

# 时变时滞电力系统负荷频率控制的稳定性分析

翟正亮<sup>1</sup>, 严怀成<sup>2†</sup>, 陈世明<sup>3</sup>, 常雨芳<sup>4</sup>

(1. 南通大学 电气与自动化学院, 江苏 南通 226019; 2. 上海电力大学 人工智能学部, 上海 200090;

3. 华东交通大学 电气与自动化工程学院, 江西 南昌 330013; 4. 湖北工业大学 电气与电子工程学院, 湖北 武汉 430068)

**摘要:** 本文研究时变时滞电力系统负荷频率控制的稳定性问题. 首先, 对电力系统负荷频率控制的高维度模型进行状态解构, 并得到时滞状态和无时滞状态; 然后, 对解构后的系统状态进行重组并得到维度较低的系统模型. 基于低维度的系统模型, 构建新的李雅普诺夫-克劳索夫斯基泛函; 接着, 利用二阶的基于自由矩阵的积分不等式(FMBII)处理泛函微分中的二次乘积项积分. 针对具有非线性项的泛函微分, 使用三次多项式负定条件确立低保守性的稳定判据, 并建立线性矩阵不等式; 最后, 通过仿真实验验证了本文方法的有效性和优越性.

**关键词:** 电力系统负荷频率控制; 时变时滞; 模型重构; 三次多项式负定条件

**引用格式:** 翟正亮, 严怀成, 陈世明, 等. 时变时滞电力系统负荷频率控制的稳定性分析. 控制理论与应用, 2026, 43(3): 499 – 506

DOI: 10.7641/CTA.2025.30802

## Stability analysis of time-varying delayed load frequency control in power systems

ZHAI Zheng-liang<sup>1</sup>, YAN Huai-cheng<sup>2†</sup>, CHEN Shi-ming<sup>3</sup>, CHANG Yu-fang<sup>4</sup>

(1. School of Electrical and Automation, Nantong University, Nantong Jiangsu 226019, China;

2. Faculty of Artificial Intelligence, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200090, China;

3. School of Electrical and Automation Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang Jiangxi 330013, China;

4. School of Electrical and Electronic Engineering, Hubei University of Technology, Wuhan Hubei 430068, China)

**Abstract:** This paper researches the stability problem for time-varying delayed load frequency control in power systems. First of all, the high dimension load frequency control model in power systems is deconstructed to obtain the delayed states and delay free states. Then, these system states are reorganized and a lower dimensional system model is constructed. Based on the lower dimensional system model, a novel Lyapunov-Krasovskii functional is constructed. Next, the integral quadratic terms in the derivative of the functional are estimated by employing the second order free-matrix-based integral inequality (FMBII). For the functional derivative with nonlinear terms, the cubic polynomial negative definite conditions are used to establish the stability criteria and the linear matrix inequalities. Eventually, the effectiveness and superiority of the methods proposed in this paper are proved by some simulation experiments.

**Key words:** load frequency control in power systems; time-varying delay; model reconstruction; cubic polynomial negative definite conditions

**Citation:** ZHAI Zhengliang, YAN Huaicheng, CHEN Shiming, et al. Stability analysis of time-varying delayed load frequency control in power systems. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(3): 499 – 506

## 1 引言

随着互联电网的快速发展, 对于大规模通信网络稳定性的要求越来越高. 庞大的通讯网络有助于电力系统的安全运行和控制. 但是, 信息传输中的通信时滞往往会影响整个电力系统的安全运行<sup>[1-10]</sup>. 因此,

分析时滞对电力系统运行状态的影响变得十分重要. 并且, 众多学者一直致力于获得电网稳定运行时的最大通信时滞. 基于李雅普诺夫-克劳索夫斯基泛函, 可以得出时滞相关的稳定条件, 并用于分析时滞对电力系统负荷频率控制的稳定性的影响. 而且, 得出的稳

收稿日期: 2023-12-12; 录用日期: 2025-04-14.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: hcyan@ecust.edu.cn; Tel.: +86 21-64253376.

本文责任编辑: 杨萃.

国家自然科学基金项目(62333005, 62073143), 上海教委科研创新重大项目(2021-01-07-00-02-E00105), 上海国际合作项目(24510714000)资助. Supported by the National Natural Science Foundation of China (62333005, 62073143), the Innovation Program of Shanghai Municipal Education Commission (2021-01-07-00-02-E00105) and the Shanghai International Science and Technology Cooperation Project (24510714000).

定性条件可以用来计算时滞稳定裕度,即电力系统保持稳定运行状态时的最大时滞范围.所以,李雅普诺夫-克劳索夫斯基泛函得到极大的关注和应用.基于李雅普诺夫-克劳索夫斯基泛函,得出的稳定性判据都是充分条件.所以,降低稳定条件的保守性具有十分重要的理论和现实意义.影响稳定判据保守性的主要因素有两个:一个是李雅普诺夫-克劳索夫斯基泛函的构造;另一个则是积分不等式的使用.并且,这两者是相辅相成和相互依赖的<sup>[11]</sup>.在时滞相关研究的早期阶段,Jensen积分不等式和简单型泛函的组合是得出稳定条件的主要方法<sup>[12]</sup>.虽然这种方法简单方便,但是保守性较高.为了降低保守性,文献[13]提出了Wirtinger-based积分不等式和具有单积分项的增广型泛函.相比于Jensen积分不等式,Wirtinger-based积分不等式更接近于二次乘积项积分.为进一步降低保守性,文献[14]提出了比Wirtinger-based积分不等式更加逼近二次乘积项积分的二阶积分不等式.随着二阶积分不等式的广泛应用,文献[15]提出了包含二重积分项的增广泛函和相应的稳定性判据.但是,这些判据需要额外的状态积分,导致稳定条件具有一定的保守性和较高的计算量.

