

# 严格反馈非线性系统的全状态预设性能自适应跟踪控制

孔祥玲<sup>1</sup>, 孙海滨<sup>1†</sup>, 侯林林<sup>2</sup>

(1. 曲阜师范大学 工学院, 山东 日照 276826; 2. 曲阜师范大学 计算机学院, 山东 日照 276826)

**摘要:** 本文研究了具有全状态非对称约束和不确定干扰的严格反馈非线性系统的自适应渐近跟踪控制问题. 为了约束系统状态, 首先, 引入了一组预设时间性能函数; 其次, 构建了一种非对称变换函数, 将原系统的状态约束问题转化为新变量的有界性问题, 基于变换的方法, 去除了虚拟控制器上的可行性条件; 随后, 为了避免backstepping方法固有的“微分爆炸”问题, 在递推设计中引入了一阶滤波器; 然后, 结合backstepping方法提出了一种自适应控制策略, 使系统状态不违反约束边界, 并在有限时间内收敛到预设边界; 同时, 系统输出渐近地跟踪参考信号; 最后, 应用实例验证了方法的有效性.

**关键词:** 渐近跟踪控制; 非对称全状态约束; 预设时间性能函数; 非线性系统

**引用格式:** 孔祥玲, 孙海滨, 侯林林. 严格反馈非线性系统的全状态预设性能自适应跟踪控制. 控制理论与应用, 2026, 43(3): 675 – 681

DOI: 10.7641/CTA.2024.30824

## Full state prescribed performance adaptive tracking control for strict-feedback nonlinear systems

KONG Xiang-ling<sup>1</sup>, SUN Hai-bin<sup>1†</sup>, HOU Lin-lin<sup>2</sup>

(1. College of Engineering, Qufu Normal University, Rizhao Shandong 276826, China;  
2. College of Computer, Qufu Normal University, Rizhao Shandong 276826, China)

**Abstract:** In this article, the problem of adaptive asymptotic tracking control is studied for strict-feedback nonlinear systems with full state asymmetric constraints and uncertain disturbances. Firstly, a batch of prescribed time performance functions are introduced to restrain system states. Secondly, an asymmetric transformation function is constructed which makes sure the asymmetric state constraints are not breached, then the state constraints problem is transformed into analysing the boundary of the new variables. By using the transformation method, the feasibility conditions on virtual controllers are removed. Subsequently, in order to avoid the inherent “explosion of complexity” problem of backstepping methods, a first-order filter is introduced. Then an adaptive control strategy is presented on the basis of backstepping technique, which enables system states do not violate constraint boundary and converge to preset boundaries within a finite-time. Meanwhile, the output asymptotically tracks the reference signal. Finally, an applied example demonstrates the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** asymptotic tracking control; full asymmetric state constraints; prescribed time performance function; nonlinear systems

**Citation:** KONG Xiangling, SUN Haibin, HOU Linlin. Full state prescribed performance adaptive tracking control for strict-feedback nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(3): 675 – 681

### 1 引言

在现实中, 许多系统都需要满足严格的状态或输出约束<sup>[1–2]</sup>. 系统一旦违反约束边界, 将大大降低系统性能, 甚至发生事故. 因此, 如何有效地处理系统状态或输出约束引起了控制领域的广泛关注.

为解决约束问题, 近年来提出了一种基于障碍李雅普诺夫函数(BLF)的控制方法<sup>[3–4]</sup>. 通过构造对称型BLF和非对称型BLF, 文献[3]和文献[4]分别处理了具有对称约束和非对称约束系统的控制问题. 文献[5]利用tan型BLF处理一类具有时变约束的非完整系统

收稿日期: 2023–12–22; 录用日期: 2024–11–12.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: seusunhaibin@gmail.com; Tel.: +86 17863341292.

本文责任编辑: 徐承忠.

国家自然科学基金项目(62173205, 62273254, 62273199), 山东省泰山学者项目, 山东省自然科学基金项目(ZR2023MF049)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62173205, 62273254, 62273199), the Taishan Scholar of Shandong Province and the National Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2023MF049).

的输出约束,提出了系统状态反馈镇定的非缩放变换设计方案.然而,传统BLF方法的局限性在于必须将状态约束转换为误差约束.为了解决这个问题,文献[6]引入了积分型障碍李亚普诺夫函数(iBLF),从而直接要求状态约束在预定义的紧集内,并解决初始值范围过小的问题.

然而,基于BLF或iBLF的控制方法总是涉及到虚拟控制器的可行性条件,也就是说,虚拟控制器必须确保在给定的区域内,否则控制策略就会失效,这给相应控制策略的设计带来了很大困难.针对这一问题,文献[7]提出了一种坐标变换方法,通过构建一个非线性状态依赖函数,将原始约束问题转化为状态依赖函数的有界性问题,完全规避了虚拟控制器的可行性条件.

值得注意的是,系统的性能也是设计者需要考虑的一个基本问题,如稳定性、收敛速度和控制精度.有限时间控制<sup>[8-9]</sup>、固定时间控制<sup>[10]</sup>和预设时间控制<sup>[11]</sup>从收敛时间方面改善了系统性能.固定时间控制作为有限时间控制的扩展,使系统状态在固定时间内收敛到原点,而不必考虑初始条件.就预设时间控制而言,其收敛时间和精度可以由设计者根据需要人为设置,因此预设时间控制在收敛时间上比固定时间控制更有吸引力.在文献[12]中,针对一类具有非消失扰动和不确定性的高阶严格反馈的非线性系统,通过构造时变约束函数和相应的变换,提出了一种预设时间控制方法.在文献[13]中,解决了一类带有预设性能的互联非线性系统的分散自适应跟踪控制问题.文献[14]提出了一种基于非奇异终端滑模的受约束航天器的预设性能控制器.此外,如文献[15]所述,渐近跟踪是工程领域的一个预期设计目标,在实际应用中具有巨大潜力.

基于以上讨论,本文针对具有非对称全状态约束的非线性系统,通过使用预设时间性能函数方法,实现了系统的实用有限时间稳定<sup>[11]</sup>.

