

# 具有未知外部扰动的多智能体系统自适应抗扰一致性控制研究

朱 静<sup>1,2†</sup>, 姚程华<sup>1,3</sup>, 翟象平<sup>4</sup>

(1. 南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 211106; 2. 安徽建筑大学 智能建筑与建筑节能安徽省重点实验室, 安徽 合肥 230022;  
3. 上海航天电子技术研究所, 上海 201100; 4. 南京航空航天大学 计算机科学与技术学院, 江苏 南京 211106)

**摘要:** 本文研究了一类具有外部扰动, 且扰动来自于未知外生系统的多智能体系统抗扰一致性控制问题, 将控制器的参数设计转化为求解线性矩阵不等式的可行解。首先, 本文设计了一种自适应扰动观测器以估计扰动信息; 其次, 利用扰动估计信息, 提出了一种具有扰动补偿项的分布式动态输出反馈控制器设计方案, 该控制器既利用了相邻智能体的相对输出信息, 又利用了相邻控制器的相对状态信息; 接下来, 通过模型变换和系统解耦的方法, 将多智能体系统的鲁棒 $H_\infty$ 一致性控制问题简化为一组独立线性子系统的 $H_\infty$ 镇定问题, 得到了多智能体系统实现渐近一致的充分条件; 最后, 通过数值仿真验证了所设计的观测器和一致性控制器的有效性。

**关键词:** 多智能体系统; 鲁棒一致性; 自适应观测器; 外部干扰

**引用格式:** 朱静, 姚程华, 翟象平. 具有未知外部扰动的多智能体系统自适应抗扰一致性控制研究. 控制理论与应用, 2026, 43(4): 793 – 804

DOI: 10.7641/CTA.2024.40097

## Research on adaptive anti-disturbance consensus control of multi-agent systems with unknown external disturbances

ZHU Jing<sup>1,2†</sup>, YAO Cheng-hua<sup>1,3</sup>, ZHAI Xiang-ping<sup>4</sup>

(1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 211106, China;  
2. Anhui Province Key Laboratory of Intelligent Building and Building Energy Saving, Anhui Jianzhu University, Hefei Anhui 230022, China;  
3. Shanghai Institute of Aerospace Electronics Technology, Shanghai 201100, China;  
4. College of Computer Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 211106, China)

**Abstract:** This paper investigates the anti-disturbance consensus control problem of a class of multi-agent systems with external disturbances originating from unknown external sources. The parameter design of the controller is formulated as finding feasible solutions to a set of linear matrix inequalities. Firstly, an adaptive disturbance observer is designed to estimate disturbance information. Secondly, leveraging the estimated disturbance information, a distributed dynamic output feedback controller design is proposed, incorporating a disturbance compensation term. This controller utilizes both relative output information from neighboring agents and relative state information from adjacent controllers. Subsequently, through model transformation and system decoupling, the robust  $H_\infty$  consensus control problem for multi-agent systems is reduced to a set of independent  $H_\infty$  stabilization problems for single linear subsystems, providing sufficient conditions for the asymptotic consensus of multi-agent systems. Finally, the effectiveness of the designed observer and consensus controller is validated through numerical simulations.

**Key words:** multi-agent systems; robust consensus; adaptive disturbance observer; external disturbances

**Citation:** ZHU Jing, YAO Chenghua, ZHAI Xiangping. Research on adaptive anti-disturbance consensus control of multi-agent systems with unknown external disturbances. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(4): 793 – 804

收稿日期: 2024-02-06; 录用日期: 2024-11-22.

†通信作者. E-mail: drzhujing@nuaa.edu.cn.

本文责任编辑: 赵冬斌.

国家自然科学基金项目(62188101), 智能建筑与建筑节能安徽省重点实验室开放课题项目(IBES2021KF12), 江苏省自然科学基金项目(BK2022012, BK20231439)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62188101), the Open Foundation of Anhui Provincial Key Laboratory of Intelligent Building and Building Energy Saving (IBES2021KF12) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China (BK2022012, BK20231439).

## 1 引言

多智能体系统的分布式协同控制因其在编队控制<sup>[1-2]</sup>、智能交通控制<sup>[3-4]</sup>、分布式传感器网络<sup>[5-6]</sup>等领域的广泛应用而备受关注. 一致性控制作为多智能体系统协同控制的基础研究课题之一, 更是成为多智能体系统的研究重点. 一致性控制的基本思想是基于智能体动力学特性, 利用智能体自身及局部相邻信息设计分布式一致性控制协议, 从而实现系统状态的一致或同步. 早期有关一致性问题的研究主要针对简单的一阶或二阶多智能体系统展开<sup>[7-8]</sup>. 随着多智能体系统的复杂化, 大量控制系统无法简单地描述或线性化为一阶或二阶动力学模型. 以多无人机系统为例, 需要采用高阶动力学模型对其进行更全面地描述. 因此学者们纷纷关注具有更复杂动力学的多智能体系统一致性控制问题<sup>[9-10]</sup>. 近年来, 为解决实际应用中存在的诸多问题, 多智能体系统一致性问题的研究取得了丰硕的成果, 例如具有时滞的多智能体系统<sup>[11-12]</sup>、具有有限通信数据速率的多智能体系统<sup>[13-14]</sup>、具有非线性动力学的多智能体系统<sup>[15-16]</sup>等.

随着工业技术的发展, 人们对控制精度的要求越来越高. 然而在实际工程中, 各种干扰(包括外部扰动和系统不确定性)的存在是不可避免的, 这些干扰可能会影响控制精度, 甚至使系统不稳定. 因此, 有关多智能体系统抗扰一致性问题的研究得到了广泛的研究<sup>[17-19]</sup>. 目前在一致性问题中有关处理干扰的控制方法主要分为两类: 一类为反馈控制, 这类方法包括 $H_\infty$ 控制<sup>[20-21]</sup>、滑模控制<sup>[22-23]</sup>、模糊控制<sup>[24-25]</sup>等. 其中 $H_\infty$ 控制通常用来解决受外部干扰且能量有界的多智能体系统鲁棒一致性问题<sup>[20-21]</sup>. 但对于外部扰动能量过大的情况, 其控制效果较差. 这种情况下, 可采用 $H_\infty$ 控制与滑模控制相结合的方法提高系统的鲁棒性能<sup>[22]</sup>. 但采用滑模控制存在一个不可忽视的问题, 即抖振现象非常严重. 针对这一问题, 目前的研究成果发现将模糊控制、滑模控制以及一致性控制理论相结合, 通过引入模糊逻辑取代传统滑模控制中的切换控制, 可以有效解决传统群体控制中的系统抖振问题<sup>[24]</sup>. 其实反馈控制抗扰这类方法的本质是通过反馈调节被测输出与其设定值之间的跟踪误差来实现干扰抑制, 这类一致性控制方法也被称为被动抗干扰控制方法, 主要的缺点是: 一方面, 它们处理(强)扰动的速度不够快; 另一方面, 它们通常以牺牲控制性能为代价通过鲁棒方式实现干扰抑制.

另一类处理干扰的控制方法为前馈控制, 这类方法主要包括基于状态观测器<sup>[26-27]</sup>和基于干扰观测器的扰动补偿一致性控制<sup>[28-29]</sup>. 但现有研究成果中, 无论是状态观测器, 还是干扰观测器的构建, 其在设计过程中大部分都利用了智能体相对或绝对状态信

息<sup>[28-29]</sup>. 然而, 当智能体自身状态难以获取时, 此类观测器无法构建, 所提一致性控制算法失效, 因此, 有必要考虑基于测量输出信息构建干扰观测器的方法.

此外需要指出的是, 在现有的处理多智能体系统扰动问题的一致性控制研究成果中, 大多数都假设外部扰动系统的参数矩阵已知<sup>[26-28]</sup>. 但由于外部扰动系统与被控多智能体系统通常是独立的, 在实际中很难得到其准确的参数矩阵, 这对干扰观测器的构造以及多智能体系统一致性控制提出了更大的挑战. 到目前为止, 对于具有未知外部扰动系统的线性多智能体系统的一致性控制问题还没有得到充分的研究.

鉴于上述原因, 本文研究了在参数矩阵未知的外部系统产生的干扰下, 多智能体系统的鲁棒 $H_\infty$ 一致性控制问题. 本文的主要贡献有以下3点:

1) 针对具有未知外部扰动的多智能体系统, 仅利用测量输出信息设计自适应扰动观测器, 可以准确快速地估计未知外部扰动信息, 缩短了扰动估计所需时间, 提高了扰动估计速度, 并且所设计的观测器适用于外部扰动系统参数矩阵未知的场景, 更具实际意义;

2) 设计了具有扰动补偿项的动态输出反馈一致性控制器, 避免了扰动对闭环系统的影响, 且本文所提动态输出反馈控制器与自适应扰动观测器是完全解耦的, 这样做的目的是使两者的控制增益矩阵的可解性互不影响, 同时降低了线性矩阵不等式的维数与其计算的难度, 以及降低了一致性协议设计的复杂度;

3) 本文所提自适应扰动观测器和一致性控制器都仅利用测量输出信息, 相较于现有文献中的状态反馈控制器以及基于状态观测器型的反馈控制器, 输出信息更易获取且可以对系统实现降维控制, 相较于单一的静态输出反馈控制器以及动态输出反馈控制器, 本文提出的自适应扰动观测器与动态输出反馈控制器相结合的形式, 保证了一致性协议具有更强的鲁棒性.

