

## 基于动态事件触发的异质复杂网络量化同步控制

黄玲<sup>1,3</sup>, 郭婧<sup>2,3†</sup>, 王云飞<sup>1,3</sup>

(1. 哈尔滨理工大学 自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 哈尔滨理工大学 测控技术与通信工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150080;

3. 教育部先进制造智能化技术重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘要:** 本文研究基于节点平均值轨道跟踪的异质复杂网络同步控制. 首先, 建立异质复杂网络的模型及节点平均值轨道模型. 之后, 设计动态事件触发条件, 减少系统不必要的数据传输, 引入对数量化器, 构建复杂网络的同步误差模型. 接着, 利用Lyapunov稳定性理论及相关引理, 得到异质复杂网络最终指数有界同步的充分条件. 然后, 利用成熟线性矩阵不等式工具箱联合求解控制器和事件触发参数. 最后, 通过数值例子验证所提方法的有效性.

**关键词:** 复杂网络; 异质网络; 同步控制; 事件触发机制; 量化

**引用格式:** 黄玲, 郭婧, 王云飞. 基于动态事件触发的异质复杂网络量化同步控制. 控制理论与应用, 2026, 43(3): 632–640

DOI: 10.7641/CTA.2024.40124

## Quantitative synchronization control of heterogeneous complex networks based on dynamic event triggering

HUANG Ling<sup>1,3</sup>, GUO Jing<sup>2,3†</sup>, WANG Yun-fei<sup>1,3</sup>

(1. School of Automation, Harbin University of Science and Technology, Harbin Heilongjiang 150080, China;

2. School of Measurement and Communication, Harbin University of Science and Technology, Harbin Heilongjiang 150080, China;

3. Key Laboratory of Advanced Manufacturing and Intelligent Technology, Ministry of Education, Harbin Heilongjiang 150080, China)

**Abstract:** This paper investigates the synchronization control of heterogeneous complex networks based on node average trajectory tracking. Firstly, a model of heterogeneous complex networks and a target trajectory model of node averages are established. Afterwards, a dynamic event triggering condition is designed to reduce unnecessary data transmission in the system. By introducing a logarithmic quantizer, a synchronization error model for complex networks is constructed. Next, by using the Lyapunov stability theory and related lemmas, sufficient conditions are obtained to ensure the ultimately exponentially bounded synchronization of heterogeneous complex networks. Then, by using the mature linear matrix inequality toolbox, the controller and the event triggering parameters are co-designed. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified through a numerical example.

**Key words:** complex networks; heterogeneous networks; synchronization control; event triggering mechanism; quantization

**Citation:** HUANG Ling, GUO Jing, WANG Yunfei. Quantitative synchronization control of heterogeneous complex networks based on dynamic event triggering. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(3): 632–640

### 1 引言

复杂系统在交通网络<sup>[1]</sup>、电力网络<sup>[2]</sup>、生态网络<sup>[3]</sup>、经济网络<sup>[4]</sup>等现实世界中广泛存在, 学者们通过探索各种复杂现象背后的规律和机制, 促进了学科的交叉融合, 通过解决复杂实际问题, 推动了经济发展和社会进步. 同步作为复杂网络的经典动力学问题之一引起了学者们的重视<sup>[5]</sup>. 在日常的社会生产生活中, 同步现象十分普遍. 例如, 交通流的相位同步、电

网中的频率同步、社交网络中的群体行为同步等.

目前, 关于复杂网络同步的实现主要有两种方法: 一种通过调整复杂网络的耦合关系实现节点同步, 如文献[6]讨论了节点耦合关系对复杂网络同步的影响, 通过调整耦合关系实现了复杂网络的同步; 另一种通过外力控制实现复杂网络的同步, 如文献[7]研究了复杂网络牵引同步问题, 通过控制部分节点实现了整个复杂网络的同步, 并讨论了牵引同步控制方法的鲁棒

收稿日期: 2024-02-28; 录用日期: 2024-11-20.

†通信作者. E-mail: 2014719768@qq.com; Tel.: +86 18845121778.

本文责任编辑: 王孝洪.

国家自然科学基金项目(61304046)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61304046).

性. 不同于上述整数阶复杂网络同步研究, 文献[8]研究了分数阶复杂时空网络同步问题, 通过设计牵引控制器, 给出了具有边界固定权值和时变权值的分数阶复杂网络的同步准则. 此外, 考虑到系统可能受到外界环境的影响, 文献[9]研究了基于周期性自触发间歇采样数据控制的时变延迟多权复杂网络的指数同步, 首次将周期性自触发控制与间歇采样数据控制相结合. 文献[10]研究了具有不确定性的非线性驱动-响应复杂网络的同步问题, 考虑了无界多时延, 通过引入广义脉冲延迟比较引理, 设计了一个延迟脉冲控制器.

然而, 在上述研究中的节点特性假设都是相同的, 即同质网络, 没有考虑节点之间的异质性和复杂关联性. 考虑到系统节点动态特性可能不同, 文献[11]研究了异质二阶多智能体的领导-跟随一致性问题, 通过Lyapunov稳定性理论和线性矩阵不等式技术, 给出了保证异质多智能体的一致性充分条件及领导者和追随者之间的最大误差范围. 文献[12]研究了具有脉冲效应的异质多智能体在拒绝服务攻击下的准同步问题, 分别考虑了正脉冲效应和负脉冲效应, 通过设计抵御拒绝服务攻击的控制器, 实现了异质多智能体系统的准同步. 为了实现快速同步, 文献[13]研究了异质多智能体固定时间一致性问题, 实现了多智能体系统在虚假数据注入攻击下的最终有界跟踪. 文献[14]考虑了具有异质脉冲响应的神经网络同步控制问题, 提出了一种异质脉冲控制策略. 尽管上述文献考虑了系统中存在的异质现象, 然而该问题的研究主要针对多智能体或神经网络的一致性. 对于异质复杂网络同步问题, 由于节点间存在异质难以实现完全同步, 同构复杂网络研究结果难以扩展到异质复杂网络. 因此, 文献[15]研究了马尔科夫跳变异质网络的准同步问题, 通过设计牵引控制器, 给出了广义马尔科夫跳变异质网络的准同步判据.