1) 文献[7]通过构造一个非线性状态依赖函数,首次提出了去除虚拟控制器上可行性条件的方法.本文构造了一种新的非对称型变换函数,可以根据系统状态的符号实现非对称约束.

2) 文献[12]首次提出了基于初值为无穷大的性能约束的实用预设时间控制策略,通过定义一个时变性能约束函数 $\beta(t)$ ,保证 $-\beta(t) < e < \beta(t)$ 来满足性能约束问题.本文在此基础上进行了改进,考虑了更一般的初始条件无限制的非对称约束 $-\beta_{i1}(t) < x_i < \beta_{i2}(t)$ 控制问题,拓宽了研究范围.

3) 文献[13]提出了预设时间跟踪控制的方法,实现了跟踪误差的非对称性能约束.本文兼顾系统的暂态性能和稳态性能,使得系统不仅能够预设时间内

到达稳定区域,而且跟踪误差渐近收敛到零.

## 2 问题描述

考虑如下单输入单输出(single input single output)严格反馈非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(t, \bar{x}_i) + d_i(t), \\ i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u + f_n(t, \bar{x}_n) + d_n(t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中状态 $x_i(i = 1, \dots, n)$ 约束在以下开区间:  $D_i = \{x_i \in \mathbb{R}^n : -\beta_{i1}(t) < x_i(t) < \beta_{i2}(t)\}$ ,性能约束函数 $\beta_{i1}(t)$ 和 $\beta_{i2}(t)$ 的表达式将在下一节给出.在系统模型(1)中:  $\bar{x}_i = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i]^T \in \mathbb{R}^i$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ 分别是系统的状态向量、系统输入和系统输出,  $f_i(t, \bar{x}_i)$ 是未知的非线性函数,  $d_i(t)$ 是未知的时变干扰.

控制目标是设计自适应控制器使得: 1) 系统所有信号一致最终有界; 2) 系统满足非对称全状态约束条件; 3) 系统输出 $y(t)$ 渐近跟踪期望信号 $y_d(t)$ .

为了取得以上目标,作出以下假设条件和引理:

**假设 1**<sup>[12]</sup> 干扰 $d_i(t)(i = 1, 2, \dots, n)$ 是有界的,并且满足 $|d_i(t)| \leq \bar{d}_i$ ,  $\bar{d}_i$ 为未知常数.

**假设 2**<sup>[15]</sup> 理想信号 $y_d(t)$ 及其一阶、二阶导数是已知连续且有界的函数.

**引理 1**<sup>[13]</sup> 给定连续且有界的正函数 $\omega(t)$ 和变量 $\delta$ ,则存在下述不等式成立:  $0 \leq |\delta| - \frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2 + \omega(t)^2}} < \omega(t)$ .

**引理 2**<sup>[8]</sup> 给定连续且有界的正函数 $\eta(t)$ 和 $\ell \in \mathbb{R}$ ,则存在下述不等式成立:  $0 \leq |\ell| - \ell \tanh\left(\frac{\ell}{\eta(t)}\right) \leq \bar{p}\eta(t)$ ,其中 $\bar{p} = 0.2785$ .

**注 1** 函数 $\omega(t)$ 和 $\eta(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \omega(s) ds \leq \bar{\omega} < +\infty$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \eta(s) ds \leq \bar{\eta} < +\infty$ ,其中 $\bar{\omega}, \bar{\eta}$ 是两个正常数.在后续设计过程中, $\omega(t)$ 和 $\eta(t)$ 都被选择为满足上述条件的函数,将不再赘述.

**引理 3**<sup>[6]</sup> 假设 $f(X)$ 是定义在紧集 $U \in \mathbb{R}^m$ 上的连续函数,则存在一个径向基函数神经网络 $\theta^{*T}\phi(X)$ ,使得 $\sup_{X \in U} |f(X) - \theta^{*T}\phi(X)| \leq \delta(X)$ ,其中 $\delta(X)$ 是近似误差.

## 3 主要结果

### 3.1 预设时间性能约束函数

受文献[12]启发,构造如下时变约束函数:

$$\beta_{i1}(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{T}\right)^{2p} + \epsilon_{i1}, & 0 < t \leq T, \\ \epsilon_{i1}, & t > T, \end{cases} \quad (2)$$

$$\beta_{i2}(t) = \begin{cases} (\frac{1}{t} - \frac{1}{T})^{2p} + \epsilon_{i2}, & 0 < t \leq T, \\ \epsilon_{i2}, & t > T, \end{cases} \quad (3)$$

当  $t \rightarrow 0$  时,  $\lim_{t \rightarrow 0} \beta_{i1}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \beta_{i2}(t) = +\infty$ . 其中:  $0 < \epsilon_{i1}, \epsilon_{i2} < \infty, i = 1, \dots, n, 0 < T < \infty$  为正常数,  $p > 0$  为满足  $2p > n + 1$  的整数,  $n$  代表系统的阶数. 因此,  $\beta_{i1}^{(j)}(t)$  和  $\beta_{i2}^{(j)}(t) (i = 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n)$  连续可微.

如果满足  $-\beta_{i1}(t) < x_i(t) < \beta_{i2}(t)$ , 系统状态  $x_i(t)$  将在时间  $T$  内收敛到域  $D_i = \{x_i \in \mathbb{R}^n: -\epsilon_{i1} < x_i(t) < \epsilon_{i2}\}$ . 图1为示意图.

