

非线性波动方程半离散格式的一致指数稳定性

王丽梅¹, 郭宝珠^{1,2†}

(1. 华北电力大学 数理学院, 北京 102206; 2. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100190)

摘要: 本文讨论一维非线性波动方程半离散有限差分格式的一致指数稳定性. 首先, 利用能量乘法证明了偏微分方程描述的连续系统的指数稳定性. 引入辅助变量, 利用降阶法将原系统转化为奇异偏微分方程(PDE)系统; 再用有限差分法对空间变量离散, 在消除引入的辅助变量后, 得到原系统的半离散有限差分格式; 最后, 平行于连续系统, 利用能量乘法证明了离散系统的一致指数稳定性, 并通过数值模拟进行验证.

关键词: 波动方程; 半离散有限差分格式; 能量乘法; 降阶法; 一致指数稳定性

引用格式: 王丽梅, 郭宝珠. 非线性波动方程半离散格式的一致指数稳定性. 控制理论与应用, 2026, 43(3): 449 – 457

DOI: 10.7641/CTA.2024.40160

On uniform exponential stability of semi-discrete scheme for nonlinear wave equation

WANG Li-mei¹, GUO Bao-zhu^{1,2†}

(1. School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China;

2. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China)

Abstract: This paper investigates the uniform exponential stability of semi-discrete finite difference schemes applied to one-dimensional nonlinear wave equations. Firstly, the energy multiplier method is employed to establish the exponential stability of the continuous system governed by the partial differential equation (PDE). This involves introducing auxiliary variables and employing the reduction technique to convert the original system into a singular PDE system. Subsequently, the spatial variable is discretized using the finite difference method, and upon eliminating the auxiliary variables, the semi-discrete finite difference scheme for the original system is derived. Finally, mirroring the approach for the continuous system, the energy multiplier method is utilized to prove the uniform exponential stability of the discrete system, which is further validated through numerical simulations.

Key words: wave equation; semi-discrete finite difference scheme; energy multiplier method; order reduction method; uniform exponential stability

Citation: WANG Limei, GUO Baozhu. On uniform exponential stability of semi-discrete scheme for nonlinear wave equation. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(3): 449 – 457

1 引言

一维波动方程可以用来描述许多重要的物理过程, 如弹性物体电缆的振动、声波的传播等, 是一种描述波动现象的基础模型, 具有非常重要的应用价值和现实意义. 由于波动方程是双曲型系统, 因此, 经常被作为典型的分布参数无限维系统. 这是因为在线性情况下, 有无限多个极点位于虚轴上, 因此, 由波动方程所描述的系统本质是无限维的. 一维波动方程作为一种典型的无限维系统, 其反馈镇定控制是分布参数系统

研究的重点之一. 利用波动方程可以很好地解释许多偏微分系统 (partial differential equations, PDEs) 的控制方法和原理. 线性波动方程已经得到了广泛研究. 经典文献[1]介绍了非线性波动方程解的存在性, 为后续研究不同种类的非线性波动方程奠定了基础. 文献[2]用经典的Faedo-Galerkin方法研究了一类非线性波动方程的局部适定性. 近年来, 对非线性波动方程的研究也取得了一些新的进展. 文献[3–4]分析了非线性波动方程的正则性和收敛性. 文献[5]中研究了一维非

收稿日期: 2024–03–20; 录用日期: 2024–09–25.

†通信作者. E-mail: bzguo@iss.ac.cn; Tel.: +86 10-82541827.

本文责任编辑: 王卓.

国家自然科学基金项目(12131008)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (12131008).

线性波动方程的可控性. 文献[6]研究了一类用于描述声音传播的非线性波动方程的边界可观性.

振动抑制问题的研究是PDEs领域的热点之一, 在众多有关系统振动控制的性质中, 稳定性占据着中心地位. 文献[7]利用Riemann几何方法, 得到了变系数波动方程的边界镇定性. 文献[8]研究了具有非同位边界控制和观测的一维波动方程的强稳定性. 文献[9]研究了具有内时滞的波动方程的边界指数稳定性.

本文考虑非线性一维波动方程

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t) - H(w_x(x, t)), \\ 0 < x < 1, t \geq 0, \\ w(0, t) = 0, w_x(1, t) = -g(w_t(1, t)), \\ w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = w_1(x), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $w(x, t)$ 表示时刻 t 位置 x 的振动位移, w_t 表示 w 对时间 t 的偏导数, w_x 表示对空间变量 x 的偏导数. 其他的高级导数做类似的理解. 非线性函数 $H(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ 和 $g(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ 满足如下假设1:

假设 1 存在常数 $C_i > 0, i = 1, 2$ 使得对任意的 $s \in \mathbb{R}, C_1|s|^2 \leq g(s) \leq C_2|s|^2$.

对任意 $s \in \mathbb{R}, |H(s)| \leq \beta|s|$ 且 $0 < \beta < \min\{\frac{C_1}{M_1}, \frac{1}{4}\}$, 其中 $M_1 = C_2^2 + 1 > 0$.

上述假设1是针对方程中的非线性项 H 和边界非线性反馈 g 的约束条件, 保证了非线性函数 H 和 g 满足线性增长条件. H 和 g 的线性增长确保了系统(1)的解的存在唯一性, 防止出现解的爆破现象.