此外, 随着工业互联网的发展, 越来越多的复杂系统实现了数字化、自动化, 其中存在大量的通信控制信号. 但是系统的网络资源是有限的, 因此需提高网络之间的数据传输效率, 避免网络拥堵而造成的时延、丢包、乱序等问题. 传统控制通常采用固定的周期采样, 并在每个周期内根据采样数据进行控制信号的更新. 当系统状态变化不大, 控制器依然会执行, 导致不必要的计算和通信开销, 浪费了系统资源. 然而, 事件触发控制只在满足某些特定的关系下才更改控制输入, 减少了不必要的控制操作. 文献[16]在事件触发策略的基础上, 建立了具有系统内部延迟和分布式延迟的复杂网络牵引控制的同步准则, 并证明了在事件触发策略下, 复杂网络的所有节点都不存在Zeno行为. 文献[17]研究了一类复杂动态网络在时间尺度上的同步控制. 基于Lyapunov稳定性定理和时间尺度理论, 通过设计基于事件触发策略的间歇牵引控制策略,

建立了复杂网络在时间尺度上的同步标准. 为了更加灵活地设计触发条件, 文献[18]在事件触发条件中引入动态变量, 提出了动态事件触发机制. 文献[19]研究了基于动态事件触发控制策略的非线性网络系统, 设计了一种基于性能的安全控制器. 文献[20]对比了多智能体的集中式动态事件触发方案和分布式动态事件触发方案. 文献[21]根据不同的网络拓扑提出了相应的事件触发方案, 包括分布式事件触发方案、集中式事件触发方案和基于集群的事件触发方案. 此外, 考虑到带宽承载能力有限, 所接受的数据包字长有限等原因, 有必要在复杂网络同步控制中考虑量化机制<sup>[22-23]</sup>.

综上所述, 目前基于动态事件触发的异质复杂网络量化同步控制研究十分有限. 因此, 本文结合动态事件触发机制与量化策略, 研究异质复杂网络的有界同步问题. 具体创新内容如下: 1) 大多数文章中的同步目标节点是一个独立系统, 而本文复杂网络同步目标的动态特性是所有节点的平均轨道; 2) 与静态事件触发机制不同, 本文采用动态事件触发策略, 进一步节约网络资源和计算成本; 3) 由于复杂网络的节点存在异质性, 不同于同质网络的完全同步, 本文研究异质复杂网络最终指数有界同步, 并给出同步误差的渐近上界.

## 2 问题的提出

### 2.1 复杂网络的模型描述

考虑复杂网络的第*i*个节点的动力学模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + f_i(x_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma x_j(t) + \\ &u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$  是节点*i*的状态向量;  $f_i(x_i(t), t)$  是节点*i*的非线性向量函数;  $A_i$  是节点*i*的常数矩阵;  $c > 0$  表示耦合强度;  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  表示网络拓扑的耦合矩阵, 如果节点*i*可以从节点*j*接收信息, 则  $b_{ij} > 0$ , 否则,  $b_{ij} = 0 (i \neq j)$ ;  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  表示节点*i*的内部耦合矩阵;  $u_i(t)$  表示节点*i*控制输入.

**假设 1** 非线性函数  $f(z_i(t), t)$  为连续函数, 满足如下Lipschitz条件:

$$(F(z(t), t) - \bar{G}_1)^T (F(z(t), t) - \bar{G}_2) \leq 0, \quad (2)$$

其中:  $F(z(t), t) = f(z_1(t), t) - f(z_2(t), t)$ ;  $\bar{G}_1 = G_1 \times (z_1(t) - z_2(t))$ ,  $\bar{G}_2 = G_2(z_1(t) - z_2(t))$ ,  $G_1$  和  $G_2$  为常数矩阵.

**注 1** 在实际复杂网络中, 非线性过程通常涉及能量的转换和耗散, 如电路中的非线性元件、化学反应中的非线性动力学等. 假设1中条件意味着这些非线性过程中的能量耗散和热量扩散是有界的, 避免了剧烈的温度或电压波动, 从而确保系统的可控性.

同步的目标轨道描述如下:

$$s(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t). \quad (3)$$

**注 2** 式(3)中的同步目标轨道为所有节点的平均动态. 复杂网络的平均轨道有助于发现网络中的隐藏规则和特征. 通过分析平均轨道的变化趋势和周期性, 可以推断网络中节点之间是否存在某种周期性或规律性的相互作用, 或者网络是否具有某种特殊的结构特征. 因此, 研究复杂网络的平均轨道具有十分重要的意义.

## 2.2 动态事件触发机制

节点*i*的触发时间序列定义为 $\{t_1^i, t_2^i, \dots, t_\infty^i\}$ , 控制器 $u_i(t)$ 表示为

$$u_i(t) = \tilde{K}_i e_i(t_k^i), \quad t \in [t_k^i, t_{k+1}^i), \quad (4)$$

其中: 同步误差为 $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$ ;  $\tilde{K}_i$ 为待设计的控制器增益.

将 $[t_k^i, t_{k+1}^i)$ 分成 $\rho$ 个采样间隔如下:

$$[t_k^i, t_{k+1}^i) = \bigcup_{m=1}^{\rho} [t_k^i + (m-1)h, t_k^i + mh),$$

其中 $\rho = \inf\{m \in N \mid t_k^i + mh \leq t_{k+1}^i\}$ .

引入两个辅助函数 $\tau_i(t)$ 和 $\delta_i(t)$ 如下:

$$\tau_i(t) = \begin{cases} t - t_k^i, & t \in [t_k^i, t_k^i + h), \\ t - t_k^i - h, & t \in [t_k^i + h, t_k^i + 2h), \\ \vdots & \\ t - t_k^i - \rho h, & t \in [t_k^i + \rho h, t_{k+1}^i), \end{cases}$$

$$\delta_i(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_k^i, t_k^i + h), \\ e_i(t_k^i + h) - e_i(t_k^i), & t \in [t_k^i + h, t_k^i + 2h), \\ \vdots & \\ e_i(t_k^i + \rho h) - e_i(t_k^i), & t \in [t_k^i + \rho h, t_{k+1}^i). \end{cases}$$

则同步误差可变换为

$$e_i(t_k^i) = e_i(t - \tau_i(t)) - \delta_i(t), \quad (5)$$

根据式(5), 控制器(4)可改写为

$$u_i(t) = \tilde{K}_i e_i(t - \tau_i(t)) - \tilde{K}_i \delta_i(t), \quad t \in [t_k^i, t_{k+1}^i). \quad (6)$$

为了避免资源浪费, 设计动态事件触发机制如下:

$$t_{k+1}^i = \inf\{t > t_k^i \mid M(t) < 0\}, \quad (7)$$

其中:  $M(t) = \tilde{\theta} \eta_i(t_k^i) + \sigma e_i^T(t_k^i) \Omega_i e_i(t_k^i) - [e_i(t - \tau_i(t)) - e_i(t_k^i)]^T \Omega_i [e_i(t - \tau_i(t)) - e_i(t_k^i)]$ ,  $\tilde{\theta} > 0$ ,  $\sigma \in (0, 1)$ ,  $\Omega_i$ 是一个待设计的正定对称阵.

动态参数 $\eta_i(t)$ 满足以下条件:

$$\dot{\eta}_i(t) = -\beta(\eta_i(t)) - \tilde{\theta} \eta_i(t_k^i), \quad (8)$$

其中 $\beta$ 是一个 $K_\infty$ 类函数并且满足Lipschitz连续性.