本文其余部分结构安排: 第2节介绍本文用到的符号、图论相关知识以及对问题进行阐述; 第3节提出一种自适应扰动观测器以及基于观测器的动态输出反馈一致性控制协议; 第4节用一个数值仿真算例验证理论结果的有效性; 最后, 在第5节做出了总结.

## 2 预备知识

在本文中,  $\mathbb{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 维欧式空间. 对于矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\lambda(X)$ 表示矩阵 $X$ 的特征值,  $\|X\|$ 表示矩阵 $X$ 的欧几里德范数.  $*$ 表示对称块矩阵中省略的对称项.  $\otimes$ 表示克罗内克积.  $\text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_3\}$ 表示以 $d_1, d_2, \dots, d_3$ 为对角元素的对角矩阵.  $\text{He}\{\cdot\}$ 为厄米算符, 定义为 $\text{He}(A) = A + A^T$ .

对于由 $N$ 个智能体组成的多智能体系统, 各智能体之间的通信网络可以用无向拓扑图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 表示, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 称为图 $\mathcal{G}$ 的节点集,  $\mathcal{E} \subseteq$

$\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 称为图 $\mathcal{G}$ 的边集,  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $a_{ij} \geq 0$ 则是图 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵. 无向边 $(i, j)$ 表示节点 $i$ 和节点 $j$ 之间可以进行信息交互. 节点 $i$ 的所有邻居节点的集合表示为 $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} \mid (j, i) \in \mathcal{E}\}$ . 如果 $(i, j) \in \mathcal{E}$ , 则 $a_{ij} = a_{ji} > 0$ , 否则 $a_{ij} = 0$ . 图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵 $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 定义为 $L = D - A$ , 其中 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ ,  $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 表示 $\mathcal{G}$ 的度矩阵. 如果每个节点与其他任一节点之间都存在一条无向路径, 那么称无向图 $\mathcal{G}$ 是连通的. 由拉普拉斯矩阵的定义可知 $L$ 至少有一个零特征值, 其对应的特征向量为 $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1} = [1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ .

本文考虑一个由 $N$ 个智能体组成的多智能体系统, 这些智能体具有相同的线性动力学模型, 且都受到由外部系统产生的外部干扰的影响. 其中, 第 $i$ 个智能体的动力学模型如下所示:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t) + D_1\omega_i(t), \\ y_i(t) = Cx_i(t) + D_2\omega_i(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u_i(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $y_i(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ 分别表示第 $i$ 个智能体的状态信息、控制输入和测量输出.  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_\omega}$ 和 $D_2 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_\omega}$ 都是已知常数矩阵,  $\omega_i \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ 表示由如下参数矩阵未知的外生系统产生的外部扰动:

$$\dot{\omega}_i(t) = S_i\omega_i(t) + \delta_i(t), \quad (2)$$

其中 $\delta_i(t)$ 表示附加激励信号, 具有有界能量, 即 $\|\delta_i(t)\|_2 \leq \sigma$ , 其中 $\sigma$ 为标量, 包含了外生系统(2)中的随机扰动、不确定性等.  $S_i$ 是具有适当维度的未知常实数矩阵且受到已知界限的约束, 即 $\|S_i\| \leq \epsilon$ .

**注1** 许多类型的扰动可以用动力学方程(2)表示, 如谐波扰动、定值扰动和定值稳态扰动. 类似的假设在现有文献中也很常见, 如文献[29–30]. 在这些结果中, 系统参数矩阵 $S_i$ 必须是已知的. 然而, 在实际应用中, 更常见的是频率未知的外部干扰, 未知的频率会导致矩阵 $S_i$ 不是先验的.

为便于后续公式推导证明, 提出以下引理与假设:

**引理1** 对于具有适当维度的向量 $x$ 和 $y$ , 可以得到 $x^T y = \text{tr}(xy^T)$ , 其中 $\text{tr}(xy^T)$ 表示矩阵 $xy^T$ 的迹.

**引理2** 对于给定的对称矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix},$$

其中:  $S_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $S_{12} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$ ,  $S_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ . 下列3种表述具有等价性:

- 1)  $S < 0$ ;
- 2)  $S_{11} < 0$ 且 $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ ;
- 3)  $S_{22} < 0$ 且 $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ .

**引理3** 设矩阵 $R = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 取值如下:

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{N-1}{N}, & i = j, \\ -\frac{1}{N}, & i \neq j, \end{cases}$$

则矩阵 $R$ 具有以下性质:

1)  $R$ 特征值为 $\lambda_1(R) = 0$ ,  $\lambda_2(R) = \dots = \lambda_N(R) = 1$ , 并且 $R\mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ ;

2) 存在正交矩阵 $U = [U_1 \ U_2]$ 使得

$$U^T R U = \begin{bmatrix} U_1^T R U_1 & U_1^T R U_2 \\ U_2^T R U_1 & U_2^T R U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

在本文中选择 $U_1^T \mathbf{1} = \mathbf{0}$ 和 $U_2 = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{N}}$ . 因此, 对连通无向图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵 $L$ 满足

$$U^T L U = \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $L_1 \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 是正定矩阵.

**假设1** 对于系统(1)中的矩阵,  $(A, B)$ 是可镇定的,  $(A, C)$ 是可观测的.

**假设2** 系统(1)的通信拓扑图 $\mathcal{G}$ 是无向连通图.

**假设3** 在系统(1)中, 输入矩阵 $B$ 和输入扰动分布矩阵 $D_1$ 满足 $\text{rank}([B \ D_1]) = \text{rank}(B)$ .

需要说明的是, 假设1中 $(A, B)$ 是可镇定的, 保证了在没有外部干扰的情况下, 所有的智能体都是可控的, 而 $(A, C)$ 是可观测的, 对保证系统(1)的输出反馈控制器存在起着至关重要的作用. 假设2通常用于一致性控制, 它是多智能体系统一致性问题具有可解性的基本先决条件. 假设3在文献中较为常见<sup>[28–30]</sup>. 实际上为了消除不匹配扰动的影响, 有必要增加扰动补偿项 $-K_d \hat{\omega}_i(t)$ , 其中 $K_d$ 为控制器中待设计的扰动补偿项控制增益矩阵,  $\hat{\omega}_i$ 为扰动估计信息. 假设3意味着矩阵方程 $BK_d = D_1$ 是可解的, 也就是说, 可以计算参数矩阵 $K_d = B^+ D_1$ , 其中 $B^+$ 代表矩阵 $B$ 的摩尔-彭若斯(Moore-Penrose)广义逆矩阵.

## 3 主要内容

### 3.1 自适应干扰观测器设计

针对具有未知外部扰动的多智能体系统, 构造如下观测器, 以获取扰动信息和第 $i$ 个智能体状态信息:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t) = A\hat{x}_i(t) + Bu_i(t) + D_1\hat{\omega}_i(t) + K_1(y_i(t) - \hat{y}_i(t)), \\ \dot{\hat{\omega}}_i(t) = \hat{S}_i\hat{\omega}_i(t) + K_2(y_i(t) - \hat{y}_i(t)), \\ \hat{y}_i(t) = C\hat{x}_i(t) + D_2\hat{\omega}_i(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $\hat{x}_i(t)$ ,  $\hat{y}_i(t)$ 和 $\hat{\omega}_i(t)$ 分别是 $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ 和 $\omega_i(t)$ 的

估计值,  $K_1$ 和 $K_2$ 为待设计的控制增益矩阵,  $\hat{S}_i$ 满足

$$\dot{\hat{S}}_i = g(\hat{S}_i, \hat{x}_i(t), \hat{\omega}_i(t), \hat{y}_i(t), y_i(t)),$$

其中自适应律 $g$ 将在下文设计.

定义 $e_{x_i}(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ ,  $e_{\omega_i}(t) = \omega_i(t) - \hat{\omega}_i(t)$ 和 $e_{y_i}(t) = y_i(t) - \hat{y}_i(t)$ , 并定义

$$\eta_i(t) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ \omega_i(t) \end{bmatrix}, \hat{\eta}_i(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_i(t) \\ \hat{\omega}_i(t) \end{bmatrix},$$

$$e_i(t) = \begin{bmatrix} e_{x_i}(t) \\ e_{\omega_i}(t) \end{bmatrix}.$$

结合式(1)–(3), 可以将系统的误差动力学描述为

$$\dot{e}_i(t) = (A_1 - KC_1 + T_1 S_i T_1^T) e_i(t) + T_1 \delta_i(t) + T_1 \tilde{S}_i T_1^T \hat{\eta}_i(t), \quad (4)$$

其中:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \end{bmatrix}, \tilde{S}_i = S_i - \hat{S}_i,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & D_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}, C_1 = [C \ D_2].$$

接下来给出自适应律 $g$ 和自适应观测器(3)中控制增益矩阵 $K_1$ 和 $K_2$ 的设计算法.