多维情况下系统(1)强解的存在性和唯一性已在文献[10]的定理3.1中给出. 为了研究其解的稳定性, 学者们提出了不同的方法. 文献[11]认为多维情况下系统(1)是非耗散的, 因而创造性地提出了一个特殊的不等式, 并通过该不等式证明了上述系统的指数稳定性. 然而, 文献[10]提出一种新的方法并证明, 即使方程系数是可变的, 但由方程所描述的多维系统本质上却是耗散的. 这不仅将文献[11]所讨论的非线性波动方程常系数情况推广到变系数, 而且大大简化了文献[11]的证明过程. 更多关于非耗散偏微分方程的稳定性研究, 可以参考文献[12-13]. 本文的重点是: 在空间变量有限差分半离散情况下, 证明系统(1)的一致指数稳定性. 由于柔性结构被广泛应用于机械工程和航空航天等领域, 并且一些柔性结构的振动问题可以转化为对非线性波动方程的研究. 但为了将反馈镇定控制具体应用到工程中, 就需要将无穷维连续系统进行离散化, 得到对无穷维系统有穷维的有效逼近. 只有保持控制特征的一致逼近才有控制的合理性. 本文就讨论非线性一维波动方程半离散格式的一致稳定性. 经典文献[14]提出, 对于指数稳定的偏微分方程, 经典有限差分或有限元半离散格式都不能保证一致指数

稳定性. 主要原因在于, 数值格式中会出现高频伪振荡. 因此, 研究者们提出了许多解决方法. 例如文献[15]提出使用混合有限元法、多网格法、特别是添加数值粘度项来克服高频伪振荡. 其中, 文献[16]针对波动方程应用混合有限元法进行半离散, 验证了此方法的有效性; 文献[17]采用双网格法证明了一维波动方程的一致稳定性; 文献[18]通过加入数值粘度项证明了系统的一致指数衰减性. 此外, 文献[19]还利用高频滤波技术证明了一维波动方程的一致指数稳定性.

除上述提到的方法之外, 文献[20]提出了一种基于降阶方法的自然有限差分格式, 它具有许多显著优点: 1) 保持了有限差分的性质, 而无需人为添加任何数值粘性项; 2) 在半离散过程中保持了一致指数稳定性; 3) 离散系统的证明在许多方面与连续系统的证明是类似的. 然而, 在所有上述文献中系统都是线性的, 而本文第一次讨论非线性系统(1).

本文结构如下: 在第2节中, 证明了连续系统(1)的指数稳定性, 该证明过程对离散系统的一致指数稳定性的证明有平行的启发作用; 在第3节中, 通过引入辅助变量, 将原始系统(1)简化为一个奇异PDE系统, 并得到此系统的半离散格式. 在消除引入的辅助变量后, 推导出了系统(1)的半离散格式. 进而, 证明了系统(1)的半离散格式的一致指数稳定性, 最后, 通过数值模拟验证了结论; 第4节是对全文的总结.

2 连续系统的指数稳定性

尽管多维情况下系统(1)的指数稳定性已经在文献[10]中给出, 但是为了便于下一节证明半离散系统的稳定性, 本文仍旧给出连续系统(1)的一致指数稳定性的证明. 使得能够建立起从连续系统到离散系统一一对应的对应关系, 并且与文献[11]的证明形成鲜明对比.

定义系统(1)的能量函数

$$E(t) = \int_0^1 [w_t^2(x, t) + w_x^2(x, t)] dx. \quad (2)$$

引理 1 能量函数 $E(t)$ 满足

$$\dot{E}(t) = -2 \int_0^1 w_t H(w_x) dx - 2w_t(1, t)g(w_t(1, t)),$$

并且有

$$\dot{E}(t) \leq \beta \int_0^1 [w_t^2(x, t) + w_x^2(x, t)] dx - 2C_1 w_t^2(1, t).$$

证 沿式(1)的解对 $E(t)$ 关于 t 进行求导有

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= 2 \int_0^1 (w_t w_{tt} + w_x w_{xt}) dx = \\ &= 2 \int_0^1 w_t [w_{xx} - H(w_x)] dx + 2 \int_0^1 w_x dw_t = \\ &= -2 \int_0^1 w_t H(w_x) dx + 2w_x(1, t)w_t(1, t) = \\ &= -2 \int_0^1 w_t H(w_x) dx - 2w_t(1, t)g(w_t(1, t)). \end{aligned}$$

再由假设1得到

$$\dot{E}(t) \leq \beta \int_0^1 [w_t^2(x, t) + w_x^2(x, t)] dx - 2C_1 w_t^2(1, t).$$

证毕.

令

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon p(t), \quad p(t) = 2 \int_0^1 x w_x w_t dx, \quad (3)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是一个常数. 下面的引理2表明 $E_\varepsilon(t)$ 和 $E(t)$ 是等价的.

引理2 设 $E_\varepsilon(t)$ 由式(3)定义, 则存在常数 $0 < \varepsilon < 1$, 使得

$$(1 - \varepsilon)E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq (1 + \varepsilon)E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4)$$

证 首先, 注意到

$$|p(t)| = \left| 2 \int_0^1 x w_x w_t dx \right| \leq \int_0^1 (w_x^2 + w_t^2) dx = E(t),$$

因此, 有

$$(1 - \varepsilon)E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq (1 + \varepsilon)E(t), \quad \forall t \geq 0.$$

证毕.

引理3 由式(3)定义的辅助函数 $p(\cdot)$ 满足

$$\dot{p}(t) \leq -\frac{1}{2}E(t) + M_1 w_t^2(1, t),$$

其中 M_1 是由假设1定义的常数.

证 注意到

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= 2 \int_0^1 (x w_{tt} w_x + x w_t w_{xt}) dx = \\ &= 2 \int_0^1 [x w_x (w_{xx} - H(w_x)) + x w_t w_{xt}] dx = \\ &= 2 \int_0^1 x w_t w_{xt} dx - 2 \int_0^1 x w_x H(w_x) dx + \\ &= 2 \int_0^1 x w_x w_{xx} dx \triangleq I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (5)$$

下面分别估计 $I_i, i = 1, 2, 3$. 首先, 由分部积分及假设1, 可以得到

$$\left\{ \begin{aligned} I_1(t) &= 2 \int_0^1 x w_t w_{xt} dx = w_t^2(1, t) - \int_0^1 w_t^2 dx, \\ I_2(t) &= 2 \int_0^1 x w_x w_{xx} dx = \\ &= w_x^2(1, t) - \int_0^1 w_x^2 dx = \\ &= [-g(w_t(1, t))]^2 - \int_0^1 w_x^2 dx \leq \\ &= C_2^2 w_t^2(1, t) - \int_0^1 w_x^2 dx, \\ I_3(t) &\leq 2\beta \int_0^1 w_x^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2 dx, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

最后, 将式(6)代入式(5)化简可以得到

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &\leq (1 + C_2^2) w_t^2(1, t) - \int_0^1 w_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2 dx \leq \\ &= -\frac{1}{2} E(t) + M_1 w_t^2(1, t), \end{aligned}$$

其中 $M_1 = 1 + C_2^2 > 0$. 证毕.

