

分数阶时滞锥不变系统的稳定性和增益性能

邱宏凌, 沈俊[†]

(南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 211106)

摘要: 本文主要分析具有锥不变性和无界时滞的分数阶线性系统的稳定性和输入输出增益. 这类系统的轨迹通常被限制在一个正则锥里面, 是分数阶时滞正系统的一种推广形式. 首先, 利用系统状态方程的解的轨迹, 一个保证其锥不变性的充要条件被给出. 根据正则锥上的偏序关系, 给出了保证分数阶锥不变时滞系统的稳定性的充要条件. 该方法同样适用于系统在无时滞下的情形, 这意味着分数阶时滞锥不变系统的稳定性对时滞的大小不敏感; 此外, 通过取整函数来构造一个采样系统并分析其状态轨迹与无时滞副本系统的状态轨迹偏序关系, 从而以系统矩阵的形式给出分数阶输入输出锥不变系统的锥诱导增益的刻画; 最后, 提供一个数值例子来说明理论结果.

关键词: 分数阶正系统; 锥不变性; 锥诱导增益; 无界时滞

引用格式: 邱宏凌, 沈俊. 分数阶时滞锥不变系统的稳定性和增益性能. 控制理论与应用, 2026, 43(3): 469–477

DOI: 10.7641/CTA.2024.40177

Stability and gain performance of fractional-order delayed cone-invariant systems

QIU Hong-ling, SHEN Jun[†]

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 211106, China)

Abstract: This paper mainly studies the stability and input-output gain of fractional-order linear systems with cone invariance and unbounded time-varying delays. The trajectories of such systems are usually restricted in a proper cone, which is a generalization of fractional-order delayed positive systems. Firstly, using the trajectory of the solution of the system state equation, a necessary and sufficient condition that ensures the cone invariance of the system is given. According to the partial order relationship on a proper cone, a necessary and sufficient condition that ensures the asymptotic stability of fractional-order cone-invariant delayed system is given. The method is also applicable to the case when the system without delays, which means that the stability of fractional-order cone-invariant systems is not sensitive to the size of delays. Moreover, through the construction of a sampling system using rounding functions and the analysis of the partial order relationship between state trajectories of the sampling system and their corresponding counterparts without delays, the cone-induced gain of fractional-order cone-invariant systems is characterized in terms of system matrices. Finally, a numerical example is provided to illustrate the theoretical results.

Key words: fractional-order positive system; cone invariance; cone-induced gain; unbounded delays

Citation: QIU Hongling, SHEN Jun. Stability and gain performance of fractional-order delayed cone-invariant systems. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(3): 469–477

1 引言

锥不变系统是一组状态轨迹被限制在一个正则锥体内的动力系统, 近年来引起了学者们的广泛关注. 此类系统在多智能体系统会合^[1]和化学反应网络^[2]中具有广泛的应用. 此外, 文献[3]中指出几何布朗运动的二阶矩动力学可以转化为定义由在全正半定矩阵

组成的锥集上的矩阵微分系统. 需要特别指出的是, 正系统是一种特殊类型的锥不变系统, 其不变锥集是整个非负象限. 正系统通常被用于模拟涉及非负量的物理系统, 例如房室系统和电路系统^[4–6].

一方面, 稳定性分析是研究锥不变系统动力学行为的基本问题. 然而, 对于大多数实际的物理系统而

收稿日期: 2024–03–28; 录用日期: 2024–11–20.

[†]通信作者. E-mail: junshen2009@gmail.com; Tel.: +86 15850697318.

本文责任编辑: 王孝洪.

国家自然科学基金项目(61973156), 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX24.0593)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61973156) and the Postgraduate Research & Practice Innovation Program of Jiangsu Province (KYCX24.0593).