随着现代化电力系统的发展,负荷频率控制的系统模型维度越来越高,稳定性条件中的计算量也越来越大.为了减少稳定性条件中的计算量,文献[16]将稳定条件中的高维度线性矩阵不等式降维成几个低维度线性矩阵不等式.但是,文献[16]在推导稳定条件时没有考虑负荷频率控制模型的结构特点,导致计算量仍然比较高.基于负荷频率控制模型具有的稀疏性和对称性的结构特点,文献[17]和文献[18]提出了一种模型重构技术.该技术首先将高维系统中的时滞状态和无时滞状态进行分离,然后将系统模型分为时滞相关和时滞无关两个部分.接着,基于低维度的时滞相关部分构造泛函并推导稳定判据,从而可以得到相应的线性矩阵不等式条件.由于时滞相关部分的系统维度远远小于重构前的系统维度,因此得出的稳定性条件的计算量大幅减少.

针对时变时滞电力系统负荷频率控制,目前已经发表了大量的稳定性分析方法.比如,基于简单型泛函和自由权矩阵方法,文献[1]提出了时滞依赖的稳定性判据.为了降低稳定判据的计算量,文献[12]基于Jensen积分不等式和经典逆凸不等式的组合提出了新

的稳定性判据.虽然文献[12]减小了稳定条件的计算量,但是保守性依旧比较高.为了降低稳定判据的保守性,文献[15]使用了二阶的积分不等式以及二重积分项构成的增广泛函.并且,为了将泛函导数构建成时滞的线性多项式,文献[15]引入了4个额外的积分.然而,上述文献中的系统模型没有经过降维处理,稳定条件中的计算量比较高.因此,时变时滞电力系统负荷频率控制的稳定性分析仍然有很大的发展空间.

基于上述的讨论和存在的问题,本文将针对时变时滞电力系统负荷频率控制提出新的稳定性条件.首先,对负荷频率控制的高维度模型进行状态解构,得到时滞状态和无时滞状态;然后,对解构后的系统状态进行重组并得到维度较低的系统模型.基于降维后的系统模型,构造新的增广型泛函并利用二阶基于自由矩阵的积分不等式(free-matrix-based integral inequality, FMBII)处理泛函微分中的二次乘积项积分;接着,通过三次多项式负定条件建立线性矩阵不等式条件,从而获得稳定性判据;最后,通过单区域的负荷频率控制模型验证了本文方法的优越性和有效性.在稳定判据的推导过程中,本文没有引入额外的积分,所以稳定性条件的计算量大幅降低.另外,为了处理二阶FMBII引入的非线性项并得到标准的线性矩阵不等式,本文使用了优化的三次多项式负定条件.

在本文中, $R^{-1}$ 和 $R^T$ 分别表示矩阵 $R$ 的逆和转置; $\mathbb{R}^n$ 为 $n$ 维欧几里得空间; $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 说明矩阵 $R$ 是属于 $n \times m$ 维的实矩阵; $R > 0$ 表示矩阵 $R$ 是正定矩阵; $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示块对角矩阵; $I$ 和 $0$ 分别代表单位矩阵和零矩阵; $*$ 表示对称矩阵中的对称项; $\text{He}\{X\} = X + X^T$ .

## 2 系统数学模型

### 2.1 降维前的系统模型

本文以单区域负荷频率控制的系统模型为例,其模型图如图1所示.

单区域负荷频率控制模型主要有发电机-负荷部分、原动机部分、调速系统部分以及辅助负荷频率控制部分等.发电机-负荷部分描述了发电机输入端的机械功率变化、电网负荷变化以及相应频率偏离量之间的相互关系,即

$$\Delta P_m(s) - \Delta P_d(s) = Ms\Delta f(s) + D\Delta f(s).$$

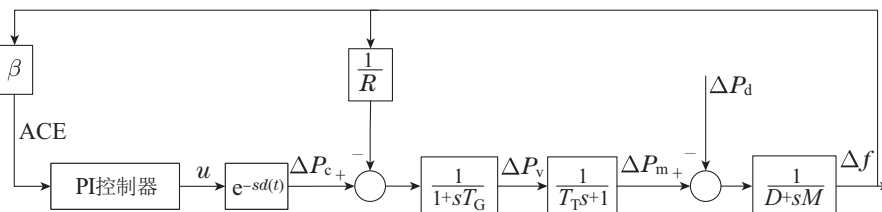


图1 单区域负荷频率控制动态模型图

Fig. 1 The dynamic model of one area load frequency control

原动机部分为非再热式汽轮机

$$G_T(s) = \frac{\Delta P_m(s)}{\Delta P_v(s)} = \frac{1}{T_T s + 1}$$

调速系统部分用于频率的一次调节

$$\Delta P_v(s) = \frac{1}{T_G s + 1} \Delta P_c(s) - \frac{1}{T_G s + 1} \times \frac{1}{R} \Delta f(s)$$

辅助负荷频率控制部分使用PI控制

$$G_K(s) = \frac{u(s)}{\text{ACE}(s)} = K_P + \frac{K_I}{s}$$

式中: ACE =  $\beta \Delta f$  是区域控制误差 (area control error, ACE),  $\beta = \frac{1}{R} + D$  为频率偏差因子。

因此, 系统的状态空间模型如下所示:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - d(t)) + F \Delta P_d, \quad (1)$$

式中:  $x(t) = [\Delta f \ \Delta P_m \ \Delta P_v]^T$ ;  $u(t - d(t)) = \Delta P_c$ ;  $d(t) \in [0, d]$  为时变时滞;  $\dot{d}(t) \leq \mu$  或者  $\dot{d}(t)$  未知,  $d$  和  $\mu$  分别为时滞的上界和时滞导数的上界;  $[0, d]$  为时滞稳定裕度, 即电力系统能够保持稳定状态情况下时变时滞的最大范围。

本文采用的是PI控制器, 所以

$$u(t) = K_P \text{ACE} + K_I \int \text{ACE}, \quad (2)$$

并且

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{D}{M} & \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_T} & \frac{1}{T_T} \\ -\frac{1}{T_G R} & 0 & -\frac{1}{T_G} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_G} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中各个符号代表的实际参数如表1所示, 相关参数值如表2所示。