定理1 设 $E(t)$ 由式(2)定义, 则 $E(t)$ 指数衰减

$$E(t) \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} e^{-\frac{C}{1 + \varepsilon} t} E(0), \quad \forall t \geq 0,$$

其中 $C = \frac{\varepsilon}{2} - \beta > 0$.

证 由于 $\dot{E}_\varepsilon(t) = \dot{E}(t) + \varepsilon \dot{p}(t)$, 由引理1和引理3得

$$\begin{aligned} \dot{E}_\varepsilon(t) &\leq \beta \left(\int_0^1 w_t^2 dx + \int_0^1 w_x^2 dx \right) - 2C_1 w_t^2(1, t) + \\ &= \varepsilon [M_1 w_t^2(1, t) - \frac{1}{2} E(t)] = \\ &= -\left(\frac{\varepsilon}{2} - \beta\right) E(t) - [2C_1 - \varepsilon M_1] w_t^2(1, t). \end{aligned}$$

选择 ε 足够小, 使得 $2C_1 - \varepsilon M_1 > 0$, 根据假设1有 $\frac{\varepsilon}{2} - \beta > 0$. 因此, 根据引理2有

$$\dot{E}_\varepsilon(t) \leq -CE(t) \leq -\frac{C}{1 + \varepsilon} E_\varepsilon(t),$$

$$C = \frac{\varepsilon}{2} - \beta > 0.$$

由Gronwall不等式有

$$E_\varepsilon(t) \leq e^{-\frac{C}{1 + \varepsilon} t} E_\varepsilon(0),$$

因此, 由引理2有

$$E(t) \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} e^{-\frac{C}{1 + \varepsilon} t} E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

证毕.

3 半离散格式的一致指数稳定性

在本节, 本文讨论连续系统(1)的半离散格式的一致指数稳定性. 采用降阶有限差分方法, 该方法已在文献[20]中应用于线性PDE系统.

3.1 半离散格式

引入辅助变量

$$u(x, t) = w_x(x, t), \quad v(x, t) = w_t(x, t), \quad (7)$$

则系统(1)变成下述奇异PDE:

$$\left\{ \begin{aligned} u_t(x, t) &= v_x(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0, \\ v_t(x, t) &= u_x(x, t) - H(u(x, t)), \\ v(0, t) &= 0, \\ u(1, t) + g(v(1, t)) &= 0, \\ u(x, 0) &= u^0(x) = w_x^0(x), \\ v(x, 0) &= v^0(x) = w_t^0(x). \end{aligned} \right. \quad (8)$$

首先, 对于固定 $N \in \mathbb{N}^*$, 给出空间区域 $[0, 1]$ 的等距划分为

$$0 = x_0 < \dots < x_i = ih < \dots < x_{N+1} = 1,$$

其中网格大小 $h = \frac{1}{N+1}$. 设 $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})h$ 为区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 的中点, 为了简化, 引入以下符号: 设 $q(x)$ 是一个光滑函数且 $\{q_i\}_{i=0}^{N+1}$ 是 $q(x)$ 在网格节点 $\{x_i\}_{i=0}^{N+1}$ 处的值. 平均算子 $q_{i+\frac{1}{2}}$ 、一阶差分算子 $\delta_x q_{i+\frac{1}{2}}$ 和二阶差分算子 $\delta_x^2 q_i$ 的定义可参考文献[20], 即

$$\begin{aligned} x_{i+\frac{1}{2}} &= x_i + \frac{h}{2}, \\ q_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{q_{i+1} + q_i}{2}, \quad \delta_x q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{q_{i+1} - q_i}{h}, \\ \delta_x^2 q_i &= \frac{\delta_x q_{i+\frac{1}{2}} - \delta_x q_{i-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{h^2}, \\ \delta_x q_{i+\frac{1}{2}} &= q_x(x_{i+\frac{1}{2}}) + o(h^2), \\ \delta_x^2 q_i &= q_{xx}(x_i) + o(h^2). \end{aligned}$$

假设 $v(x, t)$ 和 $u(x, t)$ 是系统(8)的解, 令 $\{W_j(t)\}_j, \{V_j(t)\}_j$ 和 $\{U_j(t)\}_j$ 是网格节点 $\{x_j\}_j$ 处的网格函数, 满足

$$\begin{aligned} W_j(t) &= w(x_j, t), \\ V_j(t) &= v(x_j, t), \\ U_j(t) &= u(x_j, t). \end{aligned}$$

系统(8)的第1个方程在 $(x_{j+\frac{1}{2}}, t)$ 处成立, 即

$$u'(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - v_x(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = 0,$$

其中 $x_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})h$, 符号“ r ”表示对时间 t 的导数. 用差分算子 δ_x 替代微分算子 ∂_x 得到

$$U'_{j+\frac{1}{2}}(t) - \delta_x V_{j+\frac{1}{2}}(t) = \mathcal{O}(h^2). \tag{9}$$

类似地, 对于系统(8)的第2个方程, 有

$$V'_{j+\frac{1}{2}}(t) - \delta_x U_{j+\frac{1}{2}}(t) + H(U_{j+\frac{1}{2}}) = \mathcal{O}(h^2). \tag{10}$$

