第 41 卷第 8 期
2024 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 41 No. 8
Aug. 2024

关于自抗扰控制的稳定性分析

黄　一[1,2†]

(1. 中国科学院 数学与系统科学研究院 系统控制重点实验室, 北京 100190;

2. 中国科学院大学 数学科学学院, 北京 100049)

引用格式: 黄一. 关于自抗扰控制的稳定性分析. 控制理论与应用, 2024, 41(8): 1501 – 1505

DOI: 10.7641/CTA.2024.40158

Citation: HUANG Yi. Stability analysis of active disturbance rejection control. *Control Theory & Applications*, 2024, 41(8): 1501 – 1505

1 引言

自抗扰控制(active disturbance rejection control, ADRC)在提出后的很长一段时间里在学术界有很大争议, 一个重要原因是ADRC在提出时并没有给相关稳定性证明. 近十多年来, ADRC的理论分析方面已经有了很多进展, 但是在进行ADRC稳定性分析时, 如何对“总扰动”的数学性质进行比较合理的假设, 依然会困扰一些希望进行自抗扰控制稳定性分析的学者, 其中一个比较突出的问题是简单地假设“总扰动”或者其时间导数有界往往会被认为犯了所谓循环论证的错误. 本文从讨论自抗扰控制稳定性分析的前提如何假设出发, 进一步讨论交流关于扩张状态观测器(extended state observer, ESO)“带宽”的限制以及自抗扰控制稳定裕度分析的一些思考.

自抗扰控制(ADRC)的核心思想是以控制输入到被控量测输出的内在积分器串联结构为标准型, 把系统动态中异于此标准型的部分视为“总扰动”(包括内扰和外扰), 以扩张状态观测器(ESO)为手段, 实时地估计和消除“总扰动”, 从而把充满扰动、不确定性和非线性的被控对象还原为简单的积分器串联型系统.

自抗扰控制创造性地提出了“总扰动”这一新概念, “总扰动”和传统的扰动概念不同, 不但包含外扰也包含系统中各处存在的参数或模型不确定性等效到在控制输入端影响被控输出的总和作用. ADRC最妙的地方就在于把系统里各种非线性不确定等“乱七八糟”的东西都打包成“总扰动”, 交给ESO处理, 剩下的是干干净净的线性积分器串联系统. ADRC的这个思想框架很宏大, 描述“总扰动”的不确定函数$f_z(x,t,u)$既可以是线性的也可以是非线性的, 既可以是时不变的, 也可以是时变的, 还可以是不连续的(这里, x表示系统状态, t表示时间, u表示控制量), 如何从理论上严格证明为什么ESO就能估计好含有如此大范围不确定性的“总扰动”呢?

在ADRC这个宏大的框架下, “总扰动”$f_z(x,t,u)$往往是和闭环状态x甚至控制u纠缠在一起的, 因此, 要证明稳定性, 第一, 一般不能假设“总扰动”有界或者它的时间导数有界, 第二, 不能假设ESO的估计误差有界或收敛. 因为这两点其实恰恰是证明中最关键的, 不能提前假设, 一旦这两点能证出来, 证明过程基本就完成了, 因为剩下的都是线性的了.

本文可以用一个简单的例子来说明这点, 假设总扰动$f_z(x,t,u)$是一个简单的线性定常模型, 即$f_z(x,t,u)=ax$, 那么假设“总扰动”有界或“总扰动”时间导数有界相当于假设状态x或者它的导数$\dot{x}$有界, 这样假设显然不合理, x和$\dot{x}$在ADRC控制下的有界性是需要证明的. 当然, 如果总扰动$f_z(x,t,u)$只是与时间有关的未知外扰, 即$f_z(x,t,u)=d(t)$, 与系统状态x无关, 那么假设外扰$d(t)$的时间导数有界, 甚至外扰$d(t)$有界则都是合理的.

为了用尽可能少的数学推导说明这个问题, 下面针对一类一阶非线性不确定系统的ADRC设计给出闭环系统稳定性的一个理论分析结果, 然后在此基础上, 进一步交流讨论关于自抗扰控制稳定性分析方面的一些思考.