**定理 1** 如果对于给定的正实数 $\gamma_1$ , 存在对称正定矩阵 $X$ ,  $Z$ 和具有适当维度的矩阵 $Y$ ,  $Q$ , 使得自适应律 $g(\hat{S}_i, \hat{x}_i(t), \hat{\omega}_i(t), \hat{y}_i(t), y_i(t))$ 满足

$$\dot{\hat{S}}_i = X^{-1} Y e_{y_i}(t) \hat{\omega}_i^T(t), \quad (5)$$

$$T_1^T Z = Y C_1, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{Z A_1 - Q C_1\} + 2\epsilon Z + I & Z T_1 \\ * & -\gamma_1^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

那么自适应观测器(3)能以期望的 $H_\infty$ 性能 $\gamma_1$ 渐近估计出系统(1)的状态和扰动信息. 即如下式所示:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \delta_i(t) = 0, \\ \int_0^t e_i^T(s) e_i(s) ds < \gamma_1^2 \int_0^t \delta_i^T(s) \delta_i(s) ds, \\ \delta_i(t) \neq 0, \end{cases} \quad (8)$$

其自适应观测器的控制增益矩阵可以设计为 $K =$

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = Z^{-1} Q.$$

**证** 构造如下Lyapunov函数:

$$V_1(t) = e_i^T(t) Z e_i(t) + \text{tr}(\tilde{S}_i^T X \tilde{S}_i), \quad (9)$$

对Lyapunov函数 $V_1$ 求导可得

$$\dot{V}_1(t) = e_i^T(t) \Phi_1 e_i(t) + 2e_i^T(t) Z T_1 \tilde{S}_i T_1^T \hat{\eta}_i(t) + 2e_i^T(t) Z T_1 \delta_i(t) + 2\text{tr}(\tilde{S}_i^T X \dot{\tilde{S}}_i), \quad (10)$$

其中 $\Phi_1 = \text{He}\{Z A_1 - Z K C_1 + Z T_1 S_i T_1^T\}$ . 由于 $\|S_i\| \leq \epsilon$ 且 $\|T_1\| \leq 1$ , 因此,  $\|T_1 S_i T_1^T\| \leq \epsilon$ . 所以, 可以得到如下不等式成立:

$$\Phi_1 \leq \Phi_2 = \text{He}\{Z A_1 - Z K C_1\} + 2\epsilon Z, \quad (11)$$

又由于 $S_i$ 是一个常数矩阵, 因此,  $\dot{S}_i = 0$ ,  $\dot{\tilde{S}}_i = \dot{S}_i - \dot{\hat{S}}_i = -\dot{\hat{S}}_i$ . 那么, 式(10)可以重写为

$$\dot{V}_1 \leq e_i^T(t) \Phi_2 e_i(t) + 2e_i^T(t) Z T_1 \tilde{S}_i T_1^T \hat{\eta}_i(t) + 2e_i^T(t) Z T_1 \delta_i(t) - 2\text{tr}(\tilde{S}_i^T X \dot{\tilde{S}}_i), \quad (12)$$

注意到 $T_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\eta}_i(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_i(t) \\ \hat{\omega}_i(t) \end{bmatrix}$ , 所以有

$$\hat{\eta}_i^T(t) T_1 = \hat{\omega}_i^T(t), \quad (13)$$

结合引理1, 自适应律(5)–(6), 可以进一步得到

$$2e_i^T(t) Z T_1 \tilde{S}_i T_1^T \hat{\eta}_i(t) - 2\text{tr}(\tilde{S}_i^T X \dot{\tilde{S}}_i) = 2\text{tr}(\tilde{S}_i^T Y e_{y_i}(t) \hat{\omega}_i^T(t)) - 2\text{tr}(\tilde{S}_i^T X X^{-1} \times Y e_{y_i}(t) \hat{\omega}_i^T(t)) = 0. \quad (14)$$

结合式(12)和式(14), 可以得到

$$\dot{V}_1(t) \leq e_i^T(t) \Phi_2 e_i(t) + 2e_i^T(t) Z T_1 \delta_i(t). \quad (15)$$

首先, 对 $\delta_i(t) = 0$ 的情况做分析, 此时式(15)变为 $\dot{V}_1(t) \leq e_i^T(t) \Phi_2 e_i(t)$ . 注意到当 $\Phi_2 < 0$ , 即

$$(A_1 - K C_1)^T Z + Z(A_1 - K C_1) + 2\epsilon Z < 0, \quad (16)$$

可以得到 $\dot{V}_1(t) < 0$ 成立. 这意味着当 $\delta_i(t) = 0$ 时, 自适应观测器(3)能渐近估计系统(1)的状态和扰动信息.

接下来, 考虑另一种情况, 即 $\delta_i(t) \neq 0$ . 此时定义

$$J_1(t) = \dot{V}_1(t) + e_i^T(t) e_i(t) - \gamma_1^2 \delta_i^T(t) \delta_i(t), \quad (17)$$

在零初始条件下, 式(17)等价于

$$\int_0^t J_1(s) ds = V_1(t) + \int_0^t e_i^T(s) e_i(s) ds - \gamma_1^2 \int_0^t \delta_i^T(s) \delta_i(s) ds, \quad (18)$$

因为 $V_1(t) > 0$ , 因此可以发现 $J_1(t) < 0$ 意味着

$$\int_0^t e_i^T(s) e_i(s) ds < \gamma_1^2 \int_0^t \delta_i^T(s) \delta_i(s) ds,$$

下面分析 $J_1(t) < 0$ 的充分条件, 由式(16)–(17)可知

$$J_1(t) \leq e_i^T(t) \Phi_2 e_i(t) + 2e_i^T(t) Z T_1 \delta_i(t) + e_i^T(t) e_i(t) - \gamma_1^2 \delta_i^T(t) \delta_i(t) = \xi_i^T(t) \Theta \xi_i(t), \quad (19)$$

其中:

$$\xi_i(t) = [e_i^T(t) \ \delta_i^T(t)]^T,$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \text{He}\{Z A_1 - Z K C_1\} + 2\epsilon Z + I & Z T_1 \\ * & -\gamma_1^2 I \end{bmatrix}.$$

从式(19)可知  $J_1(t) < 0$  等价于

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{ZA_1 - ZKC_1\} + 2\epsilon Z + I & ZT_1 \\ * & -\gamma_1^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

定义  $ZK = Q$ , 根据引理2可知, 式(16)和式(20)可以合并成一个条件, 即当如下不等式成立时:

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{ZA_1 - QC_1\} + 2\epsilon Z + I & ZT_1 \\ * & -\gamma_1^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

观测器(3)能以期望  $H_\infty$  性能  $\gamma_1$  渐近估计系统(1)的状态和扰动信息. 通过MATLAB中的LMI工具箱求解线性矩阵不等式(7), 得到矩阵  $Z$  和  $Q$ , 因此观测器(3)的增益矩阵可以设计为  $K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = Z^{-1}Q$ . 证毕.

需要说明的是为了便于计算, 可根据引理2将定理1中的式(6)转化为如下线性矩阵不等式的形式:

$$\begin{bmatrix} -\mu I & T_1^T Z - YC_1 \\ * & -\mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

其中  $\mu$  是一个正标量.

**注 2** 定理1中的线性矩阵不等式的维数与多智能体系统中的智能体个数无关, 其只与单个智能体系统矩阵的维数相关, 降低了线性矩阵不等式求解的复杂度. 此外, 与扰动估计的现有研究成果相比, 本文所提的方法不需要知道外源系统的参数矩阵. 在过去几年里取得的许多关于扰动估计的优秀成果中, 都是基于系统状态来构建扰动观测器, 但在实际应用中很难获取多智能体系统的每个状态, 而本文的观测器在设计过程中仅利用测量输出. 从这个角度看, 本文所提方法具有更广泛的应用范围. 同时这也符合本文考虑到多智能体系统的状态信息难以获得且成本较高, 从而研究基于输出反馈的一致性控制器的初衷.

### 3.2 具有扰动补偿项的动态输出反馈一致性协议

在本节中, 利用第3.1节中观测器的估计信息, 设计基于自适应观测器的动态输出反馈一致性控制协议, 系统的控制结构框图如图1所示.

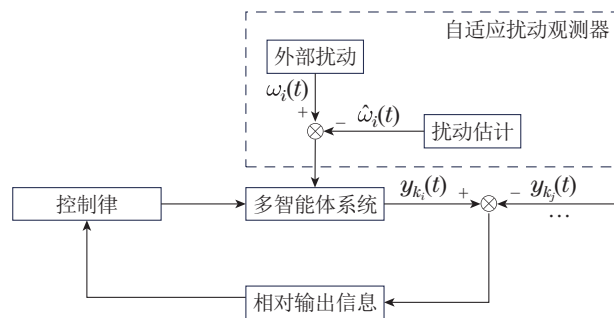


图 1 系统控制结构框图

Fig. 1 System control structure diagram

为了描述智能体  $i$  的状态与所有智能体平均状态

之间的误差, 定义如下平均一致误差函数:

$$z_i(t) = x_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t). \quad (22)$$

基于动态输出反馈形式, 提出了一种新颖的分布式动态输出反馈控制协议, 其不仅利用控制器的状态信息和智能体之间的相对输出信息, 还利用控制器之间的相对信息, 以提高系统的鲁棒性能, 具体形式如下:

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t) = E_k v_i(t) + A_k \sum_{j=N_i} a_{ij} (v_i(t) - v_j(t)) + \\ \quad B_k \sum_{j=N_i} a_{ij} (y_{k_i}(t) - y_{k_j}(t)), \\ u_i(t) = F_k v_i(t) + C_k \sum_{j=N_i} a_{ij} (v_i(t) - v_j(t)) + \\ \quad D_k \sum_{j=N_i} a_{ij} (y_{k_i}(t) - y_{k_j}(t)) - K_d \hat{\omega}_i(t), \\ y_{k_i}(t) = C \hat{x}_i(t), \end{cases} \quad (23)$$

其中:  $v_i(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$  表示控制器的状态信息,  $y_{k_i}(t)$  表示消除扰动后的输出信息估计值,  $A_k \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$ ,  $B_k \in \mathbb{R}^{n_v \times n_y}$ ,  $C_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_v}$ ,  $D_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ ,  $E_k \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$ ,  $F_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_v}$ ,  $K_d$  都是待设计的控制增益矩阵.