表1 各个符号代表的实际参数意义

Table 1 The actual parameter meanings represented by each symbol

符号	实际参数意义
$\Delta P_m$	机械功率的变化量
$\Delta P_v$	汽门控制阀开度变化量
$T_T$	汽轮机惯性时间常数
$\Delta f$	系统频率变化量
$D$	发电机阻尼系数
$M$	发电机转动惯量
$\Delta P_d$	电网负荷的变化量
$R$	调速器速度跌落系数
$T_G$	惯性时间常数
$\Delta P_c$	系统控制信号

根据文献[19], 可以得到如下的系统方程(平衡点已转移到零点):

$$\dot{x}(t) = A_s x(t) + A_{ds} x(t - d(t)), \quad (3)$$

式中:

$$A_s = \begin{bmatrix} -\frac{D}{M} & \frac{1}{M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_T} & \frac{1}{T_T} & 0 \\ -\frac{1}{T_G R} & 0 & -\frac{1}{T_G} & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{ds} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta K_P}{T_G} & 0 & 0 & \frac{K_I}{T_G} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**注1** 由于系统矩阵 $A_s$ 和 $A_{ds}$ 中有很多的零项, 所以系统矩阵 $A_s$ 和 $A_{ds}$ 为稀疏矩阵. 在之前的文献中, 系统模型(3)并没有经过降维处理. 因此, 稳定判据中线性矩阵不等式的维度和矩阵变量的维度都比较高. 所以, 稳定条件的计算量比较大, 计算时间比较长。

表2 系统参数值

Table 2 Parameters of the system

$T_T$	$D$	$M$	$R$	$T_G$	$\beta$
0.3	1	10	0.05	0.1	21

### 2.2 降维后的系统模型

通过仔细分析单区域负荷频率控制的系统模型(3), 可以发现时滞相关状态只是少数. 但是, 泛函的构造和稳定判据的推导与时滞相关状态密不可分. 因此, 可以将时滞状态和有时滞状态进行分离. 然后, 针对时滞状态和有时滞状态构建新的系统方程. 所以, 上述的高维系统方程(3)就可以转换为如下的两个低维的系统方程, 从而实现了系统模型的降维处理. 具体步骤参考文献[18].

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + \bar{A}_d x_1(t - d(t)), \end{cases} \quad (4)$$

式中: 时滞状态为 $x_1(t) = [\Delta f \ \int \text{ACE}]^T$ , 时滞无关状态为 $x_2(t) = [\Delta P_m \ \Delta P_v]^T$ .

### 3 相关引理

在推导稳定性判据时, 需要用到文献[20]中的二阶FMBII和文献[21]中的三次多项式负定条件。

**引理1** 令 $x \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为任意可微函数, 存在正定矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 以及任意矩阵 $N_1, N_2$ 和 $N_3$ , 使

得以下不等式成立:

$$-\int_a^b \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds \leq \Psi, \tag{5}$$

式中:

$$\begin{aligned} \Psi &= \text{He}\{\theta^T(N_1\varpi_1 + N_2\varpi_2 + N_3\varpi_3)\} + \\ &(b-a)\theta^T(N_1Z^{-1}N_1^T + \frac{1}{3}N_2Z^{-1}N_2^T + \\ &\frac{1}{5}N_3Z^{-1}N_3^T)\theta, \end{aligned}$$

$$\varpi_1 = x(b) - x(a),$$

$$\varpi_2 = x(b) + x(a) - \frac{2}{(b-a)} \int_a^b x(s)ds,$$

$$\begin{aligned} \varpi_3 &= x(b) - x(a) + \frac{6}{(b-a)} \int_a^b x(s)ds - \\ &\frac{12}{(b-a)^2} \int_a^b \int_u^b x(s)dsdu, \end{aligned}$$

$\theta$ 为对应 $N_1, N_2$ 和 $N_3$ 矩阵维度的向量.

**引理 2** 对于 $t \in [0, d]$ 以及 $A_i \in \mathbb{R}^n$ 的三次多项式 $F(t) = \sum_{i=0}^3 A_i t^i$ , 若存在矩阵 $M \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ 使得以下不等式成立, 则 $F(t) < 0$ 成立.

$$A(0) + \text{He}\{MB(0)\} < 0, \tag{6}$$

$$A(d) + \text{He}\{MB(d)\} < 0, \tag{7}$$

式中:

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_0 + tA_1 & \frac{t}{2}A_2 \\ * & tA_3 \end{bmatrix}, B(t) = [-tI_n \quad I_n].$$

**证** 假设 $g(t) = [I_n \quad tI_n]^T, B(t) = [-tI_n \quad I_n]$ , 则有 $B(t)g(t) = 0$ 和 $F(t) = g^T(t)A(t)g(t)$ . 对于矩阵 $M \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ , 定义

$$F(t) = g^T(t)[A(t) + \text{He}\{MB(t)\}]g(t),$$

因此,  $F(0) < 0$ 和 $F(d) < 0$ 保证了不等式 $F(t) < 0$ 在 $t \in [0, d]$ 是成立的. 证毕.

**注 2** 在本文稳定判据的推导过程中, 由于没有引入额外的积分, 所以泛函微分是关于时滞的三次多项式. 并且, 二阶FMBII的使用引入了时滞相关的非线性项. 为得出线性矩阵不等式, 本文将 $A_0 + tA_1$ 这一项放置在第1行第1列, 从而可以使用Schur补引理处理该非线性项.

### 4 稳定性判据

基于降维后的模型, 通过使用二阶FMBII和三次多项式不等式, 本文给出以下稳定判据.