对于式(7), 有

$$U_{j+\frac{1}{2}}(t) = \delta_x W_{j+\frac{1}{2}}(t) + \mathcal{O}(h^2), \tag{11}$$

$$V_{j+\frac{1}{2}}(t) = W'_{j+\frac{1}{2}}(t) + \mathcal{O}(h^2). \tag{12}$$

去掉式(9)–(12)中的无穷小项, 并且分别用 $w_j(t), u_j(t)$ 和 $v_j(t)$ 代替 $W_j(t), U_j(t)$ 和 $V_j(t)$, 本文得到系统(8)的半离散有限差分格式如下:

$$\begin{cases} u'_{j+\frac{1}{2}}(t) - \delta_x v_{j+\frac{1}{2}}(t) = 0, \\ v'_{j+\frac{1}{2}}(t) = \delta_x u_{j+\frac{1}{2}}(t) - H(u_{j+\frac{1}{2}}(t)), \\ v_0(t) = 0, \quad u_{N+1}(t) + g(v_{N+1}(t)) = 0, \\ u_j(0) = u_j^0, \quad v_j(0) = v_j^0, \\ u_{j+\frac{1}{2}}(t) = \delta_x w_{j+\frac{1}{2}}(t), \\ v_{j+\frac{1}{2}}(t) = w'_{j+\frac{1}{2}}(t), \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \tag{13}$$

由于 u_j 和 v_j 是被额外引入的, 下面消去这些变量, 以得到原始系统(1)的半离散差分格式. 为此, 在式(13)

的第2个方程左右两边同乘 $\frac{h}{2}$ 有

$$\frac{h}{2} v'_{j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{j+1} - u_j}{2} - \frac{h}{2} H(u_{j+\frac{1}{2}}). \tag{14}$$

由式(13)的后两个等式可知

$$\begin{cases} u_{j+1} = u_{j+\frac{1}{2}} + \frac{u_{j+1} - u_j}{2} = \\ \delta_x w_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} w''_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}}), \\ u_j = \delta_x w_{j+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} w''_{j+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

因此有

$$0 = \frac{h}{2} w''_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} w''_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})] - \delta_x w_{j+\frac{1}{2}} + \delta_x w_{j-\frac{1}{2}}.$$

令 $j = N$ 有

$$u_{N+1} = \delta_x w_{N+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} w''_{N+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} H(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}}).$$

结合式(13)的第3个等式有

$$0 = \frac{h}{4} (w''_N + w''_{N+1}) + \delta_x w_{N+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} H(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}}) + g(w'_{N+1}).$$

最终得到原系统(1)的半离散格式如下:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} (w''_{j-1} + 2w''_j + w''_{j+1}) - \delta_x^2 w_j + \\ \frac{1}{2} [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})] = 0, \quad 1 \leq j \leq N, \\ \frac{h}{4} (w''_N + w''_{N+1}) + \delta_x w_{N+\frac{1}{2}} + \\ \frac{h}{2} H(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}}) + g(w'_{N+1}) = 0, \\ w_0(t) = 0, \quad w_j(0) = w^0(x_j), \\ w'_j(0) = w^1(x_j), \quad j = 0, \dots, N+1. \end{cases} \tag{15}$$

3.2 半离散格式的一致指数稳定性

在本小节中, 给出半离散格式(15)的一致指数稳定性证明. 定义系统(15)的能量为

$$E_h(t) = h \sum_{j=0}^N [|\frac{w'_{j+1} + w'_j}{2}|^2 + |\frac{w_{j+1} - w_j}{h}|^2], \tag{16}$$

它实际上是(2)中定义的连续能量 $E(t)$ 的离散化. 下面的引理4与引理1平行.

引理 4 由式(16)定义的离散能量 $E_h(t)$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{E}_h(t) &= -2g(w'_{N+1})w'_{N+1} - \\ &2h \sum_{j=0}^N H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})w'_{j+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{17}$$

由假设1可知

$$\dot{E}_h(t) \leq \beta h \left[\sum_{j=0}^N (\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})^2 + \sum_{j=0}^N (w'_{j+\frac{1}{2}})^2 \right] - 2C_1 |w'_{N+1}|^2. \quad (18)$$

证 在式(15)的第1个等式左右两边同乘 hw'_j , 并对 j 从1到 N 求和

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{h}{4} \sum_{j=1}^N (w''_{j-1} + 2w''_j + w''_{j+1})w'_j + \\ &\quad \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})]w'_j - \\ &\quad h \sum_{j=1}^N \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} w'_j \triangleq \\ &\quad L_1 + L_2 + L_3. \end{aligned} \quad (19)$$

下面估计上述定义的每一项 $L_i, i = 1, 2, 3$. 对于第1项 L_1 , 有

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{h}{4} \sum_{j=1}^N (w''_{j-1} + 2w''_j + w''_{j+1})w'_j = \\ &\quad \frac{h}{4} \sum_{j=0}^N (w''_j + w''_{j+1})w'_j + \\ &\quad \frac{h}{4} \sum_{j=0}^{N-1} (w''_j + w''_{j+1})w'_{j+1} = \\ &\quad \frac{h}{4} \sum_{j=0}^N (w''_j + w''_{j+1})(w'_j + w'_{j+1}) - \\ &\quad \frac{h}{4} (w''_N + w''_{N+1})w'_{N+1}. \end{aligned} \quad (20)$$

同理, 对于第2项 L_2 和第3项 L_3 , 有

$$\left\{ \begin{aligned} L_2 &= \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})]w'_j = \\ &\quad \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})w'_j + \\ &\quad \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})w'_{j+1} = \\ &\quad h \sum_{j=0}^N H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})w'_{j+\frac{1}{2}} - \\ &\quad \frac{h}{2} H(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}})w'_{N+1}, \\ L_3 &= -h \sum_{j=1}^N \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} w'_j = \\ &\quad -\frac{1}{h} \sum_{j=0}^N (w_{j+1} - w_j)(w'_j - w'_{j+1}) - \\ &\quad \frac{1}{h} (w_{N+1} - w_N)w'_{N+1}. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