注 1　本文的假设条件、定理表述和证明过程主要参考了文献[1], 但为了说明主要问题, 把控制问题做了简化, 这样假设和定理表述上可以简洁一些. 文献[1]是针对一般的n阶对象、控制输入增益带有不确定性, 并且$d(t)$为不连续未

收稿日期: 2024−03−18; 录用日期: 2024−04−25.
†通信作者. E-mail: yhuang@amss.ac.cn.
国家自然科学基金项目(U20B2054)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (U20B2054).

知外扰的更广的一类不确定系统情形, 因此, 还要讨论peaking、不连续点等问题, 分析更复杂.

2 基于ADRC的稳定性

考察一阶不确定系统

$$\dot{x}=f(x)+d(t)+u, \tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}$为被控输出, 可量测; $f(x)$为未知的非线性函数, 表示对象模型; $d(t)$为外扰; $u\in\mathbb{R}$为待设计的控制输入; 控制目标是将一定范围内$|x(t_0)|\leqslant\rho_0$出发的$x(t)$控制到0.

不确定系统(1)中, $f(x)+d(t)$是影响被控量x的总扰动, 定义为系统的扩张状态$x_2(t)$, 即

$$x_2=f(x)+d(t).$$

采用如下最常用的线性ADRC控制律:

$$\text{ESO:}\begin{cases}\dot{z}_1=z_2+u+\beta_1(x-z_1),\\ \dot{z}_2=\beta_2(x-z_1),\\ z_1(t_0)=x(t_0),\ z_2(t_0)=0,\end{cases} \tag{2}$$

$$u=-kz_1-z_2, \tag{3}$$

其中: $\beta_1>0, \beta_2>0$为ESO的待调参数, $k>0$为ADRC中的反馈增益系数.

用"带宽法"设计ESO参数β_1, β_2, 即

$$\beta_1=2\omega_{\rm e},\ \beta_2=\omega_{\rm e}^2.$$

期望调节ESO带宽$\omega_{\rm e}$使得ESO的输出$z_1(t)$, $z_2(t)$能够分别估计被控量$x(t)$和控制过程的总扰动$x_2(t)$.

为了分析ADRC(2)–(3)控制不确定系统(1)的稳定性, 假设非线性不确定系统(1)满足如下条件:

A1) 未知函数$f(x)$连续可微, 且对于任意常数$\rho\geqslant0$, 若$|x|\leqslant\rho$, 则

$$|f(x)|\leqslant\alpha(\rho),\ |\frac{\partial f}{\partial x}|\leqslant\alpha(\rho),$$

其中$\alpha(\cdot)$: $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$为一已知有限函数.

A2) 未知外扰$d(t)$连续可微, 且满足

$$|d(t)|\leqslant c,\ |\dot{d}(t)|\leqslant c,\ \forall t\geqslant t_0,$$

其中$c>0$为已知常数.

注 2 1) A1)是对未知非线性函数$f(x)$(常被称为"总扰动"的内扰部分)的假设, 它与系统状态x有关. 假设A1)对$f(x)$的数学描述还进一步参考了文献[2]关于未知非线性对象的数学刻画, 假设A1)中, $f(x)$满足局部Lipchitz条件, 而没有限定$f(x)$有界或它的时间导数有界. 假设A1)可以包含很大一类非线性系统, 比如飞行系统, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$是对应于气动系数的量, 虽然气动系数与飞行状态有关, 且不确定性很大, 但它是在一定范围内变化的有界量.

2) A2)是对未知扰动$d(t)$(常被称为"总扰动"的外扰部分)的假设, $d(t)$与状态无关而只与时间有关, 假设$d(t)$及其时间导数有界.

3) 假设A1)–A2)中, $\alpha(\cdot)$和c描述了不确定性的范围大小.

下面给出在假设A1)–A2)下, 关于ADRC(2)–(3)控制的闭环系统稳定性分析的一个结果.

令$x^*(t)$为从初值$x(t_0)$出发的满足如下动态过程的期望控制过程轨线:

$$\dot{x}^*(t)=-kx^*(t),\ x^*(t_0)=x(t_0), \tag{4}$$

则在ADRC(2)–(3)控制下闭环系统的被控量$x(t)$和期望动态过程$x^*(t)$的误差, 以及ESO对总扰动的估计误差具有如下性质.