**定理 1** 给定 $d > 0$ 和 $\mu > 0$ , 若存在正定矩阵 $P, Q_1, Q_2$ 和 $Z$ , 以及任意矩阵 $Y_1, Y_2$ 和 $M$ , 使得以下线性

矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}(0) & \Phi_{12}(0) & \sqrt{d}Y_2 \\ * & \Phi_{22}(0) & 0 \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}(d) & \Phi_{12}(d) & \sqrt{d}Y_1 \\ * & \Phi_{22}(d) & 0 \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

则负荷频率控制系统(4)是稳定的. 其中:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}(\cdot) & \Phi_{12}(\cdot) \\ * & \Phi_{22}(\cdot) \end{bmatrix} = A(\cdot) + \text{He}\{MB(\cdot)\},$$

$$Z = \text{diag}\{Z_1, 3Z_1, 5Z_1\},$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \text{He}\{\Theta_{1a}^T P \Theta_{2a} + \Theta_5^T Q_2 \Theta_{8a} + Y_1 E_1 + Y_2 E_2\} + \\ &\Theta_{3a}^T (Q_1 + Q_2) \Theta_{3a} - (1 - \mu) \Theta_{4a}^T Q_1 \Theta_{4a} - \\ &\Theta_{7a}^T Q_2 \Theta_{7a} + d \Gamma_1^T Z \Gamma_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{He}\{\Theta_{1a}^T P \Theta_{2b} + \Theta_{1b}^T P \Theta_{2a} + \Theta_{3a}^T (Q_1 + Q_2) \times \\ &\Theta_{3b} - (1 - \mu) \Theta_{4a}^T Q_1 \Theta_{4b} - \Theta_{7a}^T Q_2 \Theta_{7b} + \\ &\Theta_5^T (Q_1 \Theta_{6b} + Q_2 \Theta_{8b})\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \text{He}\{\Theta_{1a}^T P \Theta_{2c} + \Theta_{1b}^T P \Theta_{2b} + \Theta_5^T (Q_1 \Theta_{6c} + \\ &Q_2 \Theta_{8c})\} + \Theta_{3b}^T (Q_1 + Q_2) \Theta_{3b} - (1 - \mu) \times \\ &\Theta_{4b}^T Q_1 \Theta_{4b} - \Theta_{7b}^T Q_2 \Theta_{7b}, \end{aligned}$$

$$A_3 = \text{He}\{\Theta_{1b}^T P \Theta_{2c}\},$$

$$\Theta_{1a} = [\Gamma_1^T \quad \Gamma_2^T \quad r_1^T - r_3^T \quad dr_1^T - dr_5^T]^T,$$

$$\Theta_{1b} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad r_5^T - r_4^T]^T,$$

$$\Theta_{2a} = [r_1^T \quad r_8^T \quad dr_5^T \quad d^2 r_7^T]^T,$$

$$\Theta_{2b} = [0 \quad 0 \quad r_4^T - r_5^T \quad dr_4^T - 2dr_7^T]^T,$$

$$\Theta_{2c} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad r_6^T + r_7^T - r_4^T]^T,$$

$$\Theta_{3a} = [r_1^T \quad r_1^T \quad 0 \quad dr_5^T]^T, \Theta_{3b} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad r_4^T - r_5^T]^T,$$

$$\Theta_{4a} = [r_1^T \quad r_2^T \quad 0 \quad dr_5^T]^T, \Theta_{4b} = [0 \quad 0 \quad r_4^T - r_5^T]^T,$$

$$\Theta_5 = [\Gamma_1^T \quad 0 \quad r_1^T - r_3^T]^T, \Theta_{6b} = [r_1^T \quad r_4^T \quad 0 \quad dr_5^T]^T,$$

$$\Theta_{6c} = [0 \quad 0 \quad r_6^T \quad r_4^T - r_5^T - r_6^T]^T,$$

$$\Theta_{7a} = [r_1^T \quad r_3^T \quad dr_5^T \quad 0]^T, \Theta_{7b} = [0 \quad 0 \quad r_4^T - r_5^T \quad 0]^T,$$

$$\Theta_{8a} = [dr_1^T \quad dr_5^T \quad d^2 r_7^T \quad d^2 (r_5^T - r_7^T)]^T,$$

$$\Theta_{8b} = [0 \quad r_4^T - r_5^T \quad dr_4^T - 2dr_7^T \quad d(2r_7^T - r_5^T)]^T,$$

$$\Theta_{8c} = [0 \quad 0 \quad r_6^T + r_7^T - r_4^T \quad r_4^T - r_6^T - r_7^T]^T,$$

$$\Gamma_1 = A_{11}r_1 + A_{12}r_8, \Gamma_2 = A_{21}r_1 + A_{22}r_8 + \bar{A}_d r_2,$$

$$E_1 = [r_1^T - r_2^T \quad r_1^T + r_2^T - 2r_4^T \quad r_1^T - r_2^T + 6r_4^T - 12r_6^T]^T,$$

$$E_2 = [r_2^T - r_3^T \quad r_2^T + r_3^T - 2r_5^T \quad r_2^T - r_3^T + 6r_5^T - 12r_7^T]^T,$$

$$r_i = [0_{n \times (i-1)n}, I_n, 0_{n \times (8-i)n}], \quad i = 1, \dots, 8.$$

证 首先, 构造如下泛函:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t), \quad (10)$$

式中:

$$V_1(t) = \zeta_1^T(t)P\zeta_1(t),$$

$$V_2(t) = \int_{t-d(t)}^t \zeta_2^T(t,s)Q_1\zeta_2(t,s)ds + \int_{t-d}^t \zeta_2^T(t,s)Q_2\zeta_2(t,s)ds,$$

$$V_3(t) = \int_{-d}^0 \int_{t+u}^t \dot{x}_1^T(s)Z\dot{x}_1(s)dsdu,$$

$$\zeta_1(t) = [x_1^T(t) \ x_2^T(t) \ \int_{t-d}^t x_1^T(s)ds \ \int_{t-d}^t \int_u^t x_1^T(s)dsdu]^T,$$

$$\zeta_2(t,s) = [x_1^T(t) \ x_1^T(s) \ \int_s^t x_1^T(u)du \ \int_{t-d}^s x_1^T(u)du]^T,$$

$$\int_{t-d}^t \int_u^t x_1(s)dsdu = \int_{t-d(t)}^t \int_u^t x_1(s)dsdu + \int_{t-d}^{t-d(t)} \int_{t-d(t)}^t x_1(s)dsdu + \int_{t-d}^{t-d(t)} \int_u^{t-d(t)} x_1(s)dsdu.$$