将控制器(23)代入系统式(1)中, 根据假设3, 不难发现存在一个矩阵  $K_d$ , 使得  $BK_d = D_1$ . 实际上可以选择  $K_d = B^+ D_1$ , 结合式(22)将其改写成矩阵形式, 即

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (I \otimes A)x(t) + (I \otimes BF_k)v(t) + \\ \quad (L \otimes BC_k)v(t) - (L \otimes BD_k C)e_x(t) + \\ \quad (L \otimes BD_k C)x(t) + (I \otimes D_1)e_w(t), \\ \dot{v}(t) = (I \otimes E_k)v(t) + (L \otimes A_k)v(t) - \\ \quad (L \otimes B_k C)e_x(t) + (L \otimes B_k C)x(t), \\ z(t) = (R \otimes I)x(t), \end{cases} \quad (24)$$

其中:  $x(t), v(t), z(t), e_x(t)$  和  $e_w(t)$  分别是  $x_i(t), v_i(t), z_i(t), e_{x_i}(t)$  和  $e_{w_i}(t)$  的列向量. 矩阵  $R$  同引理3中的  $R$ .

基于假设2, 多智能体系统(1)的拉普拉斯矩阵  $L$  有且只有一个零特征值. 因此, 可以将系统(1)的鲁棒  $H_\infty$  问题简化为  $N - 1$  个独立线性子系统的  $H_\infty$  稳定性问题. 这种方法降低了问题的复杂性. 首先, 根据引理3, 对  $x(t), v(t), e_x(t), e_w(t)$  做正交变换, 左乘  $U^T R \otimes I$  得到  $\tilde{x}(t), \tilde{v}(t), \tilde{e}_x(t), \tilde{e}_w(t)$ , 对  $z(t)$  做正交变换, 左乘  $U^T \otimes I$  得到  $\tilde{z}(t)$ . 其中矩阵  $R, U$  同引理3中的矩阵  $R, U$ .

将  $\tilde{x}(t)$  分成两列向量, 即  $\tilde{x}(t) = [\tilde{x}^1(t)^T \ \tilde{x}^2(t)^T]^T$ , 对  $\tilde{v}^1(t), \tilde{v}^2(t), \tilde{e}_x^1(t), \tilde{e}_x^2(t), \tilde{e}_w^1(t), \tilde{e}_w^2(t), \tilde{z}^1(t)$  和  $\tilde{z}^2(t)$

也做相同定义, 变换后的模型可以描述为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = & \left( \begin{bmatrix} I_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \otimes A + \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \otimes BD_k C \right) \begin{bmatrix} \hat{x}^1(t) \\ \hat{x}^2(t) \end{bmatrix} + \\ & \left( \begin{bmatrix} I_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \otimes BF_k + \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \otimes BC_k \right) \begin{bmatrix} \tilde{v}^1(t) \\ \tilde{v}^2(t) \end{bmatrix} - \\ & \left( \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \otimes BD_k C \right) \begin{bmatrix} \tilde{e}_x^1(t) \\ \tilde{e}_x^2(t) \end{bmatrix} + \\ & \left( \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \otimes D_1 \right) \begin{bmatrix} \tilde{e}_\omega^1(t) \\ \tilde{e}_\omega^2(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}(t) = & \left( \begin{bmatrix} I_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \otimes E_k + \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \otimes A_k \right) \begin{bmatrix} \tilde{v}^1(t) \\ \tilde{v}^2(t) \end{bmatrix} - \\ & \left( \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \otimes B_k C \right) \begin{bmatrix} \tilde{e}_x^1(t) \\ \tilde{e}_x^2(t) \end{bmatrix} + \\ & \left( \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \otimes B_k C \right) \begin{bmatrix} \hat{x}^1(t) \\ \hat{x}^2(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\tilde{z}(t) = \left( \begin{bmatrix} I_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \otimes I \right) \begin{bmatrix} \tilde{e}_x^1(t) \\ \tilde{e}_x^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

其中矩阵 $L_1$ 同引理3中的 $L_1$ . 将其分为两个部分得到

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^1(t) = (I \otimes A + L_1 \otimes BD_k C) \hat{x}^1(t) - \\ \quad (L_1 \otimes BD_k C) \tilde{e}_x^1(t) + (I \otimes D_1) \tilde{e}_\omega^1(t) + \\ \quad (I \otimes BF_k + L_1 \otimes BC_k) \tilde{v}^1(t), \\ \dot{\tilde{v}}^1(t) = (L_1 \otimes B_k C) \hat{x}^1(t) - (L_1 \otimes B_k C) \tilde{e}_x^1(t) + \\ \quad (I \otimes E_k + L_1 \otimes A_k) \tilde{v}^1(t), \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^2(t) = \mathbf{0}, \\ \dot{\tilde{v}}^2(t) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (29)$$

从式(27)可知 $\tilde{z}(t) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \hat{x}^1(t) = \mathbf{0}$ .  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}(t) = \mathbf{0}$ 意味着系统(1)实现一致性, 因此系统(28)的鲁棒稳定性将保证系统(1)的鲁棒一致性, 所以接下来分析系统(28)的鲁棒稳定性. 基于假设2可知矩阵 $L_1$ 是正定阵. 因此, 存在一个酉矩阵 $U_3 \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 使得

$$U_3^T L_1 U_3 = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\} = A,$$

其中:  $\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\}$ 为一个对角矩阵,  $\lambda_i$ 为矩阵 $L_1$ 的第 $i$ 个特征值, 且 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N-1}$ .

对 $\hat{x}^1(t)$ ,  $\tilde{v}^1(t)$ ,  $\tilde{z}(t)$ 做正交变换, 左乘 $U_3^T \otimes I$ 得到 $\bar{x}^1(t)$ ,  $\bar{v}^1(t)$ ,  $\bar{z}(t)$ , 对 $\tilde{e}_x(t)$ 和 $\tilde{e}_\omega(t)$ 左乘 $U_3^T R \otimes I$ 得到 $\bar{e}_x(t)$ 和 $\bar{e}_\omega(t)$ , 系统式(28)可以改写成如下系统:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^1(t) = (I_{N-1} \otimes A + \Lambda \otimes BD_k C) \bar{x}^1(t) - \\ \quad (\Lambda \otimes BD_k C) \bar{e}_x^1(t) + (I_{N-1} \otimes D_1) \bar{e}_\omega^1(t) + \\ \quad (I_{N-1} \otimes BF_k + \Lambda \otimes BC_k) \bar{v}^1(t), \\ \dot{\bar{v}}^1(t) = (\Lambda \otimes B_k C) \bar{x}^1(t) - (\Lambda \otimes B_k C) \bar{e}_x^1(t) + \\ \quad (I_{N-1} \otimes E_k + \Lambda \otimes A_k) \bar{v}^1(t). \end{cases} \quad (30)$$

因 $\Lambda$ 是对角阵, 所以式(30)可解耦成如下 $N-1$ 个子系统:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_i(t) = (A + \lambda_i BD_k C) \bar{x}_i(t) - \lambda_i BD_k C \bar{e}_{x_i}(t) + \\ \quad D_1 \bar{e}_{\omega_i}(t) + (BF_k + \lambda_i BC_k) \bar{v}_i(t), \\ \dot{\bar{v}}_i(t) = \lambda B_k C \bar{x}_i(t) - \lambda_i B_k C \bar{e}_{x_i}(t) + \\ \quad (E_k + \lambda_i A_k) \bar{v}_i(t). \end{cases} \quad (31)$$

引入 $\zeta_i(t) = [\bar{x}_i^T(t) \ \bar{v}_i^T(t)]^T$ ,  $\bar{e}_i(t) = [\bar{e}_{x_i}^T(t) \ \bar{e}_{\omega_i}^T(t)]^T$ , 结合平均一致性误差函数(22), 可得到如下闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_i(t) = \bar{A} \zeta_i(t) + \bar{D} \bar{e}_i(t), \\ \bar{z}_i(t) = T_2 \zeta_i(t), \end{cases} \quad (32)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} A + \lambda_i BD_k C & BF_k + \lambda_i BC_k \\ \lambda_i B_k C & E_k + \lambda_i A_k \end{bmatrix}, \\ \bar{D} &= \begin{bmatrix} -\lambda_i BD_k C & D_1 \\ -\lambda_i B_k C & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ T_2 &= [I \ \mathbf{0}]. \end{aligned}$$