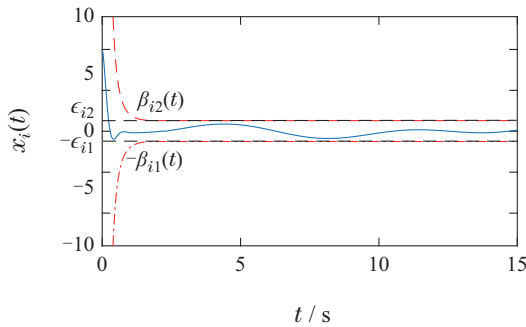


图 1 非对称约束下的状态曲线

Fig. 1 Curves of state with asymmetric constraints

### 3.2 非对称转换函数

定义距离函数

$$\gamma_{i1}(t) = c(\beta_{i1}^2(t) - x_i^2(t)), \quad (4)$$

$$\gamma_{i2}(t) = c(\beta_{i2}^2(t) - x_i^2(t)), \quad (5)$$

其中:  $c$  为正常数,  $\beta_{ij}(t) - x_i(t)$  和  $\beta_{ij}(t) + x_i(t)$  分别指状态  $x_i(t)$  与约束边界  $\beta_{ij}(t)$  和  $-\beta_{ij}(t)$  之间的距离. 基于距离函数  $\gamma_{i1}(t)$  和  $\gamma_{i2}(t)$ , 构造以下复合函数  $\tilde{h}(\gamma_{ij}(t)) (j = 1, 2) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ :

$$\tilde{h}(\gamma_{ij}(t)) = \begin{cases} 1 - (\frac{\gamma_{ij}(t)}{a_{ij}} - 1)^{2p}, & 0 < \gamma_{ij}(t) \leq a_{ij}, \\ 1, & \gamma_{ij}(t) > a_{ij}, \end{cases}$$

其中  $a_{ij} > 0$  为设计者可选的安全距离常数. 此外, 选择  $2p > n + 1$ , 则有

$$\lim_{\gamma_{ij}(t) \rightarrow a_{ij}^-} \frac{\partial^j \tilde{h}(\gamma_{ij}(t))}{\partial \gamma_{ij}(t)^j} = \lim_{\gamma_{ij}(t) \rightarrow a_{ij}^+} \frac{\partial^j \tilde{h}(\gamma_{ij}(t))}{\partial \gamma_{ij}(t)^j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

从而式(6)中定义的函数  $\tilde{h}(\gamma_{ij}(t))$  是包含点  $\gamma_{ij}(t) = a_{ij}$  的  $C^n$  函数. 在本文中, 选择  $a_{ij} = c\epsilon_{ij}^2$ , 使得当  $t > T$  时,  $\gamma_{ij}(t) \leq a_{ij}$ .

构建以下非对称转换函数:

$$\zeta_i(t) = \frac{q(x_i(t))x_i(t)}{\tilde{h}(\gamma_{i1}(t))} + \frac{(1 - q(x_i(t)))x_i(t)}{\tilde{h}(\gamma_{i2}(t))}, \quad (6)$$

若  $-\beta_{i1}(t) < x_i(t) \leq 0, q(x_i(t)) = 1$ ; 若  $0 < x_i(t) <$

$\beta_{i2}(t), q(x_i(t)) = 0$ . 根据式(6), 当  $x_i(t) \rightarrow -\beta_{i1}(t)$  或  $x_i(t) \rightarrow \beta_{i2}(t)$  时,  $\zeta_i(t) \rightarrow \infty; x_i(t) = 0$  当且仅当  $\zeta_i(t) = 0$ . 此外, 当  $\beta_{ij} \rightarrow \infty$  时,  $\zeta_i(t) = x_i(t)$ . 因此, 所做变换可以同时处理状态受约束和不受约束的情形.

**引理 4** 如果  $\zeta_i(t) \in L_\infty$ , 则对于任意的  $t \geq 0, -\beta_{i1}(t) < x_i(t) < \beta_{i2}(t)$  总是成立.

**注 2** 引理4的证明过程可参考文献[12]中Lemma1的证明(取  $\varpi_1 = \frac{x_i(t)}{\beta_{i1}(t)}$  和  $\varpi_1 = \frac{x_i(t)}{\beta_{i2}(t)}$  分别证明  $x_i(t) \leq 0$  和  $x_i(t) > 0$  两种情况下成立). 若  $\zeta_i(t) = \frac{x_i(t)}{\tilde{h}(\gamma_{i1}(t))}$ , 则得到对称约束  $-\beta_{i1}(t) < x_i(t) < \beta_{i1}(t)$ [12], 因此本文是文献[12]的改进版本.

基于变换(6), 原始系统模型转变为不受约束模型

$$\dot{\zeta}_i = \lambda_i \zeta_i + \bar{\lambda}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

其中:  $\lambda_i = q(x_i)\lambda_{i1} + (1 - q(x_i))\lambda_{i2}, \bar{\lambda}_i = q(x_i)\bar{\lambda}_{i1} + (1 - q(x_i))\bar{\lambda}_{i2}$ , 及

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{h}(\gamma_{ij})} - \frac{4cp}{a_{ij}\tilde{h}(\gamma_{ij})^2} (\frac{\gamma_{ij}}{a_{ij}} - 1)^{2p-1} x_i^2 > 0, \\ 0 < \gamma_{ij} \leq a_{ij}, \\ 1, \gamma_{ij} > a_{ij}, \end{cases}$$

$$\bar{\lambda}_{ij} = \begin{cases} \frac{4cp}{a_{ij}\tilde{h}(\gamma_{ij})^2} (\frac{\gamma_{ij}}{a_{ij}} - 1)^{2p-1} \beta_{ij} \dot{\beta}_{ij} x_i, \\ 0 < \gamma_{ij} \leq a_{ij}, \\ 0, \gamma_{ij} > a_{ij}. \end{cases}$$

### 3.3 控制器设计及稳定性分析

#### 3.3.1 自适应控制器设计

引入坐标变换

$$z_1 = \zeta_1 - \alpha_0, \quad (8)$$

$$z_i = \zeta_i - s_i, \quad 2 \leq i \leq n, \quad (9)$$

$$\alpha_0 = \frac{q(x_1(t))y_d}{\tilde{h}(\gamma_{d1}(t))} + \frac{(1 - q(x_1(t)))y_d}{\tilde{h}(\gamma_{d2}(t))}, \quad (10)$$