定理 1 对于满足假设A1)–A2)的不确定系统(1), 对任意给定状态初值范围ρ_0, 存在$\omega^*>0$, 只要$\omega_{\rm e}>\omega^*$, 则ADRC(2)–(3)控制的闭环系统具有如下性质:

$$1)\ |x(t)-x^*(t)|\leqslant\frac{\eta_1^*}{\omega_{\rm e}},\ t\geqslant t_0, \tag{5}$$

$$2)\ \left\|\begin{bmatrix}x(t)-z_1(t)\\ x_2(t)-z_2(t)\end{bmatrix}\right\|\leqslant\frac{\eta_2^*}{\omega_{\rm e}}+\eta_3^*{\rm e}^{-\eta_4^*\omega_{\rm e}(t-t_0)},\ t\geqslant t_0, \tag{6}$$

其中ω^*, η_1^*, η_2^*, η_3^*, η_4^*是与ρ_0, $\alpha(\cdot)$, c, k有关的正数.

注 3 定理的含义:

1) 定理的第1个结果揭示存在ADRC(2)–(3)参数$(k,\omega_{\rm e})$可以控制满足假设条件的一族非线性不确定对象(1), 使得被控量x不但是有界的, 而且和期望动态过程$x^*(t)$之间的误差大小可以由ESO的带宽参数$\omega_{\rm e}$调节. $x^*(t)$其实就是一阶纯积分环节的一个动态响应, 动态品质由反馈系数k调节. 因此, 这个结果不但证明了ADRC的稳定性, 还揭示了ADRC参数的物理含义是很清晰的, 参数k主要调节积分器串联型响应过程$x^*(t)$的动态品质, $\omega_{\rm e}$则可以调节实际系统响应$x(t)$与$x^*(t)$的误差, $\omega_{\rm e}$越大, 系统响应往往越接近积分器串联系统的响应$x^*(t)$. 这和本文仿真和试验中看到的现象是一致的, 也可以在一定程度上解释在仿真和试验中ADRC表现出的在不确定参数变化范围比较大时依然可以实现系统动态响应基本一致的优点.

2) 定理的第2个结果则给出了ESO对总扰动估计误差的性质, 揭示了不但估计误差有界, 而且估计误差的大小可由ESO的带宽参数$\omega_{\rm e}$调节, $\omega_{\rm e}$越大, 估计误差往往越小.

本文把定理的证明放在最后, 借用该定理来进一步交流讨论自抗扰控制稳定性分析方面的一些思考.

关于"总扰动"的假设

定理1以相对简单的一类一阶非线性不确定系统控制问题为例, 给出了在一种笔者认为比较合理的"总扰动"假设条件下, ADRC稳定性分析结果. 假设不同, 所刻画的不确定性的范围大小会不同, 如文献[1]针对控制输入增益带有不确定性, 并且$d(t)$为不连续未知外扰的情形, 文献[3]进一步针对非仿射的非线性情形, 研究了ADRC的稳定性. 尽管现在对于ADRC的稳定性分析已经有了很多进展, 这些研究中的假设条件一般都为充分条件, 从仿真和试验研究结果看, ADRC能应对的"总扰动"范围还可以更大, 如

何在理论分析中进一步弱化假设条件, 扩大不确定系统的范围, 依然有待研究.

有些论文里对假设"总扰动有界"的解释是实际系统的状态在系统制定的工作范围内是有界的, 如果从这个角度出发的话, 这个界应该是系统安全运行的界, 比如$|x(t)| \leqslant a(t \geqslant t_0)$, 超过$a$这个界, 就认为系统失控了或垮了. 这样的话, 那证明就变为如何证明一定存在ESO的带宽ω_e能够保证状态一直在这个安全界内运行, 而不是含糊的有界. 相当于不能提前假设$|x(t)| \leqslant a$, 而是要证明存在ESO的带宽ω_e能够保证$|x(t)| \leqslant a\,(t \geqslant t_0)$, 这个证明的难度和现在是类似的.