**定理 2** 考虑满足假设1和2的多智能体系统(1).

对给定的正实数 $\gamma_2$ , 若存在对称正定矩阵 $P_1$ ,  $Q_1$ 和矩阵 $\hat{A}_k$ ,  $\hat{B}_k$ ,  $\hat{C}_k$ ,  $\hat{D}_k$ ,  $\hat{E}_k$ ,  $\hat{F}_k$ , 使如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -\lambda_i B \hat{D}_k C & D_1 & Q_1 \\ * & \phi_{22} & -\lambda_i \hat{B}_k C & P_1 D_1 & I \\ * & * & -\gamma_2^2 I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\gamma_2^2 I & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

其中:

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \text{He}\{A Q_1 + \lambda_i B \hat{C}_k + B \hat{F}_k\}, \\ \phi_{12} &= A + \lambda_i B \hat{D}_k C + (\hat{E}_k + \lambda_i \hat{A}_k)^T, \\ \phi_{22} &= P_1 A + \lambda_i \hat{B}_k C + (P_1 A + \lambda_i \hat{B}_k C)^T, \end{aligned}$$

那么在一致性协议(23)作用下的多智能体系统(1)能够以期望 $H_\infty$ 性能指标实现鲁棒一致性, 即

$$\int_0^t \bar{z}_i^T(s) \bar{z}_i(s) ds < \gamma_2^2 \int_0^t \bar{e}_i^T(s) \bar{e}_i(s) ds. \quad (34)$$

一致性协议的控制增益矩阵可以设计为

$$\begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 & P_1 B \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{A}_k & \hat{B}_k \\ \hat{C}_k & \hat{D}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2^T & \mathbf{0} \\ C Q_1 & I \end{bmatrix}^{-1},$$

$$E_k = P_2^{-1}(\hat{E}_k - P_1 A Q_1 - P_1 B F_k Q_2^T) Q_2^{-T},$$

$$F_k = \hat{F}_k Q_2^{-T},$$

其中非奇异矩阵 $P_2$ 和 $Q_2$ 满足

$$P_2 Q_2^T = I - P_1 Q_1. \quad (35)$$

证 构造Lyapunov函数

$$V_2 = \zeta_i^T(t) P \zeta_i(t), \quad (36)$$

其中 $P$ 是具有适当维数的正定对称矩阵, 对 $V_2$ 求导得

$$\dot{V}_2 = \zeta_i^T(t) (P \bar{A} + \bar{A}^T P) \zeta_i(t) + 2 \zeta_i^T(t) P \bar{D} \bar{e}_i(t). \quad (37)$$

定义如下 $H_\infty$ 性能指标:

$$J_2(t) = \dot{V}_2 + \bar{z}_i^T(t) \bar{z}_i(t) - \gamma_2^2 \bar{e}_i^T(t) \bar{e}_i(t), \quad (38)$$

在零初始条件下, 式(38)等价于

$$\int_0^t J_2(s) ds = V_2(t) + \int_0^t \bar{z}_i^T(s) \bar{z}_i(s) ds - \gamma_2^2 \int_0^t \bar{e}_i^T(s) \bar{e}_i(s) ds. \quad (39)$$

因为 $V_2(t) > 0$ , 因此可以发现 $J_2(t) < 0$ 意味着

$$\int_0^t \bar{z}_i^T(s) \bar{z}_i(s) ds < \gamma_2^2 \int_0^t \bar{e}_i^T(s) \bar{e}_i(s) ds,$$

即在输出反馈控制器(23)作用下, 多智能体系统(1)能以期望 $H_\infty$ 性能 $\gamma_2$ 实现鲁棒一致性. 因此, 需要分析 $J_2(t) < 0$ 的充分条件. 结合式(32)(37)–(38)可得

$$\begin{aligned} J_2(t) &= \zeta_i^T(t) (P \bar{A} + \bar{A}^T P + T_2^T T_2) \zeta_i(t) + \\ &2 \zeta_i^T(t) P \bar{D} \bar{e}_i(t) - \gamma_2^2 \bar{e}_i^T(t) \bar{e}_i(t) = \\ &\varphi_i^T(t) \Gamma \varphi_i(t), \end{aligned} \quad (40)$$

其中:

$$\begin{aligned} \varphi_i(t) &= [\zeta_i^T(t) \quad \bar{e}_i^T(t)]^T, \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} P \bar{A} + \bar{A}^T P + T_2^T T_2 & P \bar{D} \\ * & -\gamma_2^2 I \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

因此,  $J_2(t) < 0$ 等价于

$$\Gamma = \begin{bmatrix} P \bar{A} + \bar{A}^T P + T_2^T T_2 & P \bar{D} \\ * & -\gamma_2^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (41)$$

结合引理3, 不等式(41)又等价于

$$\Gamma = \begin{bmatrix} P \bar{A} + \bar{A}^T P & P \bar{D} & T_2^T \\ * & -\gamma_2^2 I & \mathbf{0} \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (42)$$

为求解一致性协议(23)中的控制增益矩阵, 令

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} Q_1 & I \\ Q_2^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} I & P_1 \\ \mathbf{0} & P_2^T \end{bmatrix},$$

那么可以得到 $P F_1 = F_2$ 和 $P_2 Q_2^T = I - P_1 Q_1$ , 然后将不等式(42)同时左乘 $\text{diag}\{F_1^T, I, I\}$ 和右乘 $\text{diag}\{F_1, I, I\}$ , 可以得到如下式子:

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & -\lambda_i B D_k C & D_1 & Q_1 \\ * & \psi_{22} & -\lambda_i (P_1 B D_k + P_2 B_k) C & P_1 D_1 & I \\ * & * & -\gamma_2^2 I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\gamma_2^2 I & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (43)$$

其中:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \text{He}\{A Q_1 + \lambda_i B D_k C Q_1 + B F_k Q_2^T + \lambda_i B C_k Q_2^T\}, \\ \psi_{12} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A + \lambda_i B D_k C + (P_1 A Q_1 + \lambda_i P_1 B D_k C Q_1 + \\ &\lambda_i P_2 B_k C Q_1 + P_1 B F_k Q_2^T + \lambda_i P_1 B C_k Q_2^T + \\ &P_2 E_k Q_2^T + \lambda_i P_2 A_k Q_2^T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{22} &= \text{He}\{P_1 A + \lambda_i P_1 B D_k C + \lambda_i P_2 B_k C\}, \end{aligned}$$

做如下定义:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_k & \hat{B}_k \\ \hat{C}_k & \hat{D}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 & P_1 B \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2^T & \mathbf{0} \\ C Q_1 & I \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$\hat{E}_k = P_1 A Q_1 + P_2 E_k Q_2^T + P_1 B F_k Q_2^T, \quad (45)$$

$$\hat{F}_k = F_k Q_2^T. \quad (46)$$

式(43)可改写为式(33). 如果不等式(33)成立, 可得到 $J_2(t) < 0$ , 那么基于自适应观测器(3)和一致性协议(23)作用下的多智能体系统(1)能以期望 $H_\infty$ 性能实现鲁棒一致性. 一致性协议中的增益矩阵可设计为

$$\begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 & P_1 B \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{A}_k & \hat{B}_k \\ \hat{C}_k & \hat{D}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2^T & \mathbf{0} \\ C Q_1 & I \end{bmatrix}^{-1}, \quad (47)$$

$$E_k = P_2^{-1}(\hat{E}_k - P_1 A Q_1 - P_1 B F_k Q_2^T) Q_2^{-T}, \quad (48)$$

$$F_k = \hat{F}_k Q_2^{-T}. \quad (49)$$

证毕.

**注3** 通过上述模型变换和系统解耦, 可以将多智能体系统(1)的鲁棒  $H_\infty$  问题简化为一组独立线性子系统的  $H_\infty$  稳定性问题, 因此定理2中线性矩阵不等式的维数与智能体数量无关, 只与单个智能体的系统矩阵维数相关, 极大简化了系统控制增益求解矩阵的计算难度. 同时需要说明的是, 无论是定理1中观测器的控制增益设计, 还是定理2中一致性协议的控制增益设计都依赖于线性矩阵不等式存在可行解, 只有当不等式(7)和(33)具有可行解时, 此类多智能体系统才能实现抗扰一致性. 而目前线性不等式的可解性与系统的参数矩阵有关, 具有不同参数矩阵的系统其可解性也不同. 这是基于线性矩阵不等式方法研究多智能体系统一致性问题不可避免的缺陷之一, 可以尝试通过MATLAB中的LMI工具箱对其进行求解.

下面对定理2中矩阵  $P_2$  和  $Q_2$  的非奇异性做补充说明: 由于定理2中的正定阵  $P > 0$ , 根据定理2证明可得

$$F_1^T P F_1 = \begin{bmatrix} Q_1 & I \\ P_2 Q_2^T + P_1 Q_1 & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & I \\ I & P_1 \end{bmatrix} > 0,$$

结合引理3, 可得到  $Q_1 > 0$ ,  $Q_1^{-1} - P_1 < 0$ , 即等价于

$$I - Q_1 P_1 < 0,$$

又因为  $P_2 Q_2^T = I - P_1 Q_1$ , 所以  $P_2 Q_2^T$  是非奇异的, 也就是说,  $P_2$  和  $Q_2$  是非奇异的.