结合式(1)(3)(6)可得同步误差系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= A_i e_i(t) + f_i(e_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma e_j(t) + \\ &K_i e_i(t - \tau_i(t)) - K_i \delta_i(t) + \\ &D(t), \quad t \in [t_k^i, t_{k+1}^i), \end{aligned} \quad (9)$$

其中:  $f_i(e_i(t), t) = f_i(x_i(t), t) - f_i(s(t), t)$ ;  $D(t) = A_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i x_i(t) + f_i(s(t), t) - \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^N f_i(x_i(t), t) + \frac{c}{N} \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma \sum_{i=1}^N x_i(t) - c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma \times x_j(t)$ ;  $K_i e_i(t_k^i) = \tilde{K}_i e_i(t_k^i) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{K}_i e_i(t_k^i)$ .

## 2.3 对数量化器的设计

考虑到网络带宽承载能力有限, 本文对已满足触发条件, 待传输的数据进行量化. 由于对量化可以压缩数据的动态范围, 降低计算复杂度. 因此, 本文的对数量化器设计如下:

$$q(\cdot) = [q_1(\cdot) \cdots q_i(\cdot) \cdots q_n(\cdot)]^T,$$

其中 $q_i(\cdot)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 是量化器, 量化密度为 $\varpi_i(0 \leq \varpi_i \leq 1)$ , 量化等级表示为 $\mu_i = \{\pm \mu_l^i, \mu_l^i = \varpi_i \mu_0^i, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{0\}$ ,  $\mu_0^i > 0$ .

$q_i(\cdot)$ 被定义为

$$\begin{cases} \mu_l^i, & \frac{1}{1+w_i} \mu_l^i \leq e_{ij}(t_k^i) \leq \frac{1}{1-w_i} \mu_l^i, \\ 0, & e_{ij}(t_k^i) = 0, \\ -q_i(-e_{ij}(t_k^i)), & e_{ij}(t_k^i) < 0, \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $w_i = (1 - \varpi_i)/(1 + \varpi_i)$ ,  $e_{ij}(t_k^i)$ 表示在 $t_k^i$ 时第*i*个节点的第*j*个分量. 根据文献[22],  $q_i(e_{ij}(t_k^i))$ 可以被描述为

$$q_i(e_{ij}(t_k^i)) = (1 + \Delta_{ij}) e_{ij}(t_k^i), \quad (11)$$

其中 $|\Delta_{ij}| \leq w_i$ .

定义 $\Delta_i = \text{diag}\{\Delta_{i1}, \dots, \Delta_{in}\}$ ,  $\tilde{\Delta} = \text{diag}\{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}$ ,  $\tilde{G} = \text{diag}\{w_1 I_n, \dots, w_N I_n\}$ ,  $\Delta_{ij} \in [-w_i, w_i]$ , 则 $\tilde{\Delta} \in [-\tilde{G}, \tilde{G}]$ . 令 $\tilde{\Delta} = \tilde{F} \tilde{G}$ , 则有 $\tilde{F} \tilde{F}^T = \tilde{F}^T \tilde{F} \leq I$ . 量化后的状态可以表示为

$$q_i(e_i(t_k^i)) = (I + \Delta_i) e_i(t_k^i). \quad (12)$$

结合量化误差 $\Delta_i$ , 控制器可写为

$$\begin{aligned} u_i(t) &= K_i (I + \Delta_i) e_i(t - \tau_i(t)) - \\ &K_i (I + \Delta_i) \delta_i(t), \quad t \in [t_k^i, t_{k+1}^i). \end{aligned} \quad (13)$$

同步误差系统可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= A_i e_i(t) + f_i(e_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma e_j(t) + \\ &K_i (I + \Delta_i) e_i(t - \tau_i(t)) - K_i (I + \Delta_i) \times \\ &\delta_i(t) + D(t), \quad t \in [t_k^i, t_{k+1}^i), \end{aligned} \quad (14)$$

使用克罗内克积, 同步误差系统可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) = & (\bar{A} + \bar{K} \bar{\Delta} + c(B \otimes \Gamma))E(t) + \\ & F(E(t), t) + \bar{K} \bar{\Delta} E(t - \tau(t)) - \\ & \bar{K} \bar{\Delta} \delta(t) + \tilde{D}(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \end{aligned} \quad (15)$$

其中:  $\{t_k\}$  为所有节点的触发序列从小到大重新排列的时间序列, 且满足  $t_1 < t_2 < \dots < t_\infty$ ;  $\bar{A} = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ ;  $\bar{K} = \text{diag}\{K_1, K_2, \dots, K_N\}$ ;  $\tilde{D}(t) = [D^T(t) \ D^T(t) \ \dots \ D^T(t)]^T$ ;  $\bar{\Delta} = \text{diag}\{I + \Delta_1, I + \Delta_2, \dots, I + \Delta_N\}$ ;  $E(t) = [e_1^T(t) \ e_2^T(t) \ \dots \ e_N^T(t)]^T$ ;  $E(t - \tau(t)) = [e_1^T(t - \tau_1(t)) \ \dots \ e_N^T(t - \tau_N(t))]^T$ ;  $F(E(t), t) = [f_1^T(e_1(t), t) \ \dots \ f_N^T(e_N(t), t)]^T$ ;  $\delta(t) = [\delta_1^T(t) \ \delta_2^T(t) \ \dots \ \delta_N^T(t)]^T$ .

综上所述, 本文要解决的问题是: 针对异质复杂网络(1), 设计基于事件触发策略(7)的量化控制器(13), 使得同步误差系统(15)指数最终有界, 实现复杂网络(1)的节点与目标节点(3)最终指数有界同步。

**引理 1** (Schur 补引理) 对于给定的对称矩阵  $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$ , 下列条件等价:

- 1)  $S < 0$ ;
- 2)  $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ ;
- 3)  $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ .

**引理 2**<sup>[24]</sup> 假设  $\beta$  是  $K_\infty$  类函数并满足 Lipschitz 连续性, 且  $\sigma \in (0, 1), \eta_0 > 0, \theta > 0$ , 若  $h, \tilde{\theta}$  满足  $h \leq -\ln \frac{\tilde{\theta}}{1 + \theta}$ , 根据  $\eta(t)$  在式 (8) 的定义可知对任意  $t \in [0, \infty)$  有  $\eta(t) \geq 0$ .

