的 ESO 得最高分, 以此基准, 按比例对其他 ESO 赋分, 绘制如图 17 所示雷达图. 根据工程设计侧重, 结合图 17 选择合适的观测器. 此外, 参数个数反应了观测器结构的复杂程度和调参的难度, 也是实际应用时需要考虑的一个因素.

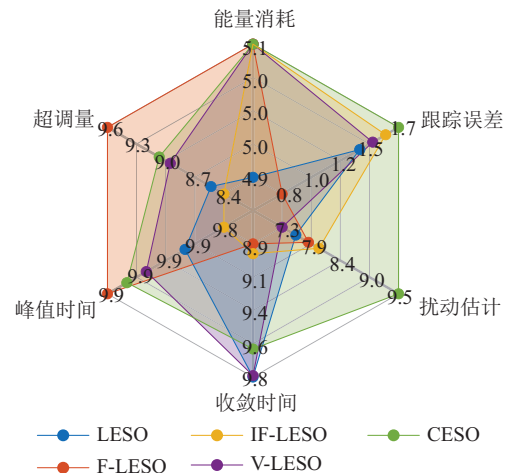


图 17 性能指标雷达图

Fig. 17 Radar chart of performance indicators

## 5 结论

本文针对线性扩张状态观测器中噪声放大导致的扰动估计速度与精度间的折中问题进行了深入研究,利用频域方法对常用的噪声抑制方法进行统一分析对比,获得以下结论:

1) 通过对5种ESO的频域分析可知,通过加入低通滤波器(F-LESO, IF-LESO)、构造虚拟状态量(V-LE-SO)以及串级结构(CESO)都能够起到抑制噪声的效果,总体而言CESO综合性能最好,而IF-LESO的结构更为简单;

2) 取相同带宽, CESO的扰动估计精度更高,对高频噪声的抑制效果更优,能量消耗也更低,在6维性能评估雷达图中CESO的性能最为均衡,且CESO对时变扰动具有相位超前补偿能力,可实现斜坡扰动的无差估计。但CESO容易产生超调,跟踪效果有待提升。