#### 4 仿真分析

为验证本文所提控制算法的有效性和推导所得理论的正确性, 本节将基于 MATLAB/Simulink 平台对一个多智能体系统案例进行数值仿真. 考虑如下由4个智能体组成的多智能体系统, 其对应的通信拓扑图如图2所示.

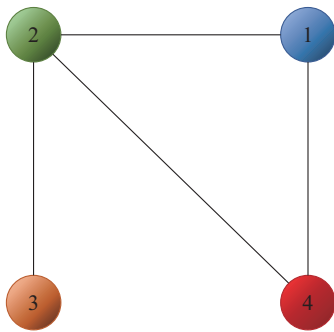


图2 多智能体系统通信拓扑图

Fig. 2 Communication topology of multi-agent systems

考虑其是无权重拓扑图, 因此对应的拉普拉斯矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

多智能体系统的动力学模型参数设置如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$B$ ,  $D_1$  和  $D_2$  为二维单位矩阵, 假设扰动  $\omega_i(t)$  由外部系统(2)产生, 其中外部扰动系统的参数矩阵设置为

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 \\ -0.7 & 0 \end{bmatrix}, S_4 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix},$$

描述不确定性等因素信号为  $\delta_i(t) = [\delta_1^T(t) \delta_2^T(t)]^T$ , 其中  $\delta_1(t)$ ,  $\delta_2(t) \in [-1, 1]$ . 多智能体系统中各智能体的初始状态和外部扰动系统的初始状态分别设置为

$$x_1(0) = [20 \ 10]^T, x_2(0) = [10 \ 1]^T,$$

$$x_3(0) = [-5 \ 8]^T, x_4(0) = [-10 \ -20]^T,$$

$$\omega_1(0) = [0.1 \ 0.1]^T, \omega_2(0) = [-0.2 \ 0.3]^T,$$

$$\omega_3(0) = [0.3 \ -0.2]^T, \omega_4(0) = [0.2 \ 0.4]^T.$$

观测器以及参数矩阵  $\hat{S}_i$  都选取为零初始状态, 式(5)中的对称正定矩阵  $X$  选取为单位阵. 根据定理1, 选取  $\gamma_1 = 3.6$ , 通过求解式(6)–(7), 可以得到观测器(3)的参数矩阵如下:

$$Y = \begin{bmatrix} 112.1023 & 47.5769 \\ 79.9671 & 41.6690 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -120.9281 & -871.0756 \\ -63.6678 & -460.2001 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 11.4913 & -45.9149 \\ -102.2506 & -725.0666 \end{bmatrix}.$$

结合定理2, 其中  $\gamma_2$  值选取为1.4, 通过求解线性矩阵不等式(33), 结合式(47)–(49), 可以得到动态输出反馈控制器(23)的参数矩阵如下:

$$A_k = \begin{bmatrix} -1.1614 & 21.4486 \\ 0.3102 & -6.3506 \end{bmatrix},$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.3970 & 0.0655 \\ 1.7113 & 0.8249 \end{bmatrix},$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -0.0029 & 0.8486 \\ 0.1439 & -2.5973 \end{bmatrix},$$

$$D_k = \begin{bmatrix} -0.0281 & -0.0132 \\ -0.0090 & 0.0041 \end{bmatrix},$$

$$E_k = \begin{bmatrix} -23.3300 & -3.9037 \\ 0.2464 & -28.3675 \end{bmatrix},$$

$$F_k = \begin{bmatrix} -11.4928 & 211.8137 \\ -0.7624 & 64.8314 \end{bmatrix}.$$

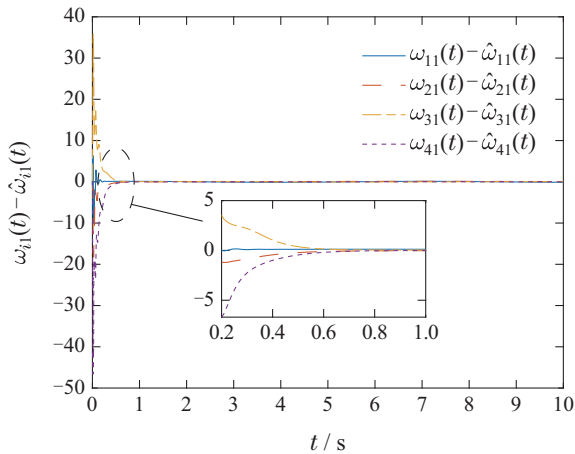
另外也可以计算出控制器中干扰补偿项的矩阵参数

$$K_d = B^+ D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

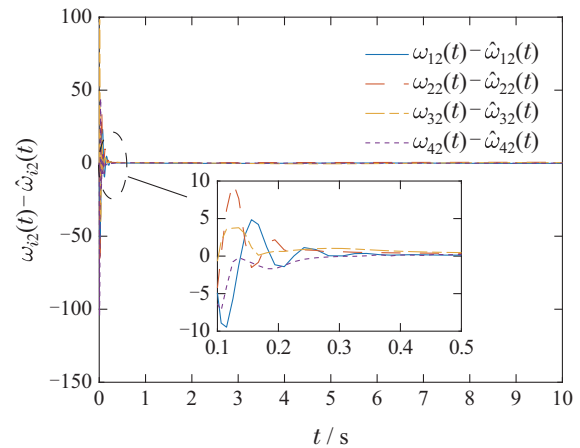
为了更直观地展示本文所提干扰观测器的有效性, 分别给出了基于本文所提自适应扰动观测器(3)和文献[29]所提观测器扰动估计仿真结果, 如图3-4所示.

从图3-4可看出本文和文献[29]提出的方法都可对类似的扰动进行估计, 但在本文提出的自适应扰动

观测器下, 准确估计扰动信息只需0.5 s, 而文献[29]所提扰动观测器需要近35 s. 因此从扰动估计效果来看, 本文所提自适应扰动观测器可以快速准确估计出外部系统产生的扰动信息, 极大缩短了扰动估计所需时间. 值得指出的是, 文献[29]在设计观测器时使用了外部扰动系统的参数矩阵和多智能体系统的状态  $x_i(t)$ , 而本文所提观测器在设计过程中不需要使用这些信息. 接下来, 给出多智能体系统的4个智能体各状态信息与其状态估计信息, 如图5-8所示.



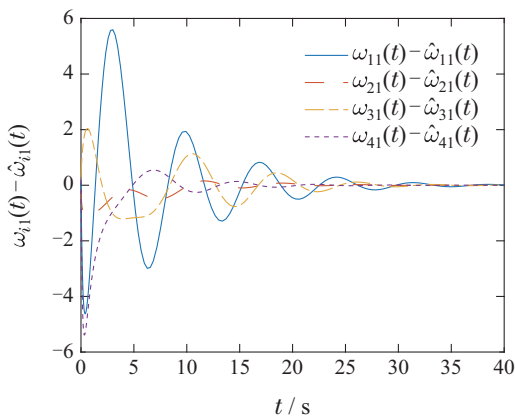
(a) 本文观测器下干扰状态1的估计误差



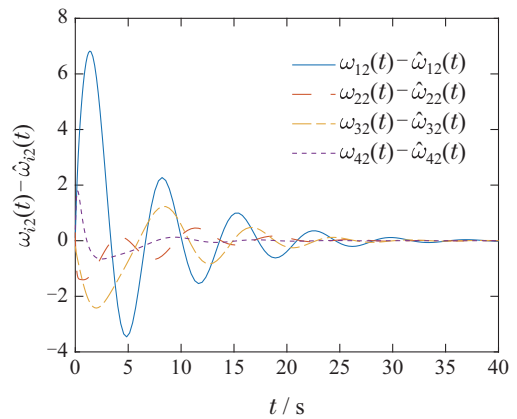
(b) 本文观测器下干扰状态2的估计误差

图3 本文观测器下干扰状态估计误差

Fig. 3 Estimation error of the disturbance state under the observer proposed in this paper



(a) 文献[29]观测器下干扰状态1的估计误差



(b) 文献[29]观测器下干扰状态2的估计误差

图4 文献[29]观测器下干扰状态估计误差

Fig. 4 Estimation error of the disturbance state under the observer proposed in literature[29]

图5展示智能体1的两个状态的估计信息, 可看出在0.3 s左右观测器可以准确估计其状态信息.

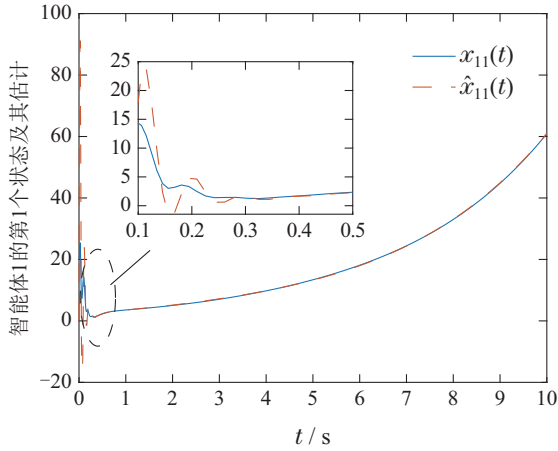
图6展示了智能体2的两个状态的估计信息, 可看出在0.4 s左右观测器可以准确估计其状态信息.