**引理 3**<sup>[25]</sup> 假设  $T$  和  $S$  是具有适当维数的实矩阵, 并且  $F$  满足  $F^T F \leq I$ . 那么, 对于任何标量  $\ell > 0$ , 有以下不等式成立:

$$T^T F S^T + S F^T T \leq \ell S S^T + \ell^{-1} T^T T.$$

**定义 1**<sup>[26]</sup> 如果存在常数  $\epsilon > 0, \rho > 0$  和  $\phi > 0$  使得下式成立:

$$\|E(t)\|_2^2 \leq \epsilon^t \rho + \phi,$$

那么, 同步误差(15)最终指数有界. 其中:  $\epsilon \in [0, 1)$  表示衰减率,  $\phi$  表示  $\|E(t)\|_2^2$  的渐近上界, 则复杂网络(1)对目标轨迹(3)实现最终指数有界同步。

### 3 主要定理及其证明

**定理 1** 对于满足假设条件 1 的异质复杂网络(1), 定义反馈控制增益为  $\bar{K}$ , 给定参数  $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0, \epsilon_3 > 0, \epsilon_4 > 0, \tilde{\theta} > 0, h > 0, \alpha > 0$  和  $\sigma > 0$ , 若存在正定对称矩阵  $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}, \bar{\Omega}, \Theta$  和  $\Pi_{66}^1$  满足下列不等式:

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ * & \psi_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

其中:

$$\psi_{11} = \begin{bmatrix} \Pi_{11}^1 & \Pi_{12}^1 & 0 & \Pi_{14}^1 & \Pi_{15}^1 & 0 & \Pi_{17}^1 \\ * & \Pi_{22}^1 & \Pi_{23}^1 & 0 & \Pi_{25}^1 & 0 & \Pi_{27}^1 \\ * & * & \Pi_{33}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44}^1 & 0 & 0 & \Pi_{47}^1 \\ * & * & * & * & \Pi_{55}^1 & 0 & \Pi_{57}^1 \\ * & * & * & * & * & -\Pi_{66}^1 & \Pi_{67}^1 \\ * & * & * & * & * & * & \Pi_{77}^1 \end{bmatrix},$$

$$\psi_{12} = \begin{bmatrix} \Pi_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{15}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{G} & \Pi_{23}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G} & \Pi_{57}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{74}^2 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{77}^2 \end{bmatrix},$$

$$\psi_{22} = \text{diag}\{-\epsilon_1 I_{nN}, -\epsilon_1 I_{nN}, -\epsilon_2 I_{nN}, -\epsilon_2 I_{nN}, -\epsilon_3 I_{nN}, -\epsilon_3 I_{nN}, -\epsilon_4 I_{nN}, -\epsilon_4 I_{nN}\},$$

$$\Pi_{11}^1 = \bar{P} \bar{A} + \bar{A}^T \bar{P} + \bar{Q} + \bar{P} c (W \otimes \Gamma) + c (W \otimes \Gamma)^T \bar{P} - \Theta \mathcal{G}_1 - e^{-2\alpha\tau_M} \bar{R} + 2\alpha \bar{P},$$

$$\Pi_{12}^1 = \bar{P} \bar{K} + e^{-2\alpha\tau_M} \bar{R}, \quad \Pi_{14}^1 = \bar{P} + \Theta \mathcal{G}_2,$$

$$\Pi_{15}^1 = -\bar{P} \bar{K}, \quad \Pi_{17}^1 = \tau_M (A + c(W \otimes \Gamma))^T \bar{P},$$

$$\Pi_{22}^1 = -2e^{-2\alpha\tau_M} \bar{R} + \sigma \bar{\Omega}, \quad \Pi_{23}^1 = e^{-2\alpha\tau_M} \bar{R},$$

$$\Pi_{25}^1 = -\sigma \bar{\Omega}, \quad \Pi_{27}^1 = \tau_M \bar{K} \bar{\Delta} \bar{P},$$

$$\Pi_{33}^1 = -e^{-2\alpha\tau_M} \bar{R} - e^{-2\alpha\tau_M} \bar{Q}, \quad \Pi_{44}^1 = -\Theta,$$

$$\Pi_{47}^1 = \tau_M \bar{P}, \quad \Pi_{55}^1 = \sigma \bar{\Omega} - \bar{\Omega},$$

$$\Pi_{57}^1 = -\tau_M \bar{K} \bar{P}, \quad \Pi_{67}^1 = \tau_M \bar{P}, \quad \Pi_{77}^1 = -\bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P},$$

$$\Pi_{11}^2 = \epsilon_1 \bar{P} \bar{K}, \quad \Pi_{23}^2 = \epsilon_2 \tilde{G}, \quad \Pi_{15}^2 = -\epsilon_3 \bar{P} \bar{K},$$

$$\Pi_{74}^2 = \tau_M \bar{K}^T \bar{P}, \quad \Pi_{57}^2 = -\epsilon_4 \tilde{G}, \quad \Pi_{77}^2 = \tau_M \bar{K}^T \bar{P},$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{i1} = (G_{i1}^T G_{i2} + G_{i2}^T G_{i1})/2, \quad \tilde{\mathcal{G}}_{i2} = (G_{i1} + G_{i2})^T/2,$$

$$\mathcal{G}_1 = \text{diag}\{\tilde{\mathcal{G}}_{11}, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_{N1}\}, \quad \mathcal{G}_2 = \text{diag}\{\tilde{\mathcal{G}}_{12}, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_{N2}\},$$

$$\bar{P} = \text{diag}\{P, \dots, P\}, \quad \tilde{G} = \text{diag}\{w_1 I_n, \dots, w_N I_n\},$$

$$\bar{R} = \text{diag}\{R_1, \dots, R_N\}, \quad \bar{Q} = \text{diag}\{Q_1, \dots, Q_N\},$$

$$\bar{\Omega} = \text{diag}\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\},$$

则复杂网络(1)的节点与目标节点(3)实现最终指数有界同步。

**证** 针对同步误差系统(15), 构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函如下:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + \eta(t), \quad (17)$$

其中:

$$V_1(t) = E^T(t) \bar{P} E(t), \quad \eta(t) = \sum_{i=1}^N \eta_i(t),$$

$$V_2(t) = \int_{t-\tau_M}^t e^{-2\alpha(t-s)} E^T(s) \bar{Q} E(s) ds,$$

$$V_3(t) = \tau_M \int_{-\tau_M}^0 \int_{t+\theta}^t e^{-2\alpha(t-s)} \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds d\theta.$$

沿着系统(15)的轨迹求  $V(t)$  的导数可得

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{\eta}(t), \quad (18)$$

其中:  $\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^N \dot{\eta}_i(t)$ ,  $\dot{\eta}_i(t)$  由式(8)给出, 且

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & 2E^T(t) \bar{P} \{(\bar{A} + \bar{K} \bar{\Delta} + c(B \otimes \Gamma))E(t) + \\ & F(E(t), t) + \bar{K} \bar{\Delta} E(t - \tau(t)) - \bar{K} \bar{\Delta} \delta(t) + \\ & \tilde{D}(t)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & -2\alpha \int_{t-\tau_M}^t e^{-2\alpha(t-s)} E^T(s) \bar{Q} E(s) ds + \\ & e^{-2\alpha\tau_M} E^T(t - \tau_M) \bar{Q} E(t - \tau_M) + \\ & E^T(t) \bar{Q} E(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = & -\tau_M \int_{t-\tau_M}^t e^{-2\alpha(t-s)} \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds + \\ & \tau_M^2 \dot{E}^T(t) \bar{R} \dot{E}(t) - \\ & 2\alpha\tau_M \int_{-\tau_M}^0 \int_{t+\theta}^t e^{-2\alpha(t-s)} \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds d\theta. \end{aligned}$$