然而,文中所分析的噪声抑制ESO仍不够全面,未来需考虑如卡尔曼滤波+ESO、自适应ESO等研究最新成果的频域分析方法。

## 参考文献:

- [1] HAN J Q. Form PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(3): 900 – 906.
- [2] CHEN S, BAI W Y, HU Y, et al. On the conceptualization of total disturbance and its profound implications. *Science China (Information Sciences)*, 2020, 63(2): 221 – 223.
- [3] TIAN M, WANG B, YU Y, et al. Adaptive active disturbance rejection control for uncertain current ripples suppression of PMSM drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2024, 71(3): 2320 – 2331.
- [4] MADONSKI R, HERBST G, STANKOVIC M. ADRC in output and error form: Connection, equivalence, performance. *Control Theory & Technology*, 2023, 21(1): 56 – 71.
- [5] GAO Z Q. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning. *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Denver: IEEE, 2003: 4989 – 4996.
- [6] WANG Lixin, ZHAO Dingxuan, LIU Fucui, et al. Linear active disturbance rejection control for a class of electro-hydraulic position servo system with light load. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(4): 503 – 515.  
(王立新, 赵丁选, 刘福才, 等. 一类轻载液位位置伺服系统线性自抗扰控制. *控制理论与应用*, 2021, 38(4): 503 – 515.)
- [7] XUE W, ZHANG X, SUN L, et al. Extended state filter based disturbance and uncertainty mitigation for nonlinear uncertain systems with application to fuel cell temperature control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(12): 10682 – 10692.
- [8] AHMAD S, ABDULRAHEEM K K, TOLOKONSKY A O, et al. Active disturbance rejection control of pressurized water reactor. *Annals of Nuclear Energy*, 2023, 189: 109845.
- [9] LAKOMY K, MADONSKI R, DAI B, et al. Active disturbance rejection control design with suppression of sensor noise effects in application to DC-DC buck power converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2021, 69(1): 816 – 824.
- [10] ZHANG Minjie, YANG Lei, HOU Yanze, et al. Improved linear active disturbance rejection controller with denoising performance. *Journal of Astronautics*, 2019, 40(7): 803 – 810.  
(张敏捷, 杨雷, 侯砚泽, 等. 线性自抗扰控制器的噪声抑制改进研究. *宇航学报*, 2019, 40(7): 803 – 810.)
- [11] QIN Huayang, CHEN Zengqiang, SUN Mingwei, et al. Extended state observer based on sliding window real-time wavelet denoising and active disturbance rejection control. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(1): 23 – 30.  
(秦华阳, 陈增强, 孙明玮, 等. 基于滑动窗实时小波降噪的扩张状态观测器及自抗扰控制. *控制理论与应用*, 2022, 39(1): 23 – 30.)
- [12] DAM Q T, THABET R E H, ALI S A, et al. Observer design for a class of uncertain nonlinear systems with sampled-delayed output using high-gain observer and low-pass filter: Application for a quadrotor UAV. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2024, 71(1): 933 – 942.
- [13] SUN H, MADONSKI R, LI S H, et al. Composite control design for systems with uncertainties and noise using combined extended state observer and Kalman filter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(4): 4119 – 4128.
- [14] GAO Yang, WU Wenhai, WANG Zijian. Cascaded linear active disturbance rejection control for uncertain systems with input constraint and output noise. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(3): 843 – 852.  
(高阳, 吴文海, 王子健. 具有输入约束和输出噪声的不确定系统级联线性自抗扰控制. *自动化学报*, 2022, 48(3): 843 – 852.)
- [15] ASTOLFID, ZACCARIAN L, JUNGERS M. On the use of low-pass filters in high-gain observers. *Systems & Control Letters*, 2021, 148: 104856.
- [16] DU Y, CAO W, SHE J. Analysis and design of active disturbance rejection control with an improved extended state observer for systems with measurement noise. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 70(1): 855 – 865.
- [17] PRASOV A A, KHALIL H K. A nonlinear high-gain observer for systems with measurement noise in a feedback control framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 58(3): 569 – 580.
- [18] BATTILOTTI S. Robust observer design under measurement noise with gain adaptation and saturated estimates. *Automatica*, 2017, 81: 75 – 86.
- [19] CHENG Y, CHEN Z, SUN M, et al. Cascade active disturbance rejection control of a high-purity distillation column with measurement noise. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2018, 57(13): 4623 – 4631.
- [20] JUNG S, KIM Y. Low-power peaking-free extended-observer-based pitch autopilot for morphing unmanned aerial vehicle. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2021, 45(2): 362 – 370.
- [21] MOUSAVI S, GUAY M. Noise sensitivity reduction in low-power multi high gain observers using low-pass filters. *IFAC-PapersOnLine*, 2023, 56(1): 79 – 84.
- [22] WU Y, ISIDORI A, MARCONI L. Achieving almost feedback-linearization via low-power extended observer. *IEEE Control Systems Letters*, 2020, 4(4): 1030 – 1035.
- [23] AHMAD S, ALI A. On active disturbance rejection control in presence of measurement noise. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2021, 69(11): 11600 – 11610.
- [24] LAKOMY K, MADONSKI R. Cascade extended state observer for active disturbance rejection control applications under measurement noise. *ISA Transactions*, 2021, 109: 1 – 10.
- [25] MADONSKI R, HERMAN P. Method of sensor noise attenuation in high-gain observers – Experimental verification on two laboratory systems. *IEEE International Symposium on Robotic and Sensors Environments Proceedings*. New York, USA: IEEE, 2012: 121 – 12.

## 作者简介:

王立新 博士研究生, 目前研究方向为流体传动控制技术、自抗扰控制技术, E-mail: wlx@ysu.edu.cn;

李金泽 硕士研究生, 目前研究方向为工程机器人控制技术, E-mail: jinze00036@163.com;

赵丁选 教授, 博士生导师, 目前研究方向为工程机器人、复杂机械系统动力学与仿真、汽车悬挂控制技术等, E-mail: zdx@ysu.edu.cn;

王赫 硕士研究生, 目前研究方向为工程机器人控制技术, E-mail: 2106991162@qq.com;

贾拓 讲师, 硕士生导师, 目前研究方向为机械系统结构优化、建模与仿真等, E-mail: jiatuo@ysu.edu.cn.