图7展示了智能体3的两个状态的估计信息, 可看出在0.6 s左右观测器可以准确估计其状态信息.

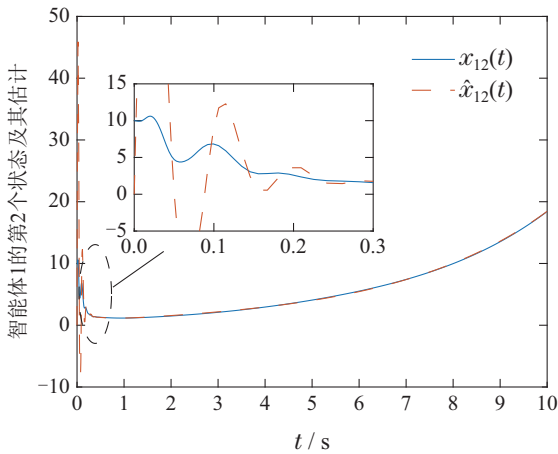
图8展示了智能体4的两个状态的估计信息, 可看出在0.5 s左右观测器可以准确估计其状态信息.

从图5-8不难发现, 自适应观测器(3)可以快速准确地估计出多智能体系统的状态信息, 基于这些状态估计信息, 再结合测量矩阵, 可设计出动态输出反馈控制器, 以实现多智能体系统一致性控制. 在此控制

器作用下,多智能体系统状态的响应曲线和状态平均一致性误差随时间变化曲线如图9-10所示.



(a) 智能体1的状态 $x_{11}(t)$ 估计

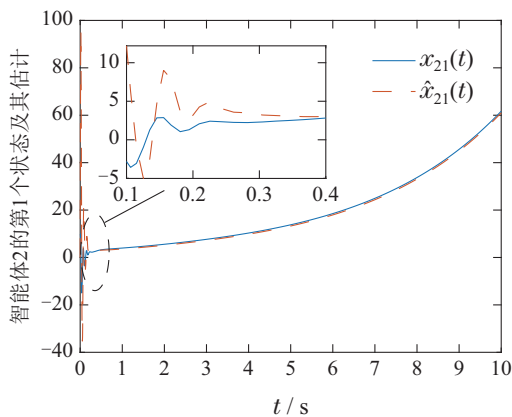


(b) 智能体1的状态 $x_{12}(t)$ 估计

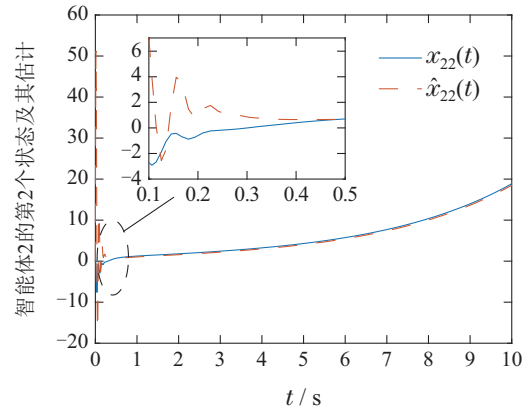
图5 智能体1的状态估计

Fig. 5 The state estimation of the first agent

图9展示了多智能体系统的4个智能体在所设计的基于自适应扰动观测器(3)的动态输出反馈一致性控制器(23)作用下的状态响应曲线.可看出虽然多智能体系统中各智能体的初始状态不同,但在本文所设计的控制器作用下,系统各状态能够渐近趋于一致.



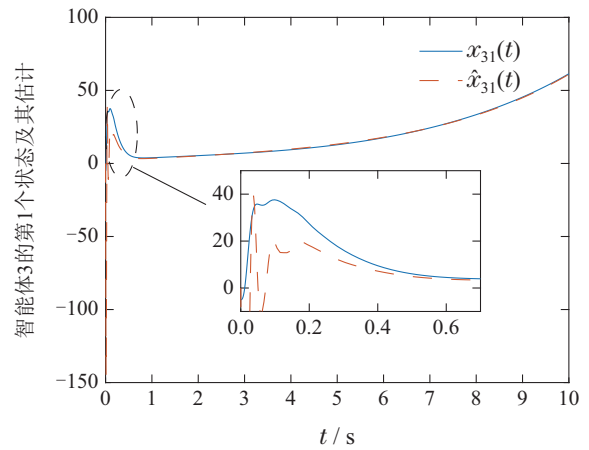
(a) 智能体2的状态 $x_{21}(t)$ 估计



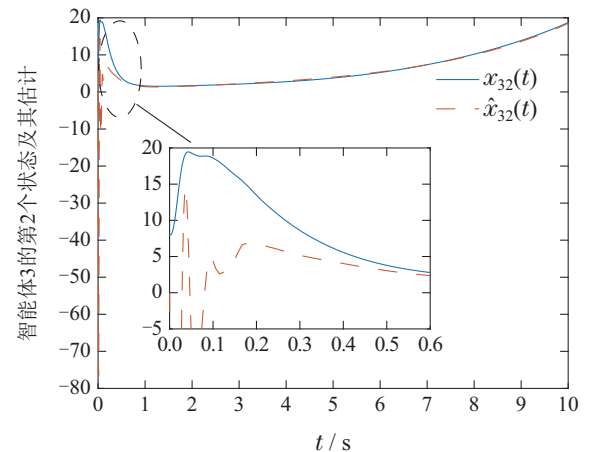
(b) 智能体2的状态 $x_{22}(t)$ 估计

图6 智能体2的状态估计

Fig. 6 The state estimation of the second agent



(a) 智能体3的状态 $x_{31}(t)$ 估计



(b) 智能体3的状态 $x_{32}(t)$ 估计

图7 智能体3的状态估计

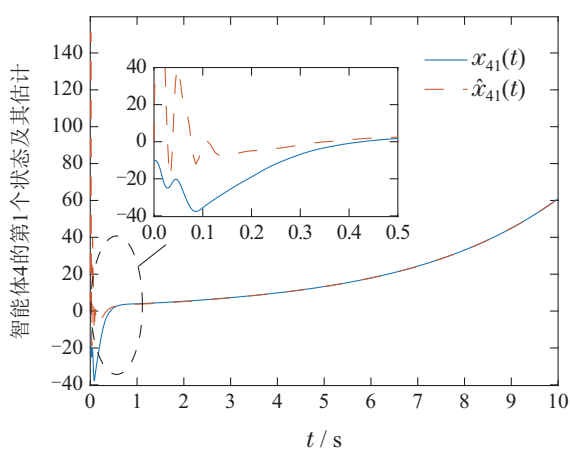
Fig. 7 The state estimation of the third agent

图10展示了多智能体系统的4个智能体在所设计的基于自适应扰动观测器(3)的动态输出反馈一致性控制器(23)作用下的状态平均一致性误差.

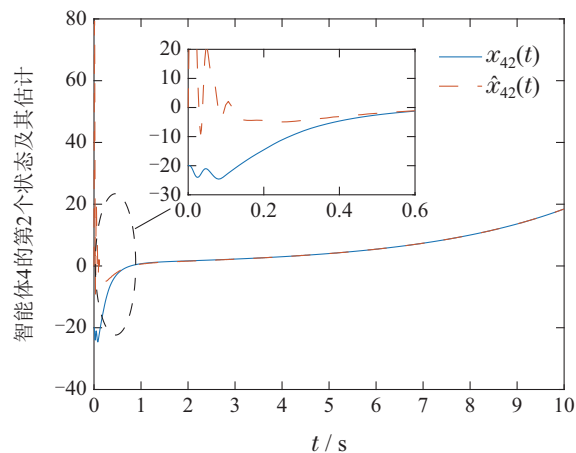
从上述仿真结果可以看出,本文设计的自适应扰

动观测和动态输出反馈控制器, 可以使智能体系统在受到由外部系统产生的扰动, 且外部扰动系统矩阵参

数未知, 并包含能量有界的摄动或不确定性的情况下实现抗扰一致性.