然后, 对泛函进行求导

$$\dot{V}_1(t) = 2\dot{\zeta}_1^T(t)P\zeta_1(t) = \zeta^T(t)\text{He}\{\Theta_1^T P\Theta_2\}\zeta(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \zeta_2^T(t,t)(Q_1 + Q_2)\zeta_2(t,t) - (1 - \dot{d}(t)) \times \\ &\zeta_2^T(t,t-d(t))Q_1\zeta_2(t,t-d(t)) - \\ &\zeta_2^T(t,t-d)Q_2\zeta_2(t,t-d) + \\ &2 \int_{t-d(t)}^t \zeta_2^T(t,s)Q_1 \frac{\partial}{\partial t} \zeta_2(t,s)ds + \\ &2 \int_{t-d}^t \zeta_2^T(t,s)Q_2 \frac{\partial}{\partial t} \zeta_2(t,s)ds \leq \\ &\zeta^T(t)[\text{He}\{\Theta_5^T(Q_1\Theta_6 + Q_2\Theta_8)\} + \\ &\Theta_3^T(Q_1 + Q_2)\Theta_3 - (1 - \mu)\Theta_4^T Q_1\Theta_4 - \\ &\Theta_7^T Q_2\Theta_7]\zeta(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= d\dot{x}_1^T(t)Z\dot{x}_1(t) - \int_{t-d}^t \dot{x}_1^T(s)Z\dot{x}_1(s)ds = \\ &\zeta^T(t)d\Gamma_1^T Z\Gamma_1\zeta(t) - \int_{t-d}^t \dot{x}_1^T(s)Z\dot{x}_1(s)ds. \end{aligned}$$

式中:

$$\Theta_1 = d(t)\Theta_{1b} + \Theta_{1a},$$

$$\Theta_2 = d^2(t)\Theta_{2c} + d(t)\Theta_{2b} + \Theta_{2a},$$

$$\Theta_3 = d(t)\Theta_{3b} + \Theta_{3a}, \Theta_4 = d(t)\Theta_{4b} + \Theta_{4a},$$

$$\Theta_6 = d^2(t)\Theta_{6c} + d(t)\Theta_{6b}, \Theta_7 = d(t)\Theta_{7b} + \Theta_{7a},$$

$$\Theta_8 = d^2(t)\Theta_{8c} + d(t)\Theta_{8b} + \Theta_{8a},$$

$$\zeta(t) = [x_1^T(t) \ x_1^T(t-d(t)) \ x_1^T(t-d)]$$

$$\frac{1}{d(t)} \int_{t-d(t)}^t x_1(s)ds$$

$$\frac{1}{d-d(t)} \int_{t-d}^{t-d(t)} x_1(s)ds$$

$$\frac{1}{d^2(t)} \int_{t-d(t)}^t \int_u^t x_1(s)dsdu$$

$$\frac{1}{(d-d(t))^2} \int_{t-d}^{t-d(t)} \int_u^{t-d(t)} x_1(s)dsdu \ x_2^T(t)]^T.$$

由于

$$\int_{t-d}^t \dot{x}_1^T(s)Z\dot{x}_1(s)ds =$$

$$\int_{t-d(t)}^t \dot{x}_1^T(s)Z\dot{x}_1(s)ds + \int_{t-d}^{t-d(t)} \dot{x}_1^T(s)Z\dot{x}_1(s)ds,$$

对上式中的二次乘积项积分使用二阶FMBII进行处理, 可得

$$- \int_{t-d(t)}^t \dot{x}_1^T(s)Z\dot{x}_1(s)ds \leq$$

$$\zeta^T(t)[d(t)Y_1Z^{-1}Y_1^T + \text{He}\{Y_1E_1\}]\zeta(t),$$

$$- \int_{t-d}^{t-d(t)} \dot{x}_1^T(s)Z\dot{x}_1(s)ds \leq$$

$$\zeta^T(t)[(d-d(t))Y_2Z^{-1}Y_2^T + \text{He}\{Y_2E_2\}]\zeta(t).$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \zeta^T(t)[\sum_{i=0}^3 A_i d^i(t) + d(t)Y_1Z^{-1}Y_1^T + \\ &(d-d(t))Y_2Z^{-1}Y_2^T]\zeta(t). \end{aligned}$$

定义  $g(d(t)) = [I \ d(t)I]^T$ ,  $B(d(t)) = [-d(t)I \ I]$  和  $F(d(t)) = g^T(d(t))\bar{A}(d(t))g(d(t))$ , 其中:

$$\bar{A}(d(t)) = \begin{bmatrix} A_0 + d(t)A_1 + \Pi(d(t)) \frac{d(t)}{2}C_2 \\ * \\ d(t)C_3 \end{bmatrix},$$

$$\Pi(d(t)) = d(t)Y_1Z^{-1}Y_1^T + (d-d(t))Y_2Z^{-1}Y_2^T.$$

对于矩阵  $M$ , 由于  $B(d(t))g(d(t)) = 0$ , 所以有

$$F(d(t)) =$$

$$g^T(d(t))[\bar{A}(d(t)) + \text{He}\{MB(d(t))\}]g(d(t)).$$

因为  $d(t) \in [0, d]$ , 令  $F(d(t)) < 0$ , 则有

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}(0) + \Pi(0) & \Phi_{12}(0) \\ * & \Phi_{22}(0) \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}(d) + \Pi(d) & \Phi_{12}(d) \\ * & \Phi_{22}(d) \end{bmatrix} < 0.$$

根据Schur补引理可知, 上述不等式等价于不等式(8)-(9). 因此,  $\dot{V}(t) < 0$ . 所以负荷频率控制系统(4)是渐近稳定的. 证毕.

定理1给出了时变时滞电力系统单区域负荷频率控制的稳定性判据, 其中, 时滞导数满足  $\dot{d}(t) \leq \mu$ . 在

以下的定理2中,给出了时滞导数未知时的稳定判据.