在式(15)的第2个等式左右两边同乘 w'_{N+1} 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{h}{4} (w''_N + w''_{N+1})w'_{N+1} + \delta_x w_{N+\frac{1}{2}} w'_{N+1} + \\ &\quad \frac{h}{2} H(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}})w'_{N+1} + g(w'_{N+1})w'_{N+1}. \end{aligned} \quad (22)$$

将式(20)–(21)中 L_3 代入式(19)得到

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{h}{4} \sum_{j=0}^N (w''_j + w''_{j+1})(w'_j + w'_{j+1}) + \\ &\quad \frac{1}{h} \sum_{j=0}^N (w_{j+1} - w_j)(w'_{j+1} - w'_j) - \\ &\quad \frac{h}{4} (w''_N + w''_{N+1})w'_{N+1} - \\ &\quad \frac{1}{h} (w_{N+1} - w_N)w'_{N+1} + \\ &\quad \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})]w'_j. \end{aligned} \quad (23)$$

此外, 由式(22)–(23), 有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{h}{4} \sum_{j=0}^N (w''_j + w''_{j+1})(w'_j + w'_{j+1}) + \\ &\quad \frac{1}{h} \sum_{j=0}^N (w_{j+1} - w_j)(w'_{j+1} - w'_j) + \\ &\quad \frac{h}{2} H(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}})w'_{N+1} + g(w'_{N+1})w'_{N+1} + \\ &\quad \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})]w'_j, \end{aligned} \quad (24)$$

将式(21)中 L_2 代入式(24)得到

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{h}{4} \sum_{j=0}^N (w''_j + w''_{j+1})(w'_j + w'_{j+1}) + \\ &\quad \frac{1}{h} \sum_{j=0}^N (w_{j+1} - w_j)(w'_{j+1} - w'_j) + \\ &\quad h \sum_{j=0}^N H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})w'_{j+\frac{1}{2}} + g(w'_{N+1})w'_{N+1}, \end{aligned} \quad (25)$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{E}_h(t) &= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N (w''_j + w''_{j+1})(w'_j + w'_{j+1}) + \\ &\quad \frac{2}{h} \sum_{j=0}^N (w_{j+1} - w_j)(w'_{j+1} - w'_j) = \\ &\quad -2h \sum_{j=0}^N H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})w'_{j+\frac{1}{2}} - \\ &\quad 2g(w'_{N+1})w'_{N+1}. \end{aligned} \quad (26)$$

证毕.

与式(3)相同, 为离散格式(15)构造Lyapunov函数 $L_h(t)$ 为

$$L_h(t) = E_h(t) + \varepsilon \psi_h(t), \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \psi_h(t) &= \\ &2h \sum_{j=1}^N \frac{w'_{j+1} + 2w'_j + w'_{j-1}}{4} j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2} + \\ &\frac{1}{2} (w'_N + w'_{N+1})(w_{N+1} - w_N). \end{aligned} \quad (28)$$

下述引理5是引理2的离散对应.

引理5 令 $0 < \varepsilon < 1$, 则由式(27)定义的Lyapunov函数 $L_h(t)$ 满足

$$(1 - \varepsilon)E_h(t) \leq L_h(t) \leq (1 + \varepsilon)E_h(t). \quad (29)$$

证 根据式(28)的定义

$$\begin{aligned} |\psi_h(t)| = & \left| 2h \sum_{j=1}^N \frac{w'_{j+1} + 2w'_j + w'_{j-1}}{4} j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2}(w'_N + w'_{N+1})(w_{N+1} - w_N) \right| \leq \\ & h \sum_{j=1}^N \left(\frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} \right)^2 + \\ & h \sum_{j=1}^N \left(\frac{w'_{j+1} + 2w'_j + w'_{j-1}}{4} \right)^2 + \\ & \frac{h}{2} \left(\frac{w_{N+1} - w_N}{h} \right)^2 + \frac{h}{2} \left(\frac{w'_{N+1} + w'_N}{2} \right)^2 \leq \\ & \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} \right)^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{w_j - w_{j-1}}{h} \right)^2 + \\ & \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{w'_{j+1} + w'_j}{2} \right)^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{w'_j + w'_{j-1}}{2} \right)^2 + \\ & \frac{h}{2} \left(\frac{w_{N+1} - w_N}{h} \right)^2 + \frac{h}{2} \left(\frac{w'_{N+1} + w'_N}{2} \right)^2 \leq \\ & h \sum_{j=0}^N \left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} \right)^2 + h \sum_{j=0}^N \left(\frac{w'_{j+1} + w'_j}{2} \right)^2 = \\ & E_h(t), \end{aligned}$$

因此,

$$-E_h(t) \leq \psi_h(t) \leq E_h(t),$$

从而有

$$(1 - \varepsilon)E_h(t) \leq L_h(t) \leq (1 + \varepsilon)E_h(t).$$

证毕.

下面的引理6是引理3的离散对应.

引理6 由式(28)定义的辅助函数 $\psi_h(t)$ 满足

$$\frac{d\psi_h(t)}{dt} \leq -\frac{1}{2}E_h(t) + M_1|w'_{N+1}|^2, \quad (30)$$

其中 M_1 由假设1定义.

证 注意到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\psi_h(t)}{dt} = & h \sum_{j=1}^N \frac{w'_{j+1} + 2w'_j + w'_{j-1}}{4} j \frac{w'_{j+1} - w'_{j-1}}{2} + \\ & \frac{1}{4}(w'_N + w'_{N+1})(w'_{N+1} - w'_N) + \\ & h \sum_{j=1}^N \frac{w''_{j+1} + 2w''_j + w''_{j-1}}{4} j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(w''_N + w''_{N+1})(w_{N+1} - w_N) \triangleq \\ & I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (31)$$

下面估计由式(31)定义的所有项 $I_i, i = 1, 2, 3, 4$.