对  $-\tau_M \int_{t-\tau_M}^t e^{-2\alpha(t-s)} \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds$  进行如下变换:

$$\begin{aligned} & -\tau_M \int_{t-\tau_M}^t e^{-2\alpha(t-s)} \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds \leq \\ & -\tau_M \int_{t-\tau_M}^t e^{-2\alpha\tau_M} \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds = \\ & -\tau_M \int_{t-\tau(t)}^t e^{-2\alpha\tau_M} \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds - \\ & \tau_M \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} e^{-2\alpha\tau_M} \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds, \end{aligned}$$

进一步变换可得

$$\begin{aligned} & -\tau_M \int_{t-\tau(t)}^t e^{-2\alpha\tau_M} \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds \leq \\ & -\tau(t) e^{-2\alpha\tau_M} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds \leq \\ & -e^{-2\alpha\tau_M} \left\{ \int_{t-\tau(t)}^t \dot{E}(s) ds \right\}^T \bar{R} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{E}(s) ds \leq \\ & -e^{-2\alpha\tau_M} \tilde{E}^T(t) \bar{R} \tilde{E}(t), \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\tau_M \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} e^{-2\alpha\tau_M} \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds \leq \\ & -(\tau_M - \tau(t)) e^{-2\alpha\tau_M} \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{E}^T(s) \bar{R} \dot{E}(s) ds \leq \\ & -e^{-2\alpha\tau_M} \left\{ \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{E}(s) ds \right\}^T \bar{R} \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{E}(s) ds \leq \\ & -e^{-2\alpha\tau_M} \bar{E}^T(t) \bar{R} \bar{E}(t), \quad (20) \end{aligned}$$

其中:

$$\tilde{E}(t) = E(t) - E(t - \tau(t)),$$

$$\bar{E}(t) = E(t - \tau(t)) - E(t - \tau_M).$$

根据假设 1 可知存在一个对角阵  $\Theta = \text{diag}\{\Theta_1,$

$\Theta_2, \dots, \Theta_N\} > 0$  使得下式成立:

$$\begin{aligned} & E^T(t) \Theta \mathcal{G}_1 E(t) - 2E^T(t) \Theta \mathcal{G}_2 F(E(t), t) + \\ & F^T(E(t), t) \Theta F(E(t), t) \leq 0, \quad (21) \end{aligned}$$

其中:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{i1} = (G_{i1}^T G_{i2} + G_{i2}^T G_{i1})/2, \quad \tilde{\mathcal{G}}_{i2} = (G_{i1} + G_{i2})^T/2,$$

$$\mathcal{G}_1 = \text{diag}\{\tilde{\mathcal{G}}_{11}, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_{N1}\}, \quad \mathcal{G}_2 = \text{diag}\{\tilde{\mathcal{G}}_{12}, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_{N2}\}.$$

由  $E^T(t) \bar{P} \tilde{D}(t) = \sum_{i=1}^N e_i^T(t) P D(t)$  和  $\sum_{i=1}^N e_i^T(t) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times n}$  可得

$$E^T(t) \bar{P} \tilde{D}(t) \leq E^T(t) \bar{P} \bar{D} = 0, \quad (22)$$

其中  $D(t) \leq \bar{D} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$ , 式中:

$$\rho_1 = \max\left\{\|A_i \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^N x_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i x_i(t)\|\right\},$$

$$\rho_2 = \max\left\{\|f_i(s(t), t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x_i(t), t)\|\right\},$$

$$\rho_3 = \max\left\{\| \frac{c}{N} \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma \sum_{i=1}^N x_i(t) - \right.$$

$$\left. c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma x_j(t) \|\right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

结合式(8)(18)–(22)可得

$$\begin{aligned} & 2\alpha V(t) + \dot{V}(t) \leq \\ & \xi_1^T (\Pi_1 + \tau_M^2 \vartheta^T \bar{R} \vartheta) \xi_1 + \tilde{D}^T(t) \Pi_{66}^1 \tilde{D}(t), \quad (23) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \xi(t) = & [E^T(t) \quad E^T(t - \tau(t)) \quad E^T(t - \tau_M(t)) \\ & F^T(E(t), t) \quad \delta^T(t) \quad \tilde{D}^T(t)]^T, \end{aligned}$$

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 & \Pi_{14} & -\bar{P} \bar{K} \bar{\Delta} & 0 \\ * & \Pi_{22} & \Pi_{23} & 0 & -\sigma \Omega & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Pi_{35} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Pi_{66}^1 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_{11} = \bar{P} \bar{A} + \bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} c(W \otimes \Gamma) + c(W \otimes \Gamma)^T \times$$

$$\bar{P} - \Theta \mathcal{G}_1 + \bar{Q} - e^{-2\alpha\tau_M} \bar{R} + 2\alpha \bar{P},$$

$$\Pi_{12} = \bar{P} \bar{K} \bar{\Delta} + e^{-2\alpha\tau_M} \bar{R}, \quad \Pi_{14} = \bar{P} \bar{B} + \Theta \mathcal{G}_2,$$

$$\Pi_{22} = -2e^{-2\alpha\tau_M} \bar{R} + \sigma \Omega, \quad \Pi_{23} = e^{-2\alpha\tau_M} \bar{R},$$

$$\Pi_{33} = -e^{-2\alpha\tau_M} \bar{R} - e^{-2\alpha\tau_M} \bar{Q}, \quad \Pi_{44} = -\theta \otimes I_n,$$

$$\Pi_{55} = \sigma \Omega - \Omega, \quad \vartheta = [\Pi_{16}^* \quad \bar{K} \bar{\Delta} \quad 0 \quad I \quad -\bar{K} \bar{\Delta} \quad I],$$

$$\Pi_{16}^* = (\bar{A} + c(W \otimes \Gamma)).$$

对  $\Pi_1 + \tau_M^2 \vartheta^T \bar{R} \vartheta < 0$  应用 Schur 补引理可得

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \tau_M \vartheta^T R \\ * & -R \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

则

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} = & \Pi|_{\Delta=I} + U_1 \tilde{F} H_1 + (U_1 \tilde{F} H_1)^T + U_2 \tilde{F} H_2 + \\ & (U_2 \tilde{F} H_2)^T + U_3 \tilde{F} H_3 + (U_3 \tilde{F} H_3)^T + U_4 \tilde{F} H_4 + \\ & (U_4 \tilde{F} H_4)^T < 0, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} U_1^T &= [\bar{K}^T \bar{P} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ U_2^T &= [0 \ \tilde{G} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ U_3^T &= [-\bar{K}^T \bar{P} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ U_4^T &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \tilde{G} \ 0], \\ H_1 &= [0 \ \tilde{G} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ H_2 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \tau_M \bar{K}^T \bar{P}], \\ H_3 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \tilde{G} \ 0], \\ H_4 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \tau_M \bar{K}^T \bar{P}]. \end{aligned}$$

接着, 对  $\tilde{\Pi} < 0$  应用引理 3 可得

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} \leq & \Pi|_{\Delta=I} + \varepsilon_1 U_1 U_1^T + \varepsilon_1^{-1} H_1^T H_1 + \varepsilon_2 U_2 U_2^T + \\ & \varepsilon_2^{-1} H_2^T H_2 + \varepsilon_3 U_3 U_3^T + \varepsilon_3^{-1} H_3^T H_3 + \\ & \varepsilon_4 U_4 U_4^T + \varepsilon_4^{-1} H_4^T H_4 < 0. \end{aligned} \quad (25)$$

之后, 对式(25)应用Schur补引理可得式(16).