言,其状态的演化不仅受到当前时刻的影响,还受到过去时刻的影响,从而产生时滞现象.作为锥不变时滞系统的典型特例,正时滞系统的稳定性分析已经取得了大量的成果.在文献[7]中,Liu等人发现线性正时滞系统可以实现稳定性,当且仅当系统矩阵之和为Hurwitz矩阵.对于离散时间线性正时滞系统,文献[8]证明系统可以实现稳定性当且仅当系统矩阵之和为Schur矩阵.需要特别注意的是,由于系统的正性,线性正时滞系统的稳定性不受有界时间时滞大小的影响.随后,许多针对不同类型的线性正时滞系统的稳定性分析的结果被相继报道,例如微分-差分耦合系统、奇异系统、切换系统、分数阶系统和受控系统^[9-14].然而,需要指出的是,这些结果都只考虑了有界时滞的情况.相反,本文致力于研究无界时滞下锥不变系统的稳定性分析问题.

事实上,分数阶微积分已被广泛用于描述生物系统和电路系统.特别是在电路系统领域,当电流方向保持一致时,许多经典线性电路系统在文献[15]中被建模为分数阶正系统.考虑到电路系统中电容、电感和晶体管等电路元件的响应时间,电流信号在传输过程中会产生延迟现象.因此,分析电流方向恒定且具有电流信号延迟现象的电路系统的稳定性,可以归结为分析分数阶时滞正系统的稳定性.而分数阶时滞正系统又是分数阶时滞锥不变系统的一个典型特例.然而,目前关于分数阶时滞锥不变系统(包括分数阶时滞正系统)的稳定性成果还很少.在文献[16]中,一种分数阶积分型Lyapunov-Krasovskii函数被提出,用来分析具有常时滞的分数阶正系统的稳定性.针对变时滞情形,在文献[17]中,Shen等人指出在相同初值下,具有变时滞的分数阶系统的轨迹与其具有常时滞(该时滞为变时滞的上界)的副本系统的轨迹的偏序关系始终保持不变,并进一步提出了实现系统稳定性的充要条件.然而,需要注意的是上述两种方法只适用于有界时滞的情形.针对具有无界时滞的锥不变系统,如何设计用来比较的副本系统是分析其稳定性的关键.

另一方面,控制系统的输入输出增益决定了系统对输入信号的放大或缩小程度,从而影响系统的响应特性.特别是在电路系统中,输入信号的幅度可能很小,需要通过放大器电路进行放大以便进一步处理或传输,而研究输入输出增益有助于设计合适的放大器电路.对于一般的线性系统,通常使用 L_2 增益来衡量系统的性能指标^[18-19].而对于正系统而言,使用的是更多的 L_1 和 L_∞ 增益,并且当系统是线性时,其 L_1 增益就是其对偶系统的 L_∞ 增益^[20].文献[21]指出具有常时滞的正系统的加权 L_∞ 增益与其时滞大小无关.需要注意的是, ∞ -范数也可以是被视为由定义在非负象限上的偏序关系而导出的范数.从这个观点出发,

本文致力于由利用定义在一般正则锥上的偏序关系而衍生的锥诱导范数来刻画锥不变系统的输入输出增益.

基于上述讨论,本文研究了具有无界时滞的分数阶锥不变系统的稳定性和输入输出增益问题.首先,利用Mittag-Leffler函数的非负性质,得出实现系统的锥不变性的充要条件;其次,借助数学归纳法和比较原则,得出实现系统稳定性的充要条件,这两种方法同样适用于无时滞或有界时滞的情形,这说明分数阶系统的锥不变性和稳定性与时滞的大小无关;最后,利用取整函数构造了一个采样系统,并揭露了分数阶锥不变时滞系统与其对应的采样系统和无时滞副本系统三者轨迹之间的偏序关系,从而,以系统矩阵的形式给出其输入输出增益的精确刻画.