对于 I_1 , 有

$$\begin{aligned} I_1 = & h \sum_{j=1}^N \frac{w'_{j+1} + 2w'_j + w'_{j-1}}{4} j \frac{w'_{j+1} - w'_{j-1}}{2} = \\ & \frac{h}{8} \sum_{j=1}^N j [(w'_{j+1} + w'_j)^2 - (w'_j + w'_{j-1})^2] = \\ & \frac{h}{8} \sum_{j=0}^N j (w'_{j+1} + w'_j)^2 - \\ & \frac{h}{8} \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) (w'_{j+1} + w'_j)^2 = \\ & -\frac{h}{2} \sum_{j=0}^N \left(\frac{w'_{j+1} + w'_j}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} (w'_{N+1} + w'_N)^2. \end{aligned} \quad (32)$$

对于 I_3 , 由式(15), 有

$$\begin{aligned} I_3 = & h \sum_{j=1}^N \frac{w''_{j+1} + 2w''_j + w''_{j-1}}{4} j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2} = \\ & h \sum_{j=1}^N \left\{ \delta_x^2 w_j - \frac{1}{2} [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + \right. \\ & \left. H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})] \right\} j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2} = \\ & \frac{1}{2h} \sum_{j=1}^N j (w_{j+1} - w_{j-1}) (w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}) - \\ & \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})] j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2}. \end{aligned} \quad (33)$$

又

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h} \sum_{j=1}^N j (w_{j+1} - w_{j-1}) (w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}) = \\ & \frac{1}{2h} \sum_{j=1}^N j (w_{j+1} - w_j)^2 - \frac{1}{2h} \sum_{j=1}^N j (w_j - w_{j-1})^2 = \\ & -\frac{h}{2} \sum_{j=0}^N \left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_{N+1} - w_N}{h} \right)^2, \end{aligned} \quad (34)$$

将式(34)代入式(33)得到

$$\begin{aligned} I_3 = & -\frac{h}{2} \sum_{j=0}^N \left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_{N+1} - w_N}{h} \right)^2 - \\ & \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})] j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2}. \end{aligned} \quad (35)$$

对于 I_4 , 由于式(15), 有

$$\begin{aligned}
 I_4 = & \frac{1}{4}(w''_N + w''_{N+1})(w_{N+1} - w_N) = \\
 & (w_{N+1} - w_N)(-\frac{1}{h})(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}} + \\
 & \frac{h}{2}H(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}}) + g(w'_{N+1})) = \\
 & -(\frac{w_{N+1} - w_N}{h})^2 - \frac{1}{2}H(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}}) \times \\
 & (w_{N+1} - w_N) - \frac{1}{h}g(w'_{N+1})(w_{N+1} - w_N). \quad (36)
 \end{aligned}$$

将式(32)(35)–(36)代入到式(31)得到

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d\psi_h(t)}{dt} = & -\frac{h}{2} \sum_{j=0}^N (\frac{w'_{j+1} + w'_j}{2})^2 + \\
 & \frac{1}{8}(w'_{N+1} + w'_N)^2 + \frac{1}{4}[(w'_{N+1})^2 - (w'_N)^2] - \\
 & \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N (\frac{w_{j+1} - w_j}{h})^2 + \frac{1}{2}(\frac{w_{N+1} - w_N}{h})^2 - \\
 & \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})]j \times \\
 & \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2} - (\frac{w_{N+1} - w_N}{h})^2 - \\
 & \frac{1}{2}H(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}})(w_{N+1} - w_N) - \\
 & \frac{1}{h}g(w'_{N+1})(w_{N+1} - w_N). \quad (37)
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8}(w'_{N+1} + w'_N)^2 + \frac{1}{4}[(w'_{N+1})^2 - (w'_N)^2] = & \\
 \frac{1}{8}[3(w'_{N+1})^2 + 2w'_{N+1}w'_N - (w'_N)^2] \leq & \\
 \frac{1}{2}|w'_{N+1}|^2, &
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d\psi_h(t)}{dt} \leq & -\frac{1}{2}(\frac{w_{N+1} - w_N}{h})^2 - \frac{1}{h}g(w'_{N+1}) \times \\
 & (w_{N+1} - w_N) - \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + \\
 & H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})]j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2} - \\
 & \frac{1}{2}H(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}})(w_{N+1} - w_N) - \\
 & \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N (\frac{w'_{j+1} + w'_j}{2})^2 + \frac{1}{2}|w'_{N+1}|^2 - \\
 & \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N (\frac{w_{j+1} - w_j}{h})^2 \triangleq J_1 + J_2 + J_3, \quad (38)
 \end{aligned}$$

现在估计每一项 $J_i, i=1, 2, 3$. 对于 J_1 , 根据假设 1

有

$$\begin{aligned}
 J_1 = & -\frac{1}{2}(\frac{w_{N+1} - w_N}{h})^2 - \\
 & g(w'_{N+1})\frac{w_{N+1} - w_N}{h} \leq \\
 & -\frac{1}{2}(-g(w'_{N+1}))^2 + (g(w'_{N+1}))^2 = \\
 & \frac{1}{2}(g(w'_{N+1}))^2 \leq \frac{C_2^2}{2}|w'_{N+1}|^2. \quad (39)
 \end{aligned}$$