其中:  $z_i$  为虚拟误差,  $\gamma_{dj}(t) = c(\beta_{1j}^2(t) - y_d^2(t)), j = 1, 2$ . 若  $0 < \gamma_{1j}(t) \leq a_{1j}, \tilde{h}(\gamma_{dj}(t)) = 1 - (\frac{\gamma_{dj}(t)}{a_{1j}} - 1)^{2p}$ ; 若  $\gamma_{1j}(t) > a_{1j}, \tilde{h}(\gamma_{dj}(t)) = 1$ .  $s_i$  是下面一阶滤波器的输出:

$$\tau_i \dot{s}_i = -e_i - \frac{\tau_i \hat{M}_i^2 e_i}{\sqrt{\hat{M}_i^2 e_i^2 + \omega^2(t)}} - \tau_i z_i, \quad (11)$$

其中:  $e_i = s_i - \frac{\alpha_{i-1}}{\beta_i}, i = 2, \dots, n$  为边界误差;  $\tau_i$  是时间常数;  $\hat{M}_i$  是  $M_i$  的估计, 且  $\tilde{M}_i = M_i - \hat{M}_i, M_i$  将在本节最后给出. 由式(6),  $\zeta_i$  和  $x_i$  之间的关系式为

$$x_i = \beta_i \zeta_i, \quad (12)$$

其中

$$\beta_i = \frac{h(c(\beta_{i1}^2 - x_i^2))h(c(\beta_{i2}^2 - x_i^2))}{q(x_i)h(c(\beta_{i2}^2 - x_i^2)) + (1 - q(x_i))h(c(\beta_{i1}^2 - x_i^2))}.$$

根据引理3, 未知函数 $f_i$ 可表示为 $f_i = \theta_i^* \phi_i(X_i) + \delta_i(X_i)$ ,  $|\delta_i(X_i)| \leq \varepsilon_i$ , 其中 $\varepsilon_i$ 是有界未知常数. 为了简化, 首先定义以下符号:

$$\begin{aligned} A_i^\theta &= \gamma_1 \sum_{j=1}^i z_j \lambda_j [\tanh \frac{z_j \lambda_j}{\eta(t)} \|\phi_j(X_j)\|], \\ A_i^\varepsilon &= \gamma_2 \sum_{j=1}^i z_j \lambda_j \tanh \frac{z_j \lambda_j}{\eta(t)}, \\ A_i^{\bar{d}} &= \gamma_3 \sum_{j=1}^i z_j \lambda_j \tanh \frac{z_j \lambda_j}{\eta(t)}, \quad X_i = [x_1 \ \dots \ x_i]^T, \\ \Theta &= \max\{\|\theta_1^*\|, \dots, \|\theta_n^*\|\}, \\ \varepsilon &= \max\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}, \quad \bar{d} = \max\{\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n\}. \end{aligned}$$

**第1步** 由式(12),  $x_2 = \beta_2 \zeta_2$ 被定义, 结合式(9), 有 $\zeta_2 = z_2 + e_2 + \frac{\alpha_1}{\beta_2}$ . 根据式(8), 对 $z_1$ 求导, 可得

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_1 \beta_2 (z_2 + e_2) + \lambda_1 f_1 + \lambda_1 d_1 + \bar{\lambda}_1 - \dot{\alpha}_0,$$

其中 $\dot{\alpha}_0 = q(x_1)[\dot{y}_d h(\gamma_{d1}) - y_d \dot{h}(\gamma_{d1})]/h^2(\gamma_{d1}) - (1 - q(x_1))[\dot{y}_d h(\gamma_{d2}) - y_d \dot{h}(\gamma_{d2})]/h^2(\gamma_{d2})$ . 选择Lyapunov函数 $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\Theta}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2\gamma_3}\tilde{d}^2$ , 其中 $\gamma_1, \gamma_2$ 和 $\gamma_3$ 是正设计参数.

利用引理2, 可以得到下面的不等式:

$$\begin{aligned} z_1 \lambda_1 f_1 &= z_1 \lambda_1 [\theta_1^* \phi_1(X_1) + \delta_1(X_1)] \leq \\ &|z_1 \lambda_1| [\|\theta_1^*\| \|\phi_1(X_1)\| + \varepsilon_1] \leq \\ &z_1 \lambda_1 \tanh \frac{z_1 \lambda_1}{\eta(t)} \Theta \|\phi_1(X_1)\| + \\ &\Theta \|\phi_1(X_1)\| \bar{p}\eta(t) + \varepsilon \bar{p}\eta(t) + \\ &z_1 \lambda_1 \tanh \frac{z_1 \lambda_1}{\eta(t)} \varepsilon, \end{aligned} \tag{13}$$

$$z_1 \lambda_1 d_1 \leq z_1 \lambda_1 \tanh \frac{z_1 \lambda_1}{\eta(t)} \bar{d} + \bar{d} \bar{p}\eta(t), \tag{14}$$

虚拟控制器 $\alpha_1$ 设计为

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \\ &-\frac{1}{\lambda_1} (k_1 z_1 + \bar{\lambda}_1 - \dot{\alpha}_0) - \tanh \frac{z_1 \lambda_1}{\eta(t)} \hat{\varepsilon} - \\ &\hat{\Theta} \tanh \frac{z_1 \lambda_1}{\eta(t)} \|\phi_1(X_1)\| - \tanh \frac{z_1 \lambda_1}{\eta(t)} \hat{d}. \end{aligned} \tag{15}$$

通过计算 $\dot{V}_1$ , 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -k_1 z_1^2 + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\Theta} (A_1^\theta - \dot{\Theta}) + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\varepsilon} (A_1^\varepsilon - \dot{\varepsilon}) + \\ &\frac{1}{\gamma_3} \tilde{d} (A_1^{\bar{d}} - \dot{\bar{d}}) + \lambda_1 \beta_2 z_1 (z_2 + e_2) + \end{aligned}$$

$$(\Theta \|\phi_1(X_1)\| + \varepsilon + \bar{d}) \bar{p}\eta(t).$$

**第i步** ( $2 \leq i \leq n-1$ ) 计算 $z_i$ 的微分, 可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \\ &\lambda_i \alpha_i + \lambda_i \beta_{i+1} (z_{i+1} + e_{i+1}) + \lambda_i f_i + \\ &\lambda_i d_i + \bar{\lambda}_i + \frac{e_i}{\tau_i} + \frac{\hat{M}_i^2 e_i}{\sqrt{\hat{M}_i^2 e_i^2 + \omega^2(t)}} + z_i. \end{aligned} \tag{16}$$