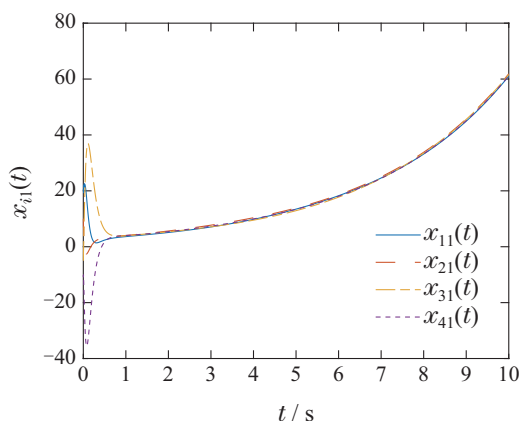
(a) 智能体4的状态 $x_{41}(t)$ 估计



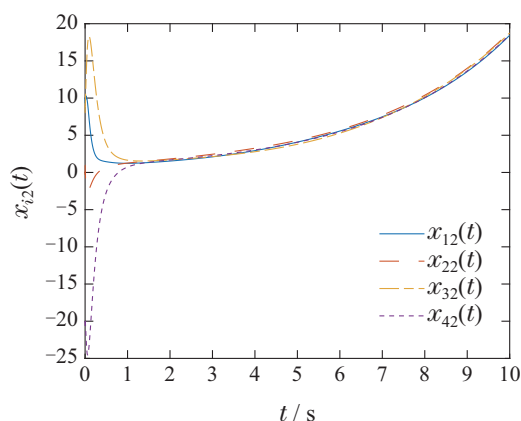
(b) 智能体4的状态 $x_{42}(t)$ 估计

图 8 智能体4的状态估计

Fig. 8 The state estimation of the fourth agent



(a) 多智能体系统状态 $x_{i1}(t)$



(b) 多智能体系统状态 $x_{i2}(t)$

图 9 多智能体系统状态响应曲线

Fig. 9 Response curve of the multi-agent system states

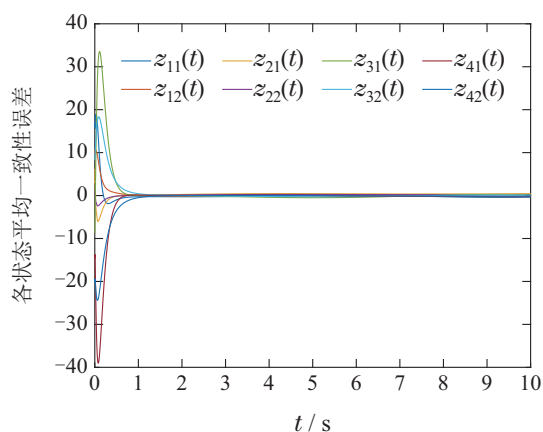


图 10 多智能体系统状态平均一致性误差

Fig. 10 Average consensus error of the multi-agent system states

## 5 总结

本文研究了一类具有外部扰动的多智能体系统抗扰一致性控制问题. 考虑到外部扰动系统与被控系统通常是独立的, 因此, 针对由参数矩阵未知的外部系统产生的扰动, 通过构造自适应扰动观测器, 可以渐近估计系统的状态和扰动. 然后, 利用扰动观测器误差趋近于零的特点, 提出了一种带有扰动补偿项的分布式动态输出反馈控制器, 通过模型变换和系统解耦, 将多智能体系统的鲁棒 $H_\infty$ 一致性控制问题简化为一组独立线性子系统的 $H_\infty$ 镇定问题. 在李雅普诺夫函数理论的框架下分析系统的稳定性. 最后, 仿真结果验证了所提方法的有效性.

## 参考文献:

- [1] FEI Siyuan, XIAN Bin, WANG Ling. Distributed formation control for multiple unmanned aerial vehicles with dynamic obstacle avoidance based on the flocking behavior. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(1): 1 – 11.  
(费思远, 鲜斌, 王岭. 基于群集行为的分布式多无人机编队动态避障控制. *控制理论与应用*, 2022, 39(1): 1 – 11.)
- [2] WANG Gangyang, XU Ming, WU Yiming, et al. Group agent formation for resilient average consensus under attacks. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(7): 1071 – 1081.  
(王刚阳, 徐明, 伍益明, 等. 面向网络攻击下弹性均值趋同的智能体群组编队. *控制理论与应用*, 2021, 38(7): 1071 – 1081.)
- [3] XU M, AN K, VU L H, et al. Optimizing multi-agent based urban traffic signal control system. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 2019, 23(4): 357 – 369.
- [4] ZHU R, LI L, WU S, et al. Multi-agent broad reinforcement learning for intelligent traffic light control. *Information Sciences*, 2023, 619: 509 – 525.
- [5] ZHANG Lingling, ZHANG Ya. Distributed event-triggered multi-target filtering in sensor networks. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(5): 1135 – 1144.  
(张玲玲, 张亚. 传感器网络分布式事件触发多目标估计. *控制理论与应用*, 2020, 37(5): 1135 – 1144.)
- [6] BARRIUSO A L, VILLARRUBIA G, DE P, et al. Combination of multi-agent systems and wireless sensor networks for the monitoring of cattle. *Sensors*, 2018, 18(1): 108.
- [7] REN W, ATKINS E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 2007, 17(10/11): 1002 – 1033.
- [8] DJAIDJA S, WU Q, FANG H. Consensus of double-integrator multi-agent systems without relative state derivatives under communication noises and directed topologies. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(3): 897 – 912.
- [9] DU H, WEN G, WU D, et al. Distributed fixed-time consensus for nonlinear heterogeneous multi-agent systems. *Automatica*, 2020, 113: 108797.
- [10] YAGHOUBI Z, TALEBI H A. Cluster consensus for nonlinear multi-agent systems. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2020, 100(3/4): 1069 – 1084.
- [11] YANG J. A consensus control for a multi-agent system with unknown time-varying communication delays. *IEEE Access*, 2021, 9: 55844 – 55852.
- [12] JIANG W, LIU K, CHARALAMBOUS T. Multi-agent consensus with heterogeneous time-varying input and communication delays in digraphs. *Automatica*, 2022, 135: 109950.
- [13] RAN M, XIE L. Practical output consensus of nonlinear heterogeneous multi-agent systems with limited data rate. *Automatica*, 2021, 129: 109624.
- [14] QIU Z, XIE L, HONG Y. Quantized leaderless and leader-following consensus of high-order multi-agent systems with limited data rate. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 61(9): 2432 – 2447.
- [15] ZHANG J, ZHANG H, CAI Y, et al. Consensus control for nonlinear multi-agent systems with event-triggered communications. *Applied Mathematics & Computation*, 2021, 408: 126341.
- [16] ZHANG J, LIU S, ZHANG X. Output-feedback distributed consensus for nonlinear multi-agent systems with quantization. *Information Sciences*, 2022, 585: 246 – 261.
- [17] HUANG Xiaolong, CHEN Yangzhou, ZHANG Jingyuan. Robust consensus control of multi-agent systems with model uncertainties. *Journal of Huazhong University of Science & Technology (Natural Science Edition)*, 2020, 48(9): 19 – 24.  
(黄小龙, 陈阳舟, 詹璟原. 模型不确定多智能体系统的鲁棒一致性控制. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2020, 48(9): 19 – 24.)
- [18] XUE X, WU F, YUAN C. Robust consensus for linear multi-agent systems with structured uncertainties. *International Journal of Control*, 2021, 94(3): 675 – 686.
- [19] HUANG X, CHEN Y, ZHAN J. Observer-based consensus control for multi-agent systems with measurement noises and external disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, 32(1): 344 – 357.
- [20] HU W, WENG Y, LI H. Observer-based output feedback event-triggered robust  $H_\infty$  consensus control of uncertain linear multi-agent systems with directed networks. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2022, 32(9): 5555 – 5573.
- [21] ZHANG J, REN C E. Event-triggered  $H_\infty$  consensus control for input-constrained multi-agent systems via reinforcement learning. *Control Theory & Technology*, 2024, 22(1): 25 – 38.
- [22] ZHAO L, JIA Y, YU J, et al.  $H_\infty$  sliding mode based scaled consensus control for linear multi-agent systems with disturbances. *Applied Mathematics & Computation*, 2017, 292: 375 – 389.
- [23] YU Z, YU S, JIANG H, et al. Distributed consensus for multi-agent systems via adaptive sliding mode control. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2021, 31(15): 7125 – 7151.
- [24] YU D, CHEN C, XU H. Fuzzy swarm control based on sliding-mode strategy with self-organized omnidirectional mobile robots system. *IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics: Systems*, 2021, 52(4): 2262 – 2274.
- [25] ABDOLLAHIPOUR R, KHANDANI K, JALALI A A. Consensus of uncertain linear multi-agent systems with granular fuzzy dynamics. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2022, 24(4): 1780 – 1792.
- [26] HUANG X, CHEN Y, ZHAN J. Observer-based  $H_\infty$  consensus control for multi-agent systems with measurement noises and external disturbances. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2022, 32(1): 344 – 357.
- [27] LI X, SOH Y C, XIE L. Robust consensus of uncertain linear multi-agent systems via dynamic output feedback. *Automatica*, 2018, 98: 114 – 123.
- [28] LI Y, WU Y, YE Y, et al. Distributed state estimator-based consensus tracking of multi-agent systems with exogenous disturbance. *Journal of the Franklin Institute*, 2023, 360(12): 9139 – 9158.
- [29] JIA W, WANG J. Distributed disturbance observer based consensus control for linear multi-agent systems with mismatched disturbances. *Journal of the Franklin Institute*, 2022, 359(1): 578 – 598.
- [30] WANG Q, HE W, ZINO L, et al. Bipartite consensus for a class of nonlinear multi-agent systems under switching topologies: A disturbance observer-based approach. *Neurocomputing*, 2022, 488: 130 – 143.

## 作者简介:

朱 静 副教授, 目前研究方向为飞行控制、多智能体系统、故障诊断与容错控制等, E-mail: drzhujing@nuaa.edu.cn;

姚程华 硕士研究生, 目前研究方向为多智能体系统, E-mail: lele1998lele@nuaa.edu.cn;

翟象平 副教授, 目前研究方向为无人系统、多智能体协同、决策优化等, E-mail: blueicezhaxp@nuaa.edu.cn.