令  $\lambda_{\max}\{\tilde{D}^T(t)\Pi_{66}^1\tilde{D}(t)\} = \kappa$ , 当  $\Pi < 0$ , 则有

$$2\alpha V(t) + \dot{V}(t) \leq \kappa,$$

变换后可得

$$\|E(t)\|_2^2 \leq \frac{V(0)}{\lambda_{\min}(\bar{P})} e^{-2\alpha t} + \frac{\kappa}{\alpha \lambda_{\min}(\bar{P})}. \quad (26)$$

由定义 1 可知同步误差动态满足最终指数有界, 即复杂网络(1)的节点与平均节点(3)实现最终指数有界同步, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 同步误差上界为  $\sqrt{\frac{\kappa}{\alpha \lambda_{\min}(\bar{P})}}$ .

证毕.

**注 3** 由于复杂网络(1)中的异质性, 节点的动态特性的差异以及节点平均动态目标的设立引起了误差项  $D(t)$ . 由于整体网络对单个节点的影响以及单个节点受到其他节点的抑制作用, 可以合理假设网络系统的动力学行为是稳定的, 不会出现无限发散的情况, 从而易得  $D(t)$  是有界的.

**定理 2** 对于满足假设条件 1 的异质复杂网络(1), 给定参数  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0, \varepsilon_4 > 0, \tilde{\theta} > 0, h > 0, \alpha > 0$  和  $\sigma > 0$ , 若存在正定对称矩阵  $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}, \bar{\Omega}, \Pi_{66}^1, \Theta$  和适当维数矩阵  $\bar{X}$  满足下列不等式:

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} \psi_{11}^* & \psi_{12}^* \\ * & \psi_{22}^* \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

其中:

$$\psi_{11}^* = \begin{bmatrix} \Pi_{11}^1 & \Pi_{12}^{1*} & 0 & \Pi_{14}^1 & \Pi_{15}^{1*} & 0 & \Pi_{17}^1 \\ * & \Pi_{22}^1 & \Pi_{23}^1 & 0 & \Pi_{25}^1 & 0 & \Pi_{27}^{1*} \\ * & * & \Pi_{33}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44}^1 & 0 & 0 & \Pi_{47}^{1*} \\ * & * & * & * & \Pi_{55}^1 & 0 & \Pi_{57}^{1*} \\ * & * & * & * & * & -\Pi_{66}^1 & \Pi_{67}^1 \\ * & * & * & * & * & * & \Pi_{77}^1 \end{bmatrix},$$

$$\psi_{12}^* = \begin{bmatrix} \bar{X} & 0 & 0 & 0 & -\bar{X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \tilde{G} & \varepsilon_2 \tilde{G} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \tilde{G} & \Pi_{75}^{2*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_M \bar{X}^T & 0 & 0 & 0 & \tau_M \bar{X}^T \end{bmatrix},$$

$$\Pi_{12}^{1*} = \bar{X} + e^{-2\alpha\tau_M} \bar{R}, \quad \Pi_{15}^{1*} = -\bar{X},$$

$$\Pi_{27}^{1*} = \tau_M \bar{X}, \quad \Pi_{57}^{1*} = -\tau_M \bar{X}^T,$$

$$\Pi_{77}^{1*} = -2\bar{P} + \bar{R}, \quad \Pi_{75}^{2*} = -\varepsilon_4 \tilde{G},$$

则复杂网络(1)的节点与目标节点(3)实现最终指数有界同步, 其中控制器形式为  $\bar{K} = \bar{P}^{-1} \bar{X}$ .

**证** 由不等式  $-\bar{P} \bar{R}^{-1} \bar{P} \leq -2\bar{P} + \bar{R}$  和定义  $\bar{P} \bar{K} = \bar{X}$ , 定理 1 的式(16)变成定理 2 的式(27), 且式(27)中的  $\Pi_{12}^{1*}, \Pi_{15}^{1*}, \Pi_{27}^{1*}, \Pi_{57}^{1*}, \Pi_{77}^{1*}$  和  $\Pi_{75}^{2*}$  已给出, 其余项均与定理 1 相同. 证毕.

#### 4 仿真

考虑具有 5 个节点的复杂网络(1), 其系统参数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.4 \\ 0.4 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1.4 & 0.3 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.5 \\ 0.3 & -1.7 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.4 \\ 0.6 & -1.4 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.6 \\ 0.4 & -1.3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -0.4 & 1 \\ -1.4 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad c = 0.75.$$

给定量化密度为 0.7, 非线性向量函数  $f_i(x_i(t), t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  如下所示:

$$\begin{aligned} f_1(x_1(t), t) = & [-0.5x_{11}(t) + 2 \tanh(0.2x_{11}(t) + 0.2x_{12}(t)) \\ & 0.95x_{12}(t) - 0.2 \tanh(0.75x_{12}(t))]^T, \end{aligned}$$

$$f_2(x_2(t), t) =$$

$$[-0.5x_{21}(t) + 4 \tanh(0.2x_{21}(t) + 0.2x_{22}(t))$$

$$\begin{aligned}
 & [0.95x_{22}(t) - 0.8 \tanh(0.75x_{22}(t))]^T, \\
 f_3(x_3(t), t) = & [-0.5x_{31}(t) + 3 \tanh(0.2x_{31}(t) + 0.2x_{32}(t)) \\
 & 0.95x_{32}(t) - 0.1 \tanh(0.75x_{32}(t))]^T, \\
 f_4(x_4(t), t) = & [-0.5x_{41}(t) + 2.5 \tanh(0.2x_{41}(t) + 0.2x_{42}(t)) \\
 & 0.95x_{42}(t) - 0.5 \tanh(0.75x_{42}(t))]^T, \\
 f_5(x_5(t), t) = & [-0.5x_{51}(t) + 2 \tanh(0.2x_{51}(t) + 0.2x_{52}(t)) \\
 & 0.95x_{52}(t) - 0.5 \tanh(0.75x_{52}(t))]^T.
 \end{aligned}$$

初始状态选择为  $x_1(t) = [9 \quad -4]^T$ ,  $x_2(t) = [5 \quad -9]^T$ ,  $x_3(t) = [-4 \quad 5]^T$ ,  $x_4(t) = [-2 \quad -0.5]^T$  和  $x_5(t) = [-1 \quad 0]^T$ . 取  $\sigma = 0.2$ ,  $\tilde{\theta} = 0.04$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $h = 0.01$ . 基于定理2, 利用线性矩阵不等式工具箱求解(27)可得