取Lyapunov函数 $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2$ . 设计虚拟控制器 $\alpha_i$ 为

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \\ &-\frac{1}{\lambda_i} (k_i z_i + \bar{\lambda}_i + \lambda_{i-1} \beta_i (z_i + e_i) + \frac{e_i}{\tau_i} + z_i - \\ &e_i + \frac{\hat{M}_i^2 e_i}{\sqrt{\hat{M}_i^2 e_i^2 + \omega^2(t)}}) - \tanh \frac{z_i \lambda_i}{\eta(t)} \hat{\Theta} \times \\ &\|\phi_i(X_i)\| - \tanh \frac{z_i \lambda_i}{\eta(t)} \hat{\varepsilon} - \tanh \frac{z_i \lambda_i}{\eta(t)} \hat{d}. \end{aligned} \tag{17}$$

对 $V_i$ 求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \\ &-\sum_{j=1}^i k_j z_j^2 + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\Theta} (A_i^\theta - \dot{\Theta}) + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\varepsilon} (A_i^\varepsilon - \dot{\varepsilon}) + \\ &\frac{1}{\gamma_3} \tilde{d} (A_i^{\bar{d}} - \dot{\bar{d}}) + \lambda_i z_i \beta_{i+1} z_{i+1} + \sum_{j=2}^i e_j z_j + \\ &\lambda_i z_i \beta_{i+1} e_{i+1} + \sum_{j=1}^i (\Theta \|\phi_j(X_j)\| + \varepsilon + \bar{d}) \bar{p}\eta(t). \end{aligned}$$

**第n步** 取Lyapunov函数 $V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2$ . 设计控制输入 $u$ 为

$$\begin{aligned} u &= \\ &-\frac{1}{\lambda_n} (k_n z_n + \bar{\lambda}_n + \lambda_{n-1} \beta_n (z_n + e_n) + \frac{e_n}{\tau_n} + z_n + \\ &\frac{\hat{M}_n^2 e_n}{\sqrt{\hat{M}_n^2 e_n^2 + \omega^2(t)}} - e_n) - \tanh \frac{z_n \lambda_n}{\eta(t)} \hat{\varepsilon} - \\ &\hat{\Theta} \tanh \frac{z_n \lambda_n}{\eta(t)} \|\phi_n(X_n)\| - \tanh \frac{z_n \lambda_n}{\eta(t)} \hat{d}. \end{aligned} \tag{18}$$

设计自适应律为

$$\dot{\Theta} = A_n^\theta - \gamma_1 \eta(t) \hat{\Theta}, \tag{19}$$

$$\dot{\varepsilon} = A_n^\varepsilon - \gamma_2 \eta(t) \hat{\varepsilon}, \tag{20}$$

$$\dot{\bar{d}} = A_n^{\bar{d}} - \gamma_3 \eta(t) \hat{\bar{d}}. \tag{21}$$

通过计算 $\dot{V}_n$ , 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -\sum_{i=1}^n k_i z_i^2 + \tilde{\Theta} \eta(t) \hat{\Theta} + \tilde{\varepsilon} \eta(t) \hat{\varepsilon} + \tilde{d} \eta(t) \hat{\bar{d}} + \\ &(\Theta \|\phi_n(X_n)\| + \varepsilon + \bar{d}) \bar{p}\eta(t) + \sum_{i=2}^n e_i z_i. \end{aligned}$$

### 3.3.2 稳定性分析

**定理 1** 考虑具有全状态约束的非线性系统(1). 系统的初始条件满足  $V(0) \leq \beta$ , 其中  $\beta > 0$  为常数. 如果假设1-2均成立, 设计非线性滤波器(11)、控制器(18)及自适应律(19)-(21), 则可实现控制目标1)-3).

**证** 取 Lyapunov 函数  $V = V_n + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} e_i^2 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2l_i} \tilde{M}_i^2$ . 定义  $\Omega_1 = \{[y_d \ \dot{y}_d \ \ddot{y}_d]^T : y_d^2 + \dot{y}_d^2 + \ddot{y}_d^2 \leq \Pi_0\} \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega_2 = \{V(t) \leq \beta\} \subset \mathbb{R}^{3n+1}$ , 其中  $l_i$  和  $\Pi_0$  为正常数, 则在紧集  $\Omega_1 \times \Omega_2$  内存在正常数  $M_i$ , 使得  $(-\frac{\alpha_{i-1}}{\beta_i})' \leq M_i$ .

根据杨氏不等式, 得  $\eta(t)\tilde{\theta}\tilde{\theta} \leq \frac{1}{2}\eta(t)\theta^2$ ,  $\eta(t)\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon} \leq \frac{1}{2}\eta(t)\varepsilon^2$  和  $\eta(t)\tilde{d}\tilde{d} \leq \frac{1}{2}\eta(t)\bar{d}^2$ . 应用引理1可得  $M_i|e_i| \leq \frac{\hat{M}_i^2 e_i^2}{\sqrt{\hat{M}_i^2 e_i^2 + \omega^2(t)}} + \omega(t) + \tilde{M}_i|e_i|$ . 由引理3知  $\|\phi_i(X_i)\| \leq \Xi_i$ , 其中  $\Xi_i > 0$  为常数. 设计自适应律

$$\dot{\hat{M}}_i = l_i|e_i|, \quad i = 2, \dots, n. \quad (22)$$

定义  $\varphi = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \theta + \varepsilon + \bar{d})\bar{p} + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\bar{d}^2$ . 结合以上分析, 得  $\dot{V}$  为

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^n k_i z_i^2 - \sum_{i=2}^n \frac{e_i^2}{\tau_i} + (n-1)\omega(t) + \varphi\eta(t).$$

对上式两端在区间  $[0, t]$  内积分可得  $V(t) \leq V(0) + (n-1)\bar{\omega} + \varphi\bar{\eta}$ . 因此,  $V(t)$  有界, 故  $\tilde{\theta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{d}, z_i, e_j$  和  $\hat{M}_j$  均有界.