关于ESO带宽ω_e的上限和下限

目前这方面的理论研究结果大多还是偏定性的意义, 比如, 定理1说明一定存在足够大的ω_e可使闭环系统稳定, 而且ω_e对调节精度的作用是, ω_e越大, 往往估计误差越小、控制精度越好, 这和本文仿真和试验中看到的现象是一致的. 但工程师可能进一步希望知道ω_e具体应该取多大, 因为, 实际应用中, 除了稳定性、精度外, 还要兼顾噪声、时延、执行机构约束等因素, ω_e不可能无限大. 任何工程控制系统毫无例外都是带宽受限的, 所以ESO的带宽ω_e一定会有上限约束.

然而定理 1 给出的不论是控制误差上界还是ESO估计误差的上界, 还不是一个很紧的上界, 保守性通常还比较大. 具体说就是系数$\omega^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*, \eta_4^*$是在证明过程中通过不断放大不等式得到的, 而且一般对象阶数越高, 保守性越大. 所以, 还无法根据这个上界算出ω_e具体取多大合适. 这也让一些人产生ADRC会不会是高增益控制器的疑问或担心, 其实在实际工程控制问题的仿真和试验中调出来的ESO带宽ω_e都不会很大.

针对此问题, 文献 [4] 在假设 $|\dfrac{\partial f}{\partial x}|$ 有界的前提下, 对于一种降阶ESO设计, 给出了能使系统稳定的ω_e的一个定量可计算的下界ω^*, 也就是可以根据不确定性的范围大小, 把ω^*具体算出来. 这方面研究还不多, 如何从理论上定量进行ω_e上下界分析, 依然还有很大的空间.

关于ADRC的稳定裕度分析

如推文[5]里提到的, 在ADRC的实际应用中, 工程师非常重视自抗扰控制的稳定性分析, 但工程师说的稳定性和学术界所拷问的自抗扰控制稳定性往往是两个不同的含义. 工程师说的稳定性往往是指相对稳定性, 也就是稳定裕度, 是个明确量化的指标. 比如教科书告诉, 在工程实践中, 一般希望相角裕度在$30° \sim 60°$之间, 幅值裕度应大于6 dB[6]. 没有这个指标, 控制设计方案就很难通过批准. 这个指标其实是线性定常系统的频域指标, 是经典控制理论的内容.

目前对于ADRC的稳定性分析, 在"幅值裕度"方面有些地方做得比经典的幅值裕度要更细致一些. 比如如果系统有多个不确定参数, 像飞行控制系统往往会有上10个不确定气动系数, 那么6 dB的幅值裕度只是一个笼统的裕度, 比较能确定的只能是当其他参数不变时, 控制输入增益系数可以最大有6 dB(2倍)的变化, 但并不能进一步细化到每个不确定参数能有多大的变化裕度. 因此, 在航天工程中分析飞行方案的稳定性时, 往往需要把稳定裕度分析结合大量拉偏参数以及考虑各种物理器件约束的计算机动态仿真来验证控制方案的稳定性. 文献[1, 3]对ADRC的稳定性进行分析时, 是在假设控制输入增益系数(文章中的b)变化范围在2倍(6dB) 以上, 且其他不确定参数(相当于$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 对应的量)在给定变化范围内进行的, 从此角度, 目前关于ADRC在不确定参数变化裕度方面的分析是比一个笼统的幅值裕度要更细致一些的. 但实际工程中, 不能仅看幅值裕度, 还有相位裕度的考量, 这些指标往往互相制约, 需要兼顾着综合分析, 这是困难所在. 针对这个问题, 文献[7–10]对于线性不确定系统的ADRC设计, 从频域上定量研究了相位裕度, 以及抗扰、抗噪等工程指标, 但这方面研究还远远不够.

另一方面, 这些频域指标只适用于线性定常系统, 从工程技术发展看, 经典的稳定裕度指标也可能需要再审视, 比如现在新型飞行器的飞行包线越来越大, 动力学特性已经表现出很强的非线性特性了, 再用线性定常系统的稳定裕度指标去要求有时可能有点保守了. 怎么对非线性时变系统建立这种类似的指标体系, 目前在学术上也还没很好解决.