对于 J_2 , 由假设 1, 有

$$\begin{aligned}
 J_2 = & -\frac{h}{2} \sum_{j=1}^N [H(\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}) + \\
 & H(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}})]j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2} - \\
 & \frac{1}{2}H(\delta_x w_{N+\frac{1}{2}})(w_{N+1} - w_N) \leq \\
 & \frac{\beta h}{2} \sum_{j=1}^N (|\delta_x w_{j-\frac{1}{2}}| + \\
 & |\delta_x w_{j+\frac{1}{2}}|)j \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2} + \\
 & \frac{\beta}{2}|\delta_x w_{N+\frac{1}{2}}|(w_{N+1} - w_N) = \\
 & \frac{\beta}{4} \sum_{j=1}^N (|w_{j+1} - w_j| + \\
 & |w_j - w_{j-1}|)j(w_{j+1} - w_{j-1}) + \\
 & \frac{\beta}{2h}|w_{N+1} - w_N|(w_{N+1} - w_N) \leq \\
 & \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^N j(|w_{j+1} - w_j|^2 + |w_j - w_{j-1}|^2) + \\
 & \frac{\beta h}{2}|\delta_x w_{N+\frac{1}{2}}|^2 = \\
 & \frac{\beta}{2} \sum_{j=0}^N (2j+1)|w_{j+1} - w_j|^2 \leq \\
 & \beta h \sum_{j=0}^N |\delta_x w_{j+\frac{1}{2}}|^2 \leq \frac{h}{4} \sum_{j=0}^N |\delta_x w_{j+\frac{1}{2}}|^2. \quad (40)
 \end{aligned}$$

将(39)–(40)代入到式(38), 化简可得

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi_h(t)}{dt} \leq & -h \sum_{j=0}^N (\frac{w'_{j+1} + w'_j}{2})^2 + \\
 & (1 + C_2^2)|w'_{N+1}|^2 - \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N (\frac{w_{j+1} - w_j}{h})^2 \leq \\
 & -\frac{1}{2}E_h(t) + M_1|w'_{N+1}|^2. \quad (41)
 \end{aligned}$$

根据假设 1, $M_1 = 1 + C_2^2 > 0$. 证毕.

定理 2 半离散格式(15)一致指数衰减

$$E_h(t) \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} e^{-\frac{c}{1+\varepsilon}t} E_h(0), \quad \forall t \geq 0,$$

其中 $C = \frac{\varepsilon}{2} - \beta > 0$.

证 根据引理4和引理6, 有

$$\begin{aligned} \dot{L}_h(t) &= \dot{E}_h(t) + \varepsilon \psi'_h(t) \leq \\ &\beta h \sum_{j=0}^N \left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h}\right)^2 + \\ &\beta h \sum_{j=0}^N \left(\frac{w'_{j+1} + w'_j}{2}\right)^2 - 2C_1 |w'_{N+1}|^2 + \\ &\varepsilon [M_1 |w'_{N+1}|^2 - \frac{1}{2} E_h(t)] = \\ &-\left(\frac{\varepsilon}{2} - \beta\right) E_h(t) - (2C_1 - \varepsilon M_1) |w'_{N+1}|^2. \end{aligned}$$

选择 $\varepsilon > 0$ 足够小, 使得 $2C_1 - \varepsilon M_1 > 0$, 并且根据假设1有 $\frac{\varepsilon}{2} - \beta > 0$. 因此, 由引理5可知

$$\dot{L}_h(t) \leq -C E_h(t) \leq \frac{-C}{1 + \varepsilon} L_h(t), \quad C = \frac{\varepsilon}{2} - \beta > 0.$$

根据 Gronwall 不等式可得

$$L_h(t) \leq e^{-\frac{Ct}{1+\varepsilon}} L_h(0),$$

由引理5, 最终得到

$$E_h(t) \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} e^{-\frac{Ct}{1+\varepsilon}} E_h(0).$$

证毕.

3.3 数值模拟

在本小节中, 通过数值实验进一步验证有限差分半离散格式(15)的一致指数稳定性结论. 由于易证半离散系统(15)和(13)是等价的, 因此, 只需验证系统(13)的一致指数稳定性. 首先, 给出满足假设1条件的一个线性函数 g_1 和两个非线性函数 g_2, g_3 , 以及非线性项 H :

$$\begin{cases} g_1(s) = 2.5s, & g_2(s) = 3s + \sin \frac{\pi s}{2}, \\ g_3(s) = 2s + \ln(1 + s^4), & H(s) = 0.005 \sin s, \end{cases} \quad (42)$$

从图1可以看出, 上述的4个函数 g_1, g_2, g_3 , 和 H 满足假设1的条件, 其中: $\beta = 0.005, C_1 = 0.5, C_2 = 7$. 为了通过数值模拟验证离散能量的一致指数衰减性, 在数值实验中取初值如下:

$$\begin{cases} u^0(x) = \sin(3x) + x^2, \\ v^0(x) = \sin x^2 + x^2 + 2x. \end{cases} \quad (43)$$

图2展示了当空间节点个数 $N = 20$, 迭代参数 $\Theta = 0.8$ 时, 系统(13)的离散能量

$$F_h(t) = h \sum_{j=0}^N (u_{j+\frac{1}{2}}^2 + v_{j+\frac{1}{2}}^2), \quad (44)$$

在3个边界控制条件和一个方程非线性项(42)下的一致指数衰减性, 这与在定理2中得到的理论结果是一致的.