目标1)-2): 由  $\alpha_0$  有界, 可得  $\varsigma_1$  有界. 由引理4, 知  $-\beta_{11} < x_1 < \beta_{12}$  成立. 由式(2)-(3)有  $\beta_{1j}(0) = \infty$ , 从而  $\gamma_{1j}(0) = \infty > a_{1j}$ . 定义  $T_1 = \inf\{t : \gamma_{1j}(t) = a_{1j}, j = 1, 2\}$ . 当  $t \in [0, T_1)$  时,  $\gamma_{1j}(t) > a_{1j}$  及  $h(t) = 1$  成立, 得  $\mu_1 = 1, v_1 = 0$ , 故  $\alpha_1$  有界; 当  $t \in [T_1, \infty)$  时,  $0 < \beta_{1j}(t) \leq (\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T})^{2p} + \varepsilon_{1j}$  及  $|\dot{\beta}_{1j}(t)| \leq \frac{2p}{T_1^2}(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T})^{2p-1}$  成立. 当  $-\beta_{11}(t) < x_1(t) < 0$  时, 得  $0 < \gamma_{11}(t) \leq c\beta_{11}^2$ ; 同理, 当  $0 < x_1(t) < \beta_{12}(t)$  时,  $0 < \gamma_{12}(t) \leq c\beta_{12}^2$  成立. 再由  $\lambda_1$  和  $\bar{\lambda}_1$  有界得  $\alpha_1$  有界. 因此,  $\alpha_1$  在区间  $[0, \infty)$  内有界. 根据  $\beta_2$  的定义及  $h \in (0, 1]$ , 得  $\beta_2 \neq 0$ . 故  $s_2$  有界. 类似地,  $\varsigma_i (2 \leq i \leq n), \alpha_i (2 \leq i \leq n-1)$  及实际控制输入  $u$  均有界. 根据引理4,  $-\beta_{i1} < x_i < \beta_{i2}$  成立. 因此, 系统的所有状态被保证在非对称约束范围内.

目标3): 由  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=1}^n k_i z_i^2(s) ds \leq V(0) + (n-1)\bar{\omega} + \varphi\bar{\eta}$ . 由  $z_1$  的定义知  $z_1$  有界. 应用 Barbalat 引理, 得  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1 = 0$ . 将  $z_1 = \zeta_1 - \alpha_0$  应用二项式展开, 最终可以整理为  $e = \kappa z_1$ , 其中  $\kappa$  为有界函数. 故  $\lim_{t \rightarrow \infty} e =$

0. 因此, 系统能够实现渐近跟踪. 证毕.

### 4 实例仿真

考虑机器人机械手系统<sup>[8]</sup>

$$R\ddot{q} + D\dot{q} + Mgl \sin q = u, \quad (23)$$

其中:  $q$  和  $\dot{q}$  分别为机械臂转动角度和角速度;  $R$  表示伺服电机的转动惯量;  $D$  表示系统衰减系数;  $M$  表示连杆的质量;  $g$  表示重力加速度;  $l$  为连接处到重心的长度;  $u$  是控制力矩. 取  $R = 1, D = 2, Mgl = 10$ . 令  $x_1 = q$  和  $x_2 = \dot{q}$ , 则系统模型(23)可表示为  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u - 10 \sin x_1 - 2x_2$ . 参考信号设为  $y_d(t) = -0.5 \sin t + 0.5 \sin(0.5t)$ .

设计参数选取为  $\epsilon_{11} = \epsilon_{21} = 1.25, \epsilon_{12} = \epsilon_{22} = 1.3, T = 1, p = 3, k_1 = 0.01, k_2 = 10, \tau_2 = 0.8, \gamma_1 = 0.3, \gamma_2 = 0.01, \gamma_3 = 0.001, l_2 = 0.001, c = 10, \omega(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$ . 取初始值  $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [-1.3 \ -1]^T$ .

为了说明本文算法的有效性, 将本文方法与文献[13]和文献[15]中方法进行比较. 图2表明在本文控制算法下, 系统状态始终在预定范围内运行. 而文献[13]和文献[15]系统状态因不受约束超出给定的约束范围. 图3描绘的是不同控制算法下的跟踪误差图, 对比文献[13]和文献[15], 本文提出的控制策略跟踪效果更好. 图4描绘的是控制信号曲线.