3　定理证明

证　令$\xi_1 = \omega_e(x - z_1), \xi_2 = x_2 - z_2$, 用$(x, \xi_1, \xi_2)$描述的闭环系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} = {} & x_2 - kz_1 - z_2 = -kx + k(x - z_1) + (x_2 - z_2) = \\ & -kx + \frac{k}{\omega_e}\xi_1 + \xi_2,\end{aligned} \tag{7}$$

$$\dot{\xi}_1 = \omega_e\left(x_2 - z_2 - 2\omega_e\left(x - z_1\right)\right) = -2\omega_e\xi_1 + \omega_e\xi_2, \tag{8}$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(-kx + \frac{k}{\omega_e}\xi_1 + \xi_2) + \dot{d}(t) - \omega_e\xi_1. \tag{9}$$

令

$$\xi = [\xi_1 \;\; \xi_2]^{\rm T},\; A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_e = [k \;\; 1],\; T_1 = {\rm diag}\left\{\omega_e^{-1}, 1\right\},$$

则

$$\dot{\xi} = \omega_e A_2 \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(-kx + K_e T_1 \xi\right) + \dot{d}(t) \end{bmatrix}.$$

为了分析闭环系统性质, 取如下正定函数:

$$V_1(x)=\frac{1}{2k}x^2,\ V_2(\xi)=\xi^{\mathrm T}P_2\xi, \tag{10}$$

其中P_2为满足$A_2^{\mathrm T}P_2+P_2A_2=-I$ 的对称正定矩阵, 令c_{21}, c_{22}分别为P_2的最小最大特征值.

因为

$$\|\xi(t_0)\|=|x_2(t_0)|=|f(x(t_0))+d(t_0)|,$$

由条件A1)–A2), 可知

$$\|\xi(t_0)\|\leqslant\eta_3(\rho_0,c),\ \eta_3(\rho_0,c)=\alpha(\rho_0)+c. \tag{11}$$

定义如下关于(x,ξ)的有界集合:

$$\varOmega=\{(x,\xi)\mid V_1(x)\leqslant\rho_2^2, V_2(\xi)\leqslant c_{22}\eta_3^2\}, \tag{12}$$

其中

$$\rho_2=\frac{1}{\sqrt{2k}}\max\{\rho_0,\frac{1}{k}\|K_{\mathrm e}\|\|T_1\|\frac{\sqrt{c_{22}}}{\sqrt{c_{21}}}\eta_3\}.$$

显然

$$(x(t_0),\xi(t_0))\in\varOmega.$$

下面证明存在$\omega^*>0$, 当$\omega_{\mathrm e}>\omega^*$时, $\varOmega$是闭环系统(7)–(9)轨线的正不变集, 即闭环系统轨线会被ADRC(2)–(3)一直控制在有界集合$\varOmega$内.

若存在时刻t_ξ,

$$\begin{cases}V_2(\xi(t_\xi))=c_{22}\eta_3^2,\\ V_1(x(t))\leqslant\rho_2^2,\ \forall t\in[t_0,t_\xi],\end{cases} \tag{13}$$

即

$$\eta_3\leqslant\|\xi(t_\xi)\|\leqslant\sqrt{\frac{c_{22}}{c_{21}}}\eta_3,\ x^2(t_\xi)\leqslant 2k\rho_2^2, \tag{14}$$

则$\dot V_2(\xi(t_\xi))$在闭环系统轨线上具有如下特性:

$$\begin{aligned}&\dot V_2(\xi(t_\xi))=\\&-\omega_{\mathrm e}\|\xi(t_\xi)\|^2+2\xi^{\mathrm T}(t_\xi)P_2H(t_\xi)\leqslant\\&-\omega_{\mathrm e}\|\xi(t_\xi)\|^2+2\|\xi(t_\xi)\|\|P_2\|h(t_\xi),\end{aligned} \tag{15}$$

其中:

$$H(t)=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(-kx(t)+K_{\mathrm e}T_1\xi(t))+\dot d(t)\end{bmatrix},$$

$$h(t)=|-\frac{\partial f}{\partial x}kx(t)+\dot d(t)|+\|\frac{\partial f}{\partial x}K_{\mathrm e}T_1\|\|\xi(t)\|.$$