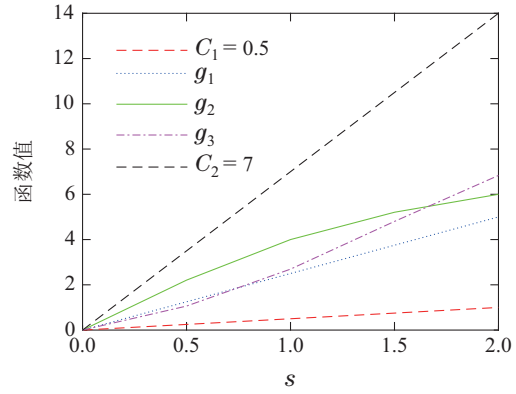


图1 边界反馈控制

Fig. 1 Boundary feedback control

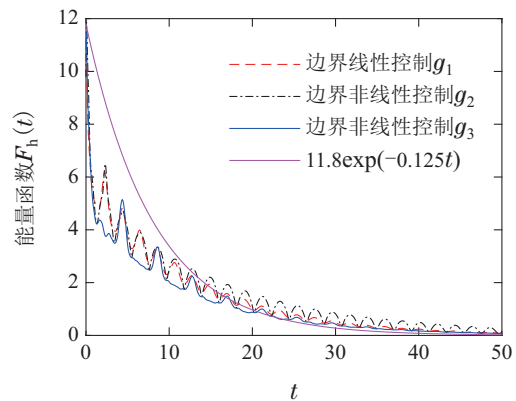


图2 能量衰减速率

Fig. 2 Energy decay rate

4 结论

本文证明了一类非线性波动方程的半离散格式在边界非线性反馈控制下的一致指数稳定性. 首先, 利用能量乘法, 证明了由非线性波动方程描述连续系统的指数稳定性; 其次, 针对如何将上述连续系统离散的问题, 采用降阶法克服了人为构造数值粘性项的困难, 将原系统转化为带有辅助变量的奇异PDE系统. 利用有限差分法对奇异系统进行有限差分的空间变量离散化. 在消除辅助变量后, 得到了原始系统的半离散有限差分格式. 该方法也可以用于构造其他类型非线性偏微分系统的离散格式. 再次利用能量乘法, 得到了半离散系统的一致指数稳定性, 并通过数值模拟验证了稳定性结论. 本文的结果表明, 这样的有穷维离散格式保留了原无穷维系统最重要的物理特性. 为以后对其他类型的非线性系统的研究提供了更多思路. 因为本文主要关注控制性质在离散过程中的保持特性, 没有讨论离散格式的解的收敛性. 离散格式的收敛性自然是一个重要的数学问题, 留待后续的研究.

参考文献:

[1] NAKAO M. Remarks on the existence and uniqueness of global decaying solutions of the nonlinear dissipative wave equations. *Mathe-*

- matische Zeitschrift*, 1991, 206(2): 265 – 276.
- [2] DING H, ZHOU J. Well-posedness of solutions for a class of quasi-linear wave equations with strong damping and logarithmic nonlinearity. *Studies in Applied Mathematics*, 2022, 149(2): 441 – 486.
- [3] CHEN G, SHEN Y N. Existence and regularity of solutions in nonlinear wave equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2015, 35(8): 3327 – 3342.
- [4] DU Y, ZHANG L, ZHANG Z M. Convergence analysis of a discontinuous Galerkin method for wave equations in second-order form. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2019, 57(1): 238 – 265.
- [5] WU J Q, ZHU X Z, CHAI S G. Controllability for one-dimensional nonlinear wave equations with degenerate damping. *Systems & Control Letters*, 2016, 100(2): 66 – 72.
- [6] KALTENBACHER B. Boundary observability and stabilization for Westervelt type wave equations without interior damping. *Applied Mathematics & Optimization*, 2010, 62(3): 381 – 410.
- [7] CHAI S G, GUO Y X. Boundary stabilization of wave equations with variable coefficients and memory. *Differential and Integral Equations*, 2004, 17(5/6): 669 – 680.
- [8] GUO B Z, GUO W. The strong stabilization of a one-dimensional wave equation by non-collocated dynamic boundary feedback control. *Automatica*, 2009, 45(3): 790 – 797.
- [9] AMMARI K, NICAISE S, PIGNOTTI C. Feedback boundary stabilization of wave equations with interior delay. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(10): 623 – 628.
- [10] GUO B Z, SHAO Z C. On exponential stability of a semilinear wave equation with variable coefficients under the nonlinear boundary feedback. *Nonlinear Analysis*, 2009, 71(12): 5961 – 5978.
- [11] GUESMIA A. A new approach of stabilization of nondissipative distributed systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2003, 42(1): 24 – 52.
- [12] GUO B Z, XU C Z. The stabilization of a one-dimensional wave equation by boundary feedback with noncollocated observation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(2): 371 – 377.
- [13] LIU K S, LIU Z Y, RAO B P. Exponential stability of an abstract nondissipative linear system. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001, 40(1): 149 – 165.
- [14] BANKS H T, ITO K, WANG C. Exponentially stable approximations of weakly damped wave equations. *The International Series of Numerical Mathematics*. Basel: Birkhäuser, 1991, 100: 1 – 33.
- [15] ZUAZUA E. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Review*, 2005, 47(2): 197 – 243.
- [16] CASTRO C, MICU S. Boundary controllability of a linear semidiscrete 1-D wave equation derived from a mixed finite element method. *Numerische Mathematik*, 2006, 102(3): 413 – 462.
- [17] LORETI P, MEHRENBARGER M. An ingham type proof for a two-grid observability theorem. *ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations*, 2008, 14(3): 604 – 631.
- [18] MICU S. Uniform boundary controllability of a semidiscrete 1-D wave equation with vanishing viscosity. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 47(6): 2857 – 2885.
- [19] BOUJAOUI H EI, BOUSLOUS H, MANIAR L. Boundary stabilization for 1-D semi-discrete wave equation by filtering technique. *Bulletin. Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics*, 2013, 17(1): 1 – 18.
- [20] LIU J K, GUO B Z. A new semidiscretized order reduction finite difference scheme for uniform approximation of one-dimensional wave equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2020, 58(4): 2256 – 2287.

作者简介:

王丽梅 硕士研究生, 目前研究方向为非线性波动方程的稳定性、分布参数系统控制理论, E-mail: 1768224182@qq.com;

郭宝珠 教授, 中国科学院数学与系统科学研究院研究员, 目前研究方向为分布参数系统控制理论、无穷维系统理论、偏微分方程控制、最优控制数值算法, E-mail: bzguo@iss.ac.cn.