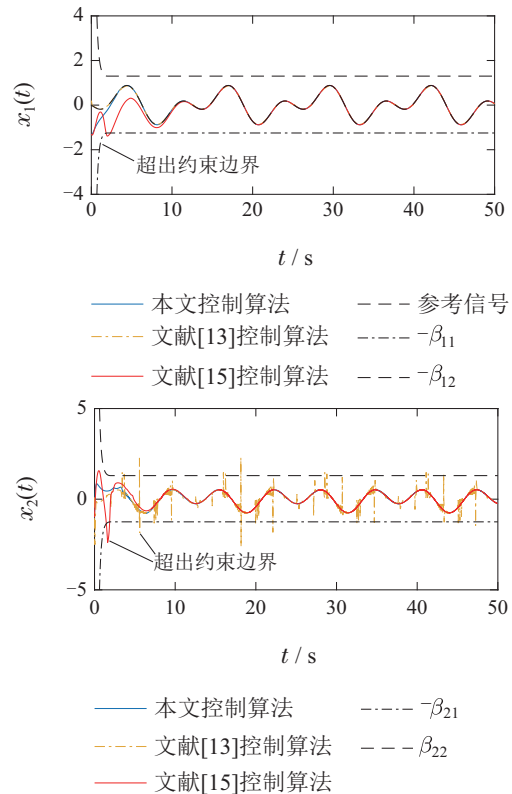


图2 不同控制算法下系统状态曲线  
Fig. 2 Curves of system states with different control schemes

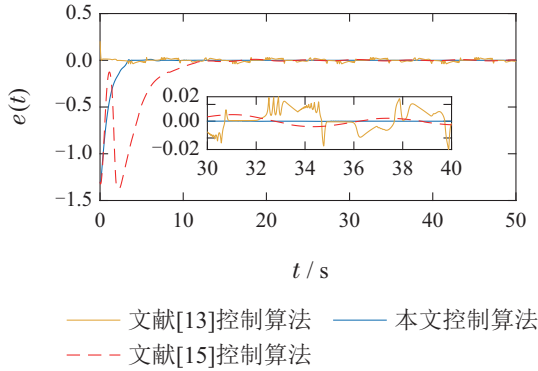


图3 不同控制算法下跟踪误差曲线

Fig. 3 Curves of tracking error with different control schemes

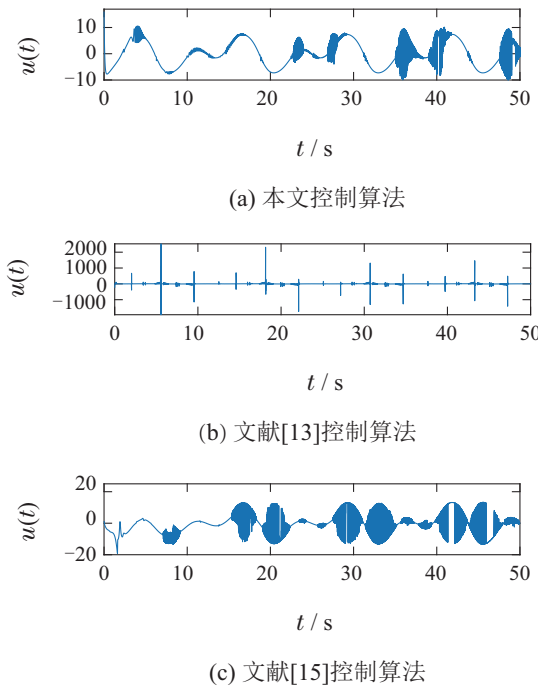
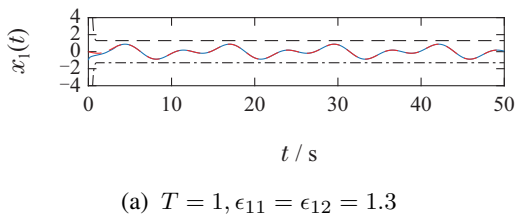


图4 不同控制算法下控制信号曲线

Fig. 4 Curves of control signal with different control schemes

取3组不同的参数进行仿真: a)  $T = 1, \epsilon_{11} = \epsilon_{12} = 1.3, \epsilon_{21} = 1.2, \epsilon_{22} = 1.1$ ; b)  $T = 0.2, \epsilon_{11} = \epsilon_{12} = 1.3, \epsilon_{21} = 1.2, \epsilon_{22} = 1.1$ ; c)  $T = 1, \epsilon_{11} = \epsilon_{21} = 0.5, \epsilon_{12} = \epsilon_{22} = 0.4$ . 由图5(a)–(b)可以看到系统状态能够在预设时间 $T = 0.2$  s和 $T = 1$  s内收敛到给定区域内. 进一步, 固定收敛时间同时减小收敛精度进行仿真. 给定期望信号为 $y_d = -0.1 \sin t + 0.1 \sin(0.5t)$ , 由图5(c)看到系统状态仍能够保持在性能包络内.



(a)  $T = 1, \epsilon_{11} = \epsilon_{12} = 1.3$

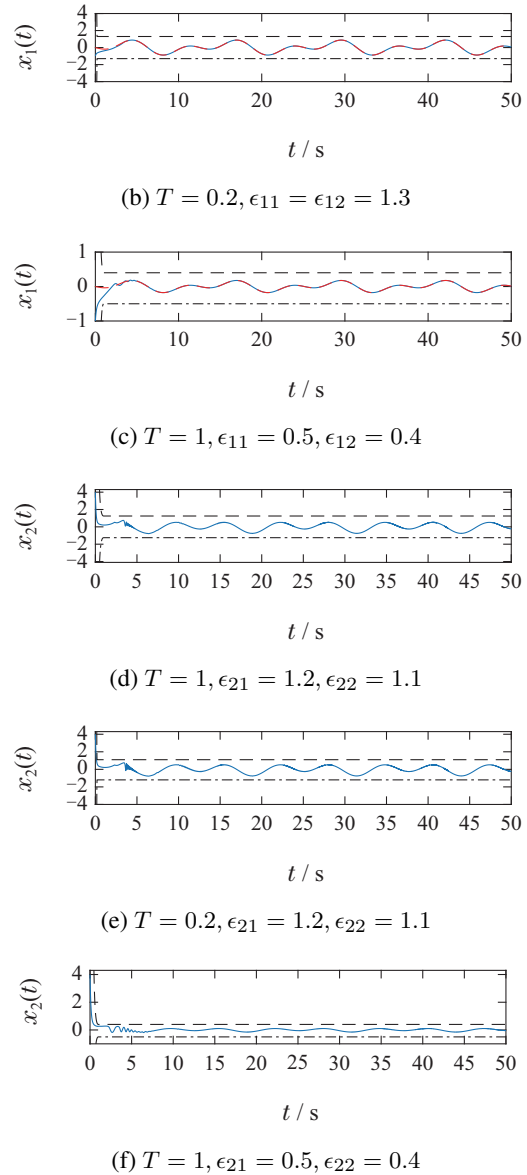


图5 不同性能要求下系统状态曲线

Fig. 5 Curves of system states with different performance requirements

图6是取不同 $k_1$ 值时, 跟踪误差的轨迹图. 可以看到 $k_1$ 越大, 超调量越大. 取较大初始值 $x_1(0) = [-11 \ 9], x_2(0) = [9 \ -8]$ , 图7表明系统状态仍然能够被约束到给定区域内, 因此放松了初始条件的限制.