由式(14)以及条件A1)–A2),

$$|-\frac{\partial f}{\partial x}kx+\dot d(t)|\leqslant\gamma_2(k,\rho_2,c),$$

$$\|\frac{\partial f}{\partial x}K_{\mathrm e}\|\leqslant\gamma_3(k,\rho_2),$$

其 中$\gamma_2(k,\rho_2,c)$, $\gamma_3(k,\rho_2)$是 与ρ_0, $\alpha(\cdot)$, c, k, $\mu(\omega_{\mathrm e})$有关的正数,

$$\mu(\omega_{\mathrm e})\triangleq\|T_1\|=\max(\frac{1}{\omega_{\mathrm e}},1).$$

于是, 由式(14)–(15)可知

$$\dot V_2(\xi(t_\xi))\leqslant-\|\xi(t_\xi)\|(\omega_{\mathrm e}\eta_3-2\|P_2\|\theta(\omega_{\mathrm e})), \tag{16}$$

其中

$$\theta(\omega_{\mathrm e})=\gamma_2(k,\rho_2,c)+\gamma_3(k,\rho_2)\mu(\omega_{\mathrm e})\sqrt{\frac{c_{22}}{c_{21}}}\eta_3.$$

因为$\mu(\omega_{\mathrm e})$关于$\omega_{\mathrm e}$非增, 根据式(16), 存在与ρ_0, $\alpha(\cdot)$, c, k有关的正数ω^*, 当$\omega_{\mathrm e}\geqslant\omega^*$时, 有

$$\dot V_2(\xi(t_\xi))\leqslant 0. \tag{17}$$

另一方面, 若存在时刻t_x,

$$\begin{cases}V_1(x(t_x))=\rho_2^2,\\ V_2(\xi(t))\leqslant c_{22}\eta_3^2,\ \forall t\in[t_0,t_x],\end{cases} \tag{18}$$

即

$$x^2(t_k)=2k\rho_2^2,\ \|\xi(t_k)\|\leqslant\frac{\sqrt{c_{22}}}{\sqrt{c_{21}}}\eta_3, \tag{19}$$

则当$\omega_{\mathrm e}\geqslant\omega^*$时, $\dot V_1(x(t_x))$在闭环系统轨线上具有如下特性:

$$\begin{aligned}\dot V_1(x(t_x))=&-x^2(t_k)+\frac{1}{k}x(t_k)K_{\mathrm e}T_1\xi(t_k)\leqslant\\&-\sqrt{2k}\rho_2(\sqrt{2k}\rho_2-\\&\frac{1}{k}\|K_{\mathrm e}\|\|T_1\|\frac{\sqrt{c_{22}}}{\sqrt{c_{21}}}\eta_3)\leqslant 0.\end{aligned} \tag{20}$$

式(17)(20)说明$\varOmega$是闭环系统(7)–(9)轨线的正不变集, 即当$\omega_{\mathrm e}\geqslant\omega^*$时, 从$(x(t_0),\xi(t_0))$出发的闭环系统轨线在ADRC(2)–(3)控制下停留有界集合$\varOmega$内, 闭环系统轨线$x(t)$和ESO的估计误差$\xi(t)$有界.

下面进一步分析, 当$\omega_{\mathrm e}\geqslant\omega^*$时, 控制误差$x-x^*$和估计误差$\xi(t)$在有界集合$\varOmega$内的动态过程特性. 因为, 在有界集合$\varOmega$内, 对于任意的$t\geqslant t_0$,

$$|x(t)|\leqslant\sqrt{2k}\rho_2,\ \|\xi(t)\|\leqslant\sqrt{\frac{c_{22}}{c_{21}}}\eta_3. \tag{21}$$