**定理 2** 给定  $d > 0$ , 若存在正定矩阵  $P, Q_2$  和  $Z$ , 以及任意矩阵  $Y_1, Y_2$  和  $M$ , 使得以下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11}(0) & \hat{\Phi}_{12}(0) & \sqrt{d}Y_2 \\ * & \hat{\Phi}_{22}(0) & 0 \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11}(d) & \hat{\Phi}_{12}(d) & \sqrt{d}Y_1 \\ * & \hat{\Phi}_{22}(d) & 0 \\ * & * & -Z \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

则负荷频率控制系统(4)是稳定的. 其中:

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11}(\cdot) & \hat{\Phi}_{12}(\cdot) \\ * & \hat{\Phi}_{22}(\cdot) \end{bmatrix} = \hat{A}(\cdot) + \text{He}\{MB(\cdot)\},$$

$$\hat{A}_0 = \text{He}\{\theta_{1a}^T P \theta_{2a} + \theta_5^T Q_2 \theta_{8a} + Y_1 E_1 + Y_2 E_2\} + \theta_{3a}^T Q_2 \theta_{3a} - \theta_{7a}^T Q_2 \theta_{7a} + d \Gamma_1^T R \Gamma_1,$$

$$\hat{A}_1 = \text{He}\{\theta_{1a}^T P \theta_{2b} + \theta_{1b}^T P \theta_{2a} + \theta_{3a}^T Q_2 \theta_{3b} - \theta_{7a}^T Q_2 \theta_{7b} + \theta_5^T Q_2 \theta_{8b}\},$$

$$\hat{A}_2 = \text{He}\{\theta_{1a}^T P \theta_{2c} + \theta_{1b}^T P \theta_{2b} + \theta_5^T Q_2 \theta_{8c}\} + \theta_{3b}^T Q_2 \theta_{3b} - \theta_{7b}^T Q_2 \theta_{7b},$$

$$\hat{A}_3 = \text{He}\{\theta_{1b}^T P \theta_{2c}\}.$$

证 令  $V_2(t) = \int_{t-d}^t \zeta_2^T(t,s) Q_2 \zeta_2(t,s) ds$ , 然后重复定理1的证明过程. 证毕.

### 5 数值和仿真验证

为验证本文方法的有效性和优越性, 本节将求解不同PI参数下的时滞稳定裕度并与现有的结果进行对比. 然后, 对得出的时滞稳定裕度进行仿真验证. 基于MATLAB中的线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)工具箱, 以下算法将用于求解时滞的上限值  $d$ .

**算法:** 定理1(定理2)的计算.

**步骤 1** 给定步长  $\Delta d$  以及  $\mu$  值, 令  $d = d_0 = 0$ .

**步骤 2** 计算定理1(定理2)中的LMI.

**步骤 3** 假如有解, 则令  $d_0 = d, d = \Delta d + d$  并跳转步骤 2, 否则, 跳转步骤 4.

**步骤 4** 输出  $d_0$ , 即算出的时滞上限  $d$ .

计算定理1中的线性矩阵不等式, 表3中列出了不同PI参数下的时滞最大值( $\mu = 0.5$ ). 根据表3可知, 时滞稳定裕度会随着PI参数的变化而变化. 首先, 随着积分增益  $K_I$  的增加, 时滞稳定裕度在不断减小. 而随着比例增益  $K_P$  的增加, 时滞稳定裕度先增加后减小, 在比例增益  $K_P = 0.2$  时取得极大值. 表3中的数据充分揭示了时滞稳定裕度和PI参数之间的关系.

表4中列出了本文和文献[15]的时滞稳定裕度对

比. 为了推导出时滞的线性多项式, 文献[15]引入了4个额外的积分. 为了增加与其他向量之间的联系, 建立了4个对应的零等式. 并且, 文献[15]没有对单重积分泛函进行增广, 也没有对系统模型进行降维处理. 根据表4可知, 本文计算出的时滞稳定裕度值要大于文献[15]给出的值. 所以, 定理1具有更低的保守性. 另外, 定理1的矩阵变量数为815, 小于文献[15]的1340. 因此, 定理1的计算量同样小于文献[15]中稳定条件的计算量. 通过时滞稳定裕度和矩阵变量数的对比可知, 定理1不但具有较低的保守性, 而且具有较少的计算量.

表 3 不同PI控制器对应的时变时滞稳定裕度( $\mu = 0.5$ )

Table 3 Time-varying delay margin for different PI controller ( $\mu = 0.5$ )

$K_P$	$K_I$					
	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	1
0	28.22	13.86	6.66	3.05	1.82	0.77
0.05	29.17	14.33	6.90	3.16	1.90	0.81
0.10	29.95	14.72	7.09	3.26	1.96	0.85
0.20	30.95	15.22	7.34	3.38	2.05	0.90
0.40	30.02	14.70	7.04	3.22	1.94	0.83
0.60	16.74	7.74	3.51	1.44	1.01	0.58
1.00	0.44	0.43	0.42	0.39	0.36	0.30

表 4 时变时滞稳定裕度对比( $\mu = 0.5$ )

Table 4 Comparison of time-varying delay margin ( $\mu = 0.5$ )

$K_I$	$K_P$			
	0		0.1	
	定理1	文献[15]	定理1	文献[15]
0.05	28.22	27.32	29.95	26.12
0.10	13.86	13.41	14.72	13.58
0.20	6.66	6.43	7.09	6.84
0.40	3.05	2.91	3.26	3.11
0.60	1.82	1.70	1.96	1.84

计算定理2中的线性矩阵不等式, 表5中列出了不同PI参数下的随机时滞最大值. 根据表5可知, 时滞稳定裕度会随着PI参数的变化而变化. 随着积分增益  $K_I$  的增加, 时滞稳定裕度在不断减小. 表5中的数据展示了时滞稳定裕度和PI参数之间的关系. 在表6中, 定理2计算的时滞稳定裕度值要比文献[19]中的大, 这说明定理2具有更低的保守性.