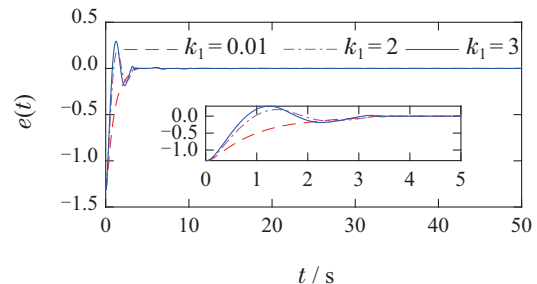


图6 跟踪误差曲线

Fig. 6 Curves of tracking error

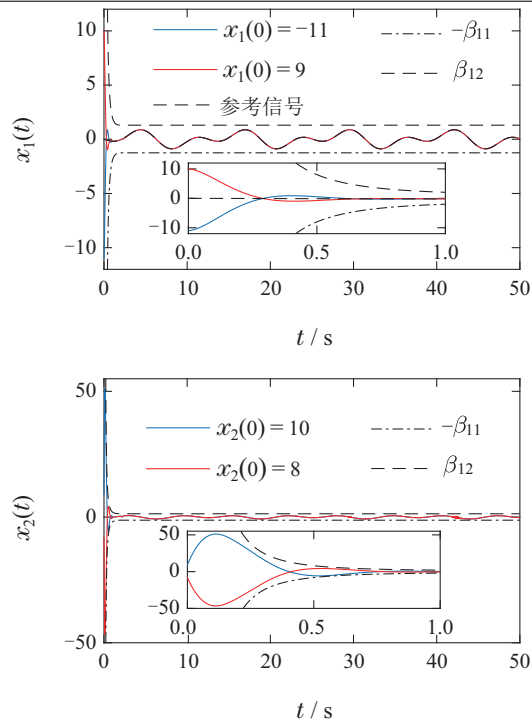


图7 不同初始条件下系统状态曲线

Fig. 7 Curves of system states under different initial conditions

## 5 结论

本文针对一类具有状态约束的非线性系统设计了自适应渐近跟踪控制器。通过引入一组预设时间性能函数, 所提出的方案可以使系统状态在预定时间内收敛到预定区域。此外, 构造了一种非对称转换函数, 有效解决了系统受非对称状态约束的问题。为了消除“微分爆炸”的问题, 引入了一阶滤波器; 然后, 基于反步法技术设计了自适应控制器, 既保证了系统不违反状态约束, 又保证了系统渐近跟踪性能; 最后, 一个应用实例证明了所提控制算法的有效性。

## 参考文献:

- [1] LV M, LI Y, PAN W, et al. Finite-time fuzzy adaptive constrained tracking control for hypersonic flight vehicles with singularity-free switching. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2022, 27(3): 1594 – 1605.
- [2] MA Z, HUANG P. Adaptive neural-network controller for an uncertain rigid manipulator with input saturation and full-order state constraint. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(5): 2907 – 2915.
- [3] LIU Y, TONG S. Barrier Lyapunov functions-based adaptive control for a class of nonlinear pure-feedback systems with full state constraints. *Automatica*, 2016, 64: 70 – 75.
- [4] LIU Y, LU S, LI D, et al. Adaptive controller design-based ABLF for a class of nonlinear time-varying state constraint systems. *IEEE*

*Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 47(7): 1546 – 1553.

- [5] GAO Fangzheng, LIU Yiting, LI Peijuan, et al. Prescribed-time stabilizing control of time-varying output constrained nonholonomic systems via non-scaling design. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(2): 248 – 255.  
(高芳征, 刘义亭, 李佩娟, 等. 时变输出约束非完整系统的非缩放预设时间镇定控制设计. *控制理论与应用*, 2023, 40(2): 248 – 255.)
- [6] LIU Y, TONG S, CHEN C L P, et al. Adaptive NN control using integral barrier Lyapunov functionals for uncertain nonlinear block-triangular constraint systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(11): 3747 – 3757.
- [7] ZHAO K, SONG Y. Removing the feasibility conditions imposed on tracking control designs for state-constrained strict-feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(3): 1265 – 1272.
- [8] SONG Z, LI P, SUN Z, et al. Finite-time adaptive fuzzy event-triggered control of constrained nonlinear systems via bounded command filter. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2023, 31(1): 117 – 128.
- [9] SUN H, HOU L. Adaptive decentralized finite-time tracking control for uncertain interconnected nonlinear systems with input quantization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31: 4491 – 4510.
- [10] CHANG S, WANG Y, ZUO Z. Fixed-time formation-containment control for uncertain multi-agent systems with varying gain extended state observer. *Information Sciences*, 2022, 612: 759 – 779.
- [11] ZHAO K, LEWIS F, ZHAO L. Unifying performance specifications in tracking control of MIMO nonlinear systems with actuation faults. *Automatica*, 2023, 155: 111102.
- [12] CAO Y, CAO J, SONG Y. Practical prescribed time tracking control over infinite time interval involving mismatched uncertainties and non-vanishing disturbances. *Automatica*, 2022, 136: 110050.
- [13] SONG C, SUN H, HOU L. A predefined time decentralized adaptive tracking control method for interconnected nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2023, 33(13): 7986 – 8014.
- [14] SUN Liang, WANG Jun. Full-state prescribed performance-based fixed-time relative pose control for feature points of two spacecraft with input saturation. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(4): 724 – 734.  
(孙亮, 王俊. 输入饱和的航天器特征点间相对位姿安全状态预设性能固定时间控制. *控制理论与应用*, 2023, 40(4): 724 – 734.)
- [15] LI Y. Command filter adaptive asymptotic tracking of uncertain nonlinear systems with time-varying parameters and disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, 67(6): 2973 – 2980.

## 作者简介:

**孔祥玲** 硕士研究生, 目前研究方向为非线性系统控制、约束控制等, E-mail: XianglingKong712@163.com;

**孙海滨** 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性系统控制、抗干扰控制及应用等, E-mail: seusunhaibin@gmail.com;

**侯林林** 教授, 博士生导师, 目前研究方向为切换系统、鲁棒控制及应用等, E-mail: houtingting8706@126.com.