先分析ESO的估计误差$\xi(t)$的性质. 类似于前面式(15)–(16)的分析, 可知

$$\begin{aligned}\dot V_2(\xi)\leqslant&-\omega_{\mathrm e}\|\xi\|^2+2\|\xi\|\|P_2\|\theta(\omega^*)\leqslant\\&-\frac{\omega_{\mathrm e}}{c_{22}}V_2+\frac{\eta_4}{\sqrt{c_{21}}}\sqrt{V_2},\end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$\eta_4=2\|P_2\|[\gamma_2(k,\rho_2,c)+\gamma_3(k,\rho_2)\mu(\omega^*)\sqrt{\frac{c_{22}}{c_{21}}}\eta_3],$$

即

$$\frac{\mathrm d\sqrt{V_2(\xi)}}{\mathrm dt}\leqslant-\frac{\omega_{\mathrm e}}{2c_{22}}\sqrt{V_2}+\frac{\eta_4}{2\sqrt{c_{21}}}. \tag{23}$$

利用Gronwall不等式，可得

$$\begin{aligned}\sqrt{V_2(\xi(t))}\leqslant&\ \mathrm e^{-\frac{\omega_{\mathrm e}}{2c_{22}}(t-t_0)}\sqrt{V_2(\xi(t_0))}+\\&\frac{\eta_4c_{22}}{\omega_{\mathrm e}\sqrt{c_{21}}}(1-\mathrm e^{-\frac{\omega_{\mathrm e}}{2c_{22}}(t-t_0)}),\end{aligned} \tag{24}$$

则$\forall t \geqslant t_0$,

$$\begin{aligned}\|\xi(t)\| \leqslant \frac{\sqrt{V_2(\xi(t))}}{\sqrt{c_{21}}} \leqslant \\ \frac{\sqrt{V_2\left(\xi\left(t_0\right)\right)}}{\sqrt{c_{21}}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega_{\mathrm{e}}}{2c_{22}}(t-t_0)} + \\ \frac{\eta_4 c_{22}}{\omega_{\mathrm{e}} c_{21}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\omega_{\mathrm{e}}}{2c_{22}}(t-t_0)}) \leqslant \\ \frac{\widetilde{\eta}_2^*}{\omega_{\mathrm{e}}} + \tilde{\eta}_3^* \mathrm{e}^{-\frac{\omega_{\mathrm{e}}}{2c_{22}}(t-t_0)},\end{aligned} \tag{25}$$

其中:

$$\tilde{\eta}_2^* = \frac{\eta_4 c_{22}}{c_{21}},\ \tilde{\eta}_3^* = \frac{\sqrt{V_2\left(\xi\left(t_0\right)\right)}}{\sqrt{c_{21}}}.$$

因为

$$\begin{bmatrix} x - z_1 \\ x_2 - z_2 \end{bmatrix} = T_1 \xi, \tag{26}$$

于是可得

$$\| \begin{bmatrix} x - z_1 \\ x_2 - z_2 \end{bmatrix} \| \leqslant \frac{\eta_2^*}{\omega_{\mathrm{e}}} + \eta_3^* \mathrm{e}^{-\eta_4^* \omega_e (t-t_0)},\ t \geqslant t_0,$$

其中:

$$\eta_2^* = \mu\left(\omega^*\right) \widetilde{\eta_2^*},\ \eta_3^* = \mu\left(\omega^*\right) \widetilde{\eta_3^*},\ \eta_4^* = \frac{1}{2c_{22}}.$$

定理中的性质(2)得证.

下面在此基础上证定理给出的控制误差的性质(1).

令$\zeta = x - x^*$, 则$\zeta\left(t_0\right) = 0$, 且

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} = \dot{x} - \dot{x}^* = \\ -kx + \frac{k}{\omega_{\mathrm{e}}}\xi_1 + \xi_2 + kx^* = \\ -k\zeta + K_{\mathrm{e}} T_1 \xi,\end{aligned} \tag{27}$$

于是

$$\begin{aligned}\zeta(t) = \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\zeta\left(t_0\right) + \\ \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-k(\tau-t_0)} K_{\mathrm{e}} T_1 \xi(\tau) \mathrm{d}\tau,\ t \geqslant t_0,\end{aligned} \tag{28}$$