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} -0.4031 & -0.1128 \\ 0.0366 & -0.4591 \end{bmatrix}, \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} -0.4515 & -0.0917 \\ -0.0177 & -0.5074 \end{bmatrix}, \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} -0.4467 & -0.1966 \\ 0.1252 & -0.5053 \end{bmatrix}, \\
 K_4 &= \begin{bmatrix} -0.4226 & -0.0830 \\ -0.0136 & -0.4754 \end{bmatrix}, \\
 K_5 &= \begin{bmatrix} -0.4358 & -0.1590 \\ 0.0793 & -0.4959 \end{bmatrix}, \\
 \Omega_1 &= \begin{bmatrix} 2.0420 & -0.0519 \\ -0.0519 & 1.9229 \end{bmatrix}, \\
 \Omega_2 &= \begin{bmatrix} 2.0297 & -0.0493 \\ -0.0493 & 1.9371 \end{bmatrix}, \\
 \Omega_3 &= \begin{bmatrix} 1.9584 & -0.0587 \\ -0.0587 & 1.7689 \end{bmatrix}, \\
 \Omega_4 &= \begin{bmatrix} 2.0416 & -0.0497 \\ -0.0497 & 1.9465 \end{bmatrix}, \\
 \Omega_5 &= \begin{bmatrix} 2.0098 & -0.0545 \\ -0.0545 & 1.8599 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

仿真结果如图1-4所示. 图1为无控制输入情况下的同步误差响应曲线. 图2为动态事件触发控制作用下的同步误差响应曲线. 对比图1和图2可知本文所设计的控制器能够实现复杂网络最终指数有界同步. 此外, 由于复杂网络具有异质性, 无论是否有控制输入, 节点的响应曲线都不重合. 图3为控制输入曲线. 图4为动态事件触发序列. 从图3-4可以看出, 系统的触发

不固定, 只在满足触发条件时才更新控制信号. 由此可知本文所设计的事件触发条件只在满足触发条件时传输数据, 从而节约系统资源. 此外, 节点间触发次数不相同, 各个节点独立触发.

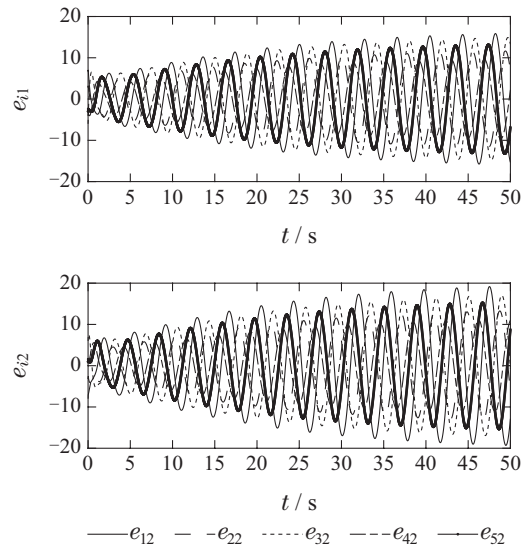


图1 无控制输入的同步误差响应

Fig. 1 Synchronization error response without control inputs

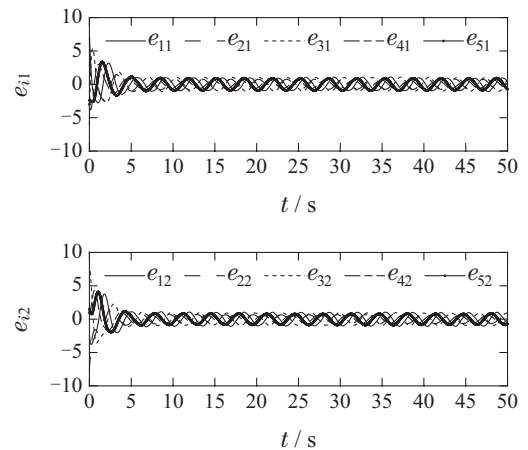
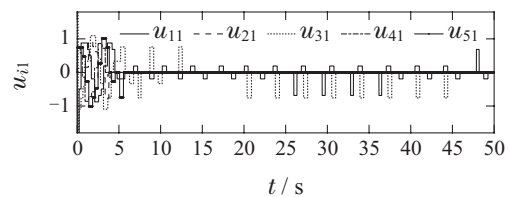


图2 动态事件触发控制输入的同步误差响应

Fig. 2 Synchronization error response with dynamic event triggering control inputs

当  $\tilde{\theta} = 0$  时, 触发条件(7)为静态事件触发, 此时误差系统的响应曲线和触发间隔如图5-6所示. 对比图2与图5、图4与图6可以看出, 本文所设计的动态事件触发策略对比静态事件触发, 能够有效减少触发次数, 并且不降低系统性能.



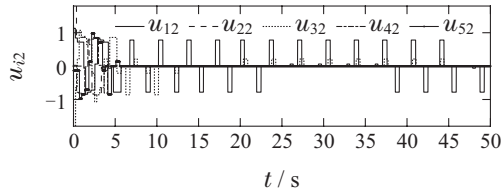


图 3 控制输入

Fig. 3 Control inputs

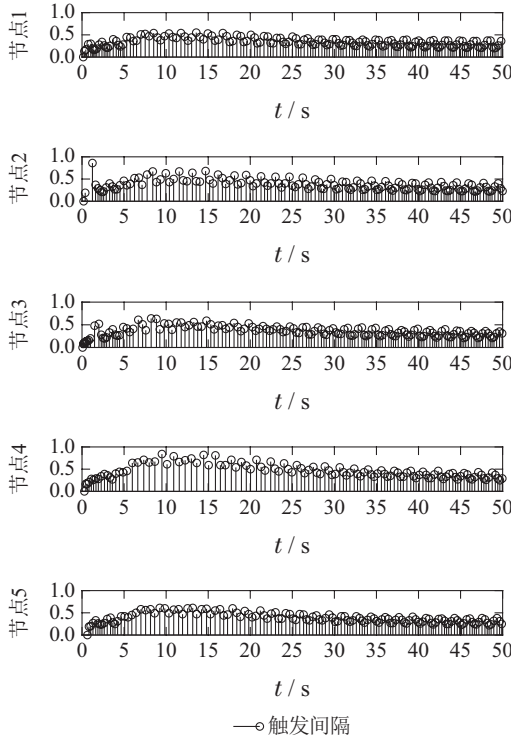


图 4 动态事件触发序列

Fig. 4 Dynamic event triggering sequences

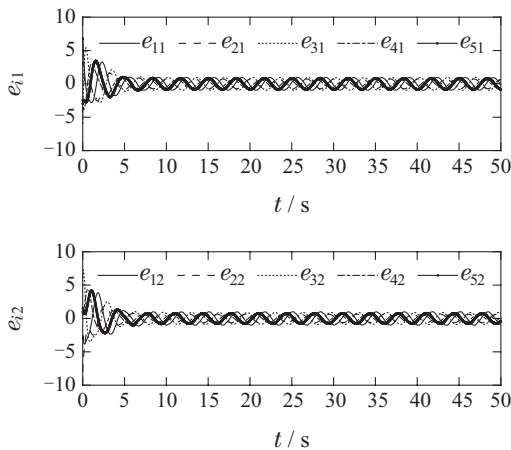


图 5 静态事件触发控制输入的同步误差响应

Fig. 5 Synchronization error response with static event triggering control inputs