为验证本文方法的正确性, 通过设定不同的PI增益以及对应的时滞, 得到不同时滞条件下系统模型(降维前)的频率动态响应图. 其中, 电网负荷的变化量

$\Delta P_d$ 统一为0.1的阶跃信号, 时间为5秒后. 图2和图3中的PI控制增益  $K_1 = [K_P \ K_I] = [0.4 \ 0.2]$  对应  $d = 7.04$ ,  $K_2 = [0.6 \ 0.4]$  对应  $d = 1.44$ .

表5 不同PI控制器对应的随机时滞稳定裕度  
Table 5 Random time-varying delay margin for different PI controller

$K_P$	$K_I$					
	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	1
0	27.32	13.41	6.43	2.92	1.72	0.69
0.05	22.84	13.66	6.66	3.03	1.79	0.73
0.10	13.77	11.36	6.72	3.13	1.85	0.77
0.20	6.93	6.72	5.54	3.18	1.92	0.80
0.40	3.01	2.97	2.82	2.30	1.62	0.72
0.60	1.14	1.13	1.08	0.95	0.79	0.51
1.00	0.42	0.41	0.40	0.37	0.34	0.28

表6 随机时滞稳定裕度对比  
Table 6 Comparison of random delay margin

$K_P$	$K_I$			
	0.05		0.1	
	定理1	文献 [15]	定理1	文献 [15]
0.05	22.84	20.08	13.66	13.65
0.10	13.77	10.63	11.36	9.93
0.20	6.93	5.35	6.72	5.26
0.40	3.01	2.50	2.97	2.49
0.60	1.14	1.14	1.13	1.12

根据图2-3可知, 当  $d = 1.44$  时, PI控制增益  $K_1$  和  $K_2$  都可以使电网的频率保持稳定. 但是, 当  $d = 7.04$  时, 只有  $K_1$  能使电网的频率保持稳定. 因此, 在选择PI控制增益时, 要充分考虑实际的情况和要求. 比如, 当通信状况较差以及通信时滞较大时, 可以优先考虑能够承受长时滞的控制增益. 当通信状况良好时, 可以根据控制效果进行选择.

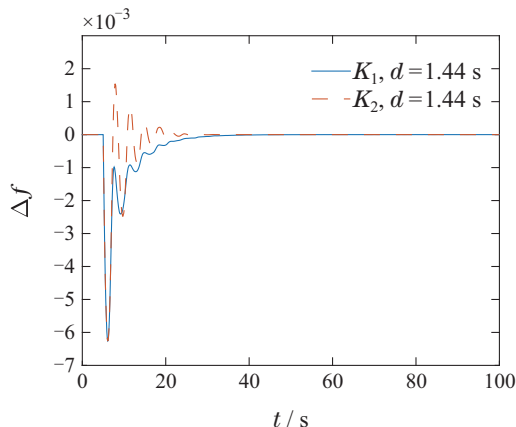


图2 频率动态响应图

Fig. 2 The dynamic responses of the frequency

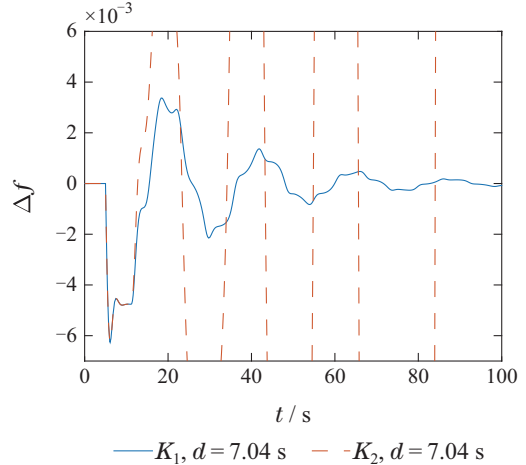


图3 频率动态响应图

Fig. 3 The dynamic responses of the frequency

图4-5中的PI控制增益  $K_1 = [0.4 \ 0.4]$  对应于  $d = 2.30$ ,  $K_2 = [0.05 \ 0.05]$  对应于  $d = 22.84$ . 同样的, 当  $d = 2.30$  时, PI控制增益  $K_1$  和  $K_2$  都可以使电网的频率保持稳定. 但是, 当  $d = 22.84$  时, 只有  $K_2$  能使电网的频率保持稳定.

通过仿真实验, 证明了本文的计算结果是正确的. 也就是说, 本文的稳定判据是正确且有效的.

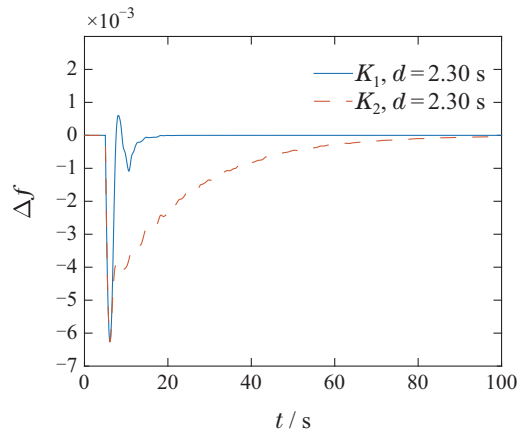


图4 频率动态响应图

Fig. 4 The dynamic responses of the frequency

## 6 结论

基于二阶FMBII和三次多项式不等式, 本文研究了时变时滞电力系统负荷频率控制的稳定性问题. 为了减少稳定条件的计算量, 首先, 对高维度的系统模型进行了降维处理. 针对降维后的系统模型, 构造了增广型泛函, 并使用二阶FMBII处理泛函微分中的二次乘积项积分. 由于没有引入额外的积分, 泛函导数是关于时变时滞的三次多项式. 为得出线性矩阵不等式条件, 本文给出了新的三次多项式负定条件并处理了由二阶FMBII引入的非线性项. 最后, 通过数值和仿真实验证明了本文的稳定性判据不仅具有较低的保守性, 而且具有极高的计算效率. 但是, 三次多项式