则

$$\begin{aligned}|\zeta(t)| \leqslant \|K_e T_1\| \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-k(\tau-t_0)} \|\xi(\tau)\| \mathrm{d}\tau \leqslant \\ \|K_{\mathrm{e}}\| \mu\left(\omega^*\right) (\frac{\tilde{\eta}_2^*}{\omega_{\mathrm{e}}} \frac{1}{k}(1-\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}) + \\ \tilde{\eta}_3^* \frac{1}{k + \dfrac{\omega_{\mathrm{e}}}{2c_{22}}}(1-\mathrm{e}^{-(k+\frac{\omega_{\mathrm{e}}}{2c_{22}})(t-t_0)})) \leqslant \\ \|K_{\mathrm{e}}\| \mu\left(\omega^*\right) (\frac{\tilde{\eta}_2^*}{k\omega_{\mathrm{e}}} + \tilde{\eta}_3^* \frac{2c_{22}}{\omega_{\mathrm{e}}}) \leqslant \frac{\eta_1^*}{\omega_{\mathrm{e}}},\end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$\eta_1^* = \|K_{\mathrm{e}}\| \mu\left(\omega^*\right) (\frac{\tilde{\eta}_2^*}{k} + 2c_{22}\tilde{\eta}_3^*).$$

证毕.

4 小结

本文从进行自抗扰控制稳定性分析时, 如何合理假设“总扰动”的性质出发, 进而讨论了围绕稳定性分析方面的几个思考: 1) 关于总扰动的有界性; 2) 关于ESO带宽的上下限; 3) 关于稳定裕度的分析. 期望能抛砖引玉, 对自抗扰控制稳定性分析研究的进一步发展有所启发和帮助, 如何把自抗扰控制的理论分析进一步落实到能够解释乃至指导工程实践对于有志于从事自抗扰控制理论研究的学者依然是很大的挑战.

致谢

本文完成过程中, 高志强教授、姜甜甜博士、薛文超研究员、王梦洋、张聪玮给出了许多诚恳细致的意见和富有建设性的建议, 在此表示衷心感谢!

参考文献:

[1] XUE W C, HUANG Y. Performance analysis of 2-DOF tracking control for a class of nonlinear uncertain systems with discontinuous disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(4): 1456 – 1473.

[2] JIANG T T, HUANG C D, GUO L. Control of uncertain nonlinear systems based on observers and estimators. *Automatica*, 2015, 59: 35 – 47.

[3] CHEN S, BAI W Y, HU Y, et al. On the conceptualization of total disturbance and its profound implications. *Science China Information Sciences*, 2020, 63(2): 217 – 219.

[4] ZHONG S, HUANG Y, GUO L. A parameter formula connecting PID and ADRC. *Science China Information Sciences*, 2020, 63(9): 175 – 187.

[5] HUANG Yi. Memories of doing ADRC together with Professor Jingqing Han. *WeChat Official Account of ADRC*, 2024, https://mp.weixin.qq.com/s/Co1yNsZtkfjAp3FPmylRDA.
(黄一. 跟着韩老师做自抗扰. 自抗扰控制公众号, 2024, https://mp.weixin.qq.com/s/Co1yNsZtkfjAp3FPmylRDA.)

[6] LI Youshan. *Principles of Automatic Control*. Beijing: National Defense Industry Press, 1980.
(李友善. 自动控制原理. 国防工业出版社, 1980.)

[7] TIAN G, GAO Z Q. Frequency response analysis of active disturbance rejection based control system. *Proceedings of the 16th IEEE international conference on control applications*. Singapore: IEEE, 2007: 1595 – 1599.

[8] XUE, W C, HUANG Y. Performance analysis of active disturbance rejection tracking control for a class of uncertain LTI systems. *ISA Transactions*, 2015, 58: 133 – 154.

[9] ZHONG S, HUANG Y. Quantitative analysis on the phase margin of ADRC. *Control Theory and Technology*, 2023, 21(1): 4 – 15.

[10] ZHAO Y T, HUANG Y, GAO Z Q. On tuning of ADRC with competing design indices: A quantitative study. *Control Theory and Technology*, 2023, 21(1): 16 – 33.

作者简介:

黄　一　研究员, 目前研究方向为不确定系统估计及控制、自抗扰控制的应用及理论分析, E-mail: yhuang@amss.ac.cn.