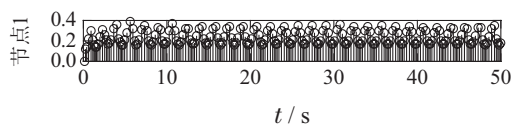


图 6 静态事件触发序列

Fig. 6 Static event triggering sequences

### 5 结论

本文研究了异质复杂网络与其平均轨道的同步控制. 通过引入动态事件触发策略节约了通信资源, 针对同步误差系统, 设计了基于对数量化的控制器. 利用Lyapunov稳定性理论, 得到了闭环同步误差系统最终指数有界的充分条件, 并实现了控制器和事件触发参数的联合求解. 即所设计的量化控制器能够实现异质复杂网络最终指数有界同步, 节约网络资源. 最后通过数值算例验证了所提理论的有效性.

### 参考文献:

- [1] DU Wenju, LI Yinzen, ZHANG Jiangang, et al. Study on stability control of a car-following model with time-varying delay. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(7): 1481 – 1490. (杜文举, 李引珍, 张建刚, 等. 一类时变时滞车辆跟驰模型的稳定性控制. *控制理论与应用*, 2020, 37(7): 1481 – 1490.)
- [2] CUI E, GAO X, JING Y, et al. Adaptive funnel synchronization control for complex switching networks in power systems. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2024, 11(1): 299 – 312.
- [3] LI Z, CHANG J, WANG Z, et al. Stability of regional ecological supply-demand is enhanced by complex network modeling: Evidence from the Xuzhou metropolitan area, China. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2024, 17: 1857 – 1873.
- [4] GAO J, BARZEL B, BARABÁSI A L. Universal resilience patterns in complex networks. *Nature*, 2016, 530: 307 – 312.
- [5] TANG Y, QIAN F, GAO H. Synchronization in complex networks and its application—a survey of recent advances and challenges. *Annual Reviews in Control*, 2014, 38(2): 184 – 198.
- [6] LIU X. Synchronization and control for multiweighted and directed complex networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2023, 34(6): 3226 – 3233.
- [7] LU R, YU W, LÜ J, et al. Synchronization on complex networks of networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(11): 2110 – 2118.

- [8] YANG Y, HU C, YU J, et al. Synchronization of fractional-order spatiotemporal complex networks with boundary communication. *Neurocomputing*, 2021, 450: 197 – 207.
- [9] ZHOU H, LIU Z, CHU D, et al. Sampled-data synchronization of complex network based on periodic self-triggered intermittent control and its application to image encryption. *Neural Networks*, 2022, 152: 419 – 433.
- [10] FAN H, SHI K, ZHAO Y. Global  $\mu$ -synchronization for nonlinear complex networks with unbounded multiple time delays and uncertainties via impulsive control. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2022, 599: 127484.
- [11] WANG Z X, FAN J B, JIANG G P, et al. Consensus in nonlinear multi-agent systems with nonidentical nodes and sampled-data control. *Science China Information Sciences*, 2018, 61: 1 – 14.
- [12] YE D, SHAO Y. Quasi-synchronization of heterogeneous nonlinear multi-agent systems subject to dos attacks with impulsive effects. *Neurocomputing*, 2019, 366: 131 – 139.
- [13] SUN F, LIU P, LI H, et al. Fixed-time consensus of heterogeneous multi-agent systems based on distributed observer. *International Journal of Systems Science*, 2021, 52(9): 1780 – 1789.
- [14] KUMAR R, KUMAR U, DAS S, et al. Effects of heterogeneous impulses on synchronization of complex-valued neural networks with mixed time-varying delays. *Information Sciences*, 2021, 551: 228 – 244.
- [15] LIU X, TAY W P, LIU Z W, et al. Quasi-synchronization of heterogeneous networks with a generalized markovian topology and event-triggered communication. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(10): 4200 – 4213.
- [16] LIU Q, QIN J, YU C. Event-based agreement protocols for complex networks with time delays under pinning control. *Journal of The Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics*, 2016, 353(15): 3999 – 4015.
- [17] XIAO Q, ZENG Z. Event-based time-interval pinning control for complex networks on time scales and applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(11): 8797 – 8808.
- [18] GIRARD A. Dynamic triggering mechanisms for event-triggered control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 60(7): 1992 – 1997.
- [19] HUANG Ling, SUN Xiaoyu, LIN Xiaona, et al. Dynamic event-triggered control for nonlinear networks with DoS attacks. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(6): 1033 – 1042. (黄玲, 孙晓宇, 蔺小娜, 等. 具有DoS攻击非线性网络的动态事件触发控制. 控制理论与应用, 2022, 39(6): 1033 – 1042.)
- [20] DIMAROGONAS D V, FRAZZOLI E, JOHANSSON K H. Distributed event-triggered control for multiagent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 57(5): 1291 – 1297.
- [21] XU W, HO D, LI L, et al. Event-triggered schemes on leader-following consensus of general linear multiagent systems under different topologies. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 47(1): 212 – 223.
- [22] BAO H, PARK J H, CAO J. Adaptive synchronization of fractional-order output-coupling neural networks via quantized output control. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, 32(7): 3230 – 3239.
- [23] XIE Yibin, GAO Wenhua. Distributed quantized random gradient-free algorithm with event triggered communication. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(8): 1175 – 1187. (谢奕彬, 高文华. 带事件触发机制的分布式量化随机无梯度投影算法. 控制理论与应用, 2021, 38(8): 1175 – 1187.)
- [24] LIU D, YANG G H. Dynamic event-triggered control for linear time-invariant systems with  $L_2$ -gain performance. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2019, 29(2): 507 – 518.
- [25] DUAN G R, YU H H. *LMI is in Control Systems: Analysis, Design and Applications*. Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, 2013.
- [26] LI J Y, WANG Z D, LU R, et al. Cluster synchronization control for discrete-time complex dynamical networks: When data transmission meets constrained bit rate. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2023, 34(5): 2554 – 2568.

#### 作者简介:

黄玲 教授, 博士生导师, 目前研究方向为网络控制系统的分析与综合、信号的处理及识别、智能控制理论及应用, E-mail: mail.huangling@163.com;

郭婧 博士研究生, 目前研究方向为复杂网络同步控制、网络化系统控制, E-mail: 2014719768@qq.com;

王云飞 硕士, 目前研究方向为复杂网络同步控制、事件触发控制, E-mail: 2238756684@qq.com.