负定条件需要引入额外的矩阵,增加了一定的计算量。因此,获得计算量更低的多项式负定条件以及多区域负荷频率控制的稳定条件成为未来重要的研究方向。

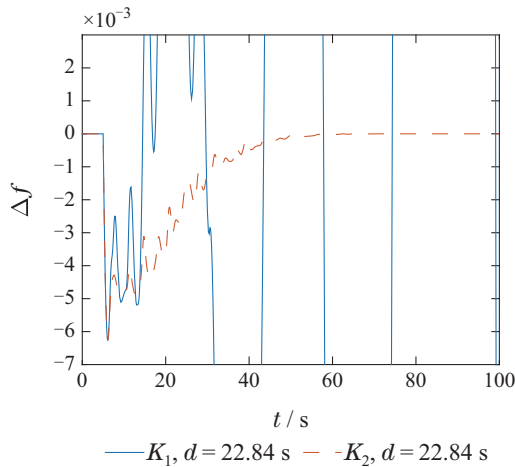


图5 频率动态响应图

Fig. 5 The dynamic responses of the frequency

### 参考文献:

- [1] JIANG L, YAO W, WU Q H, et al. Delay-dependent stability for load frequency control with constant and time-varying delays. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2012, 27(2): 932 – 941.
- [2] SUN Miaoping, JIANG Bo. Design of distributed power economic dispatch algorithm considering communication delay. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(11): 2303 – 2311.  
(孙妙平, 姜波. 考虑通信时滞的分布式电力经济调度算法设计. 控制理论与应用, 2020, 37(11): 2303 – 2311.)
- [3] QIAN Wei, WANG Chenchen, FEI Shumin. Stability analysis and controller design of wide-area power system with interval time-varying delay. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2019, 34(17): 3640 – 3650.  
(钱伟, 王晨晨, 费树岷. 区间变时滞广域电力系统稳定性分析与控制器设计. 电工技术学报, 2019, 34(17): 3640 – 3650.)
- [4] ZUO Jian, WANG Ziqi, LI Yinong, et al. Optimal fractional-order PID controller design for interconnected power grid load frequency control considering time-delay. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(9): 1151 – 1160.  
(左剑, 王子琪, 李银红, 等. 计及时滞的互联网网负荷频率控制最优分数阶PID控制器设计. 控制理论与应用, 2017, 34(9): 1151 – 1160.)
- [5] YAO W, JIANG L, WU Q H, et al. Delay-dependent stability analysis of the power system with a wide-area damping controller embedded. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2011, 29(1): 233 – 240.
- [6] YAO Wei. *Stability Analysis and Its Predictive Control of Power Systems with Time Delay*. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2010.  
(姚伟. 时滞电力系统稳定性分析与网络预测控制研究. 武汉: 华中科技大学, 2010.)
- [7] ZHANG Chuanke. *Small-signal stability analysis and load frequency control for delayed power systems*. Changsha: Central South University, 2013.  
(张传科. 时滞电力系统的小扰动稳定分析与负荷频率控制. 长沙: 中南大学, 2013.)
- [8] ZHANG C K, JIANG L, WU Q H, et al. Delay-dependent robust load frequency control for time delay power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2013, 28(3): 2192 – 2201.
- [9] GUO Jianfeng, QIAN Wei, FEI Shumin, et al. Stability analysis for wide-area power systems with multiple time delays based on an optimized functional. *Power System Protection and Control*, 2023, 51(12): 47 – 57.  
(郭建锋, 钱伟, 费树岷, 等. 基于优化泛函的多时滞广域电力系统稳定性分析. 电力系统保护与控制, 2023, 51(12): 47 – 57.)
- [10] SHANGGUAN X C, HE Y, ZHANG C K, et al. Resilient load frequency control of power systems to compensate random time delays and time-delay attacks. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2023, 70(5): 5115 – 5128.
- [11] ZHANG C K, HE Y, JIANG L, et al. Notes on stability of time-delay systems: Bounding inequalities and augmented Lyapunov-Krasovskii functionals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(10): 5331 – 5336.
- [12] RAMAKRISHNAN K, RAY G. Stability criteria for nonlinearly perturbed load frequency systems with time-delay. *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, 2015, 5(3): 383 – 392.
- [13] SEURET A, GOUAISBAUT F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems. *Automatica*, 2013, 49(9): 2860 – 2866.
- [14] KIM J H. Further improvement of Jensen inequality and application to stability of time-delayed systems. *Automatica*, 2016, 64: 121 – 125.
- [15] YANG F, HE J, PAN Q. Further improvement on delay-dependent load frequency control of power systems via truncated B-L inequality. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2018, 23(5): 5062 – 5071.
- [16] DUAN C, ZHANG C K, JIANG L, et al. Structure-exploiting delay-dependent stability analysis applied to power system load frequency control. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2017, 32(6): 4528 – 4540.
- [17] YU X D, JIA H J, WANG C S. CTDAE and CTODE models and their applications to power system stability analysis with time delays. *Science China Technological Sciences*, 2013, 56(5): 1213 – 1223.
- [18] JIN L, ZHANG C K, HE Y, et al. Delay-dependent stability analysis of multi-area load frequency control with enhanced accuracy and computation efficiency. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2019, 34(5): 3687 – 3696.
- [19] ZHAI Zhengliang. *Stability analysis and load frequency control for delayed power systems*. ZhuZhou: Hunan University of Technology, 2020.  
(翟正亮. 时滞电力系统稳定性分析及负荷频率控制研究. 株洲: 湖南工业大学, 2020.)
- [20] ZENG H B, HE Y, WU M, et al. New results on stability analysis for systems with discrete distributed delay. *Automatica*, 2015, 60: 189 – 192.
- [21] ZHANG X M, HAN Q L, GE X. Sufficient conditions for a class of matrix-valued polynomial inequalities on closed intervals and application to  $H_\infty$  filtering for linear systems with time-varying delays. *Automatica*, 2021, 125: 109390.

### 作者简介:

翟正亮 博士研究生, 目前研究方向为时滞电力系统、采样控制系统, E-mail: zhai194@163.com;

严怀成 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为网络化控制, E-mail: hcyan@ecust.edu.cn;

陈世明 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为群体动力学与协调控制, E-mail: shmchen@ecjtu.jx.cn;

常雨芳 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能电网, E-mail: changyf@hbut.edu.cn.