2 预备知识

首先,需要引入一些符号定义. \mathbb{R}^n 代表 n 维实向量空间, \mathbb{R}_+^n 代表 n 维非负实向量空间, $\mathbb{R}^{n \times m}$ 代表 $n \times m$ 维实矩阵空间, \mathbb{R}_+ 代表非负实数空间, $\mathbf{1}_n$ 是 n 维元素全为1的向量, I_n 为 n 维单位矩阵, $\lfloor \cdot \rfloor$ 为取整算子, $L^\infty([a, b]; \mathbb{R}^n) \triangleq \{ \mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \text{ess sup}_{t \geq 0} \mathbf{f}(t) < \infty \}$ 表示本性有界的 n 维向量函数空间.给定一个集合 $K \in \mathbb{R}^n$,令 $\text{int}K$ 和 ∂K 分别为 K 的内部和边界, K^G 代表 K 的所有元素的非负线性组合,且当 $K = K^G$, K 可以称为一个锥.定义 $K^* \triangleq \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T \mathbf{y} \geq 0, \mathbf{y} \in K \}$ 为 K 的对偶锥.给定一个矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,定义 $AK \triangleq \{ A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in K \}$.当 $K \cap -K = \{ \mathbf{0} \}$,则称凸锥 K 是尖的,并且当 $\text{int}K \neq \emptyset$,称凸锥 K 是实心的.当凸锥 K 是尖的且是实心,称 K 是一个正则锥.一个正则锥 K 可以诱导出一个偏序关系,即对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,偏序关系 $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y}$ (或 $\mathbf{x} \prec_K \mathbf{y}$)成立,当且仅当 $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in K$ (或 $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in \text{int}K$)成立.

给定一个正则锥 K 和一个矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,如果 $AK \subseteq K$,则称 A 是 K 非负矩阵,如果 $A(K \setminus \{ \mathbf{0} \}) \subseteq \text{int}K$,则称 A 是 K 正矩阵.对于任意 $\mathbf{x} \in K$ 和 $\mathbf{y} \in K$ 满足 $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$,有 $\mathbf{x}^T A \mathbf{y} \geq 0$,则称 A 是关于 K 的cross-positive矩阵.令 $\lambda_i(A)$ 为 A 的第 i 个特征根($i = 1, \dots, n$), $\text{Re}(\lambda_i(A))$ 表示的是 $\lambda_i(A)$ 的实部, $\arg(\lambda_i(A))$ 为 $\lambda_i(A)$ 的辐角.

接下来,需要介绍一些相关的定义和定理.

定义 1^[4] 令 $f(t)$ 为可微函数,则 $f(t)$ 的Caputo分数阶导数定义为

$$\mathcal{D}_t^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^t (t-\zeta)^{-\nu} f'(\zeta) d\zeta,$$

其中: $\nu \in (0, 1)$ 为阶数, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数.

定义 2^[4] Mittag-Leffler 函数定义为

$$\mathcal{E}_{\alpha,\gamma}(c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{\Gamma(ka + b)},$$

其中: c 为一个复数, $a, b > 0$ 为常数.

定义 3^[22] 给定正则锥 $K \in \mathbb{R}^n$ 和向量 $\mathbf{v} \in \text{int}K$. 对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 定义范数 $\|\mathbf{x}\|_v = \inf\{\alpha \geq 0 \mid -\alpha\mathbf{v} \preceq_K \mathbf{x} \preceq_K \alpha\mathbf{v}\}$.

注 1 注意到对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ 满足 $\mathbf{0} \preceq_K \mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y}$, 有 $\|\mathbf{x}\|_v \leq \|\mathbf{y}\|_v$. 对任意矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 其矩阵范数定义为 $\|A\|_v = \sup_{\|\mathbf{x}\|_v=1} \|A\mathbf{x}\|_v$. 特别地, 当 A 是 K 非负矩阵时, $\|A\|_v = \|A\mathbf{v}\|_v$.

引理 1^[23] 给定正则锥 K 和关于 K 是 cross-positive 的矩阵 A , 则下列命题等价: 1) A 是 Hurwitz 矩阵; 2) 存在向量 $\boldsymbol{\eta} \in \text{int}K$ 使得 $A\boldsymbol{\eta} \prec_K \mathbf{0}$; 3) 存在向量 $\boldsymbol{\xi} \in \text{int}K^*$ 使得 $A^T\boldsymbol{\xi} \prec_{K^*} \mathbf{0}$; 4) $-A^{-1}$ 是 K 正矩阵.

引理 2^[23] 当 A 是关于 K 的 cross-positive 矩阵, 则有: 1) 存在一个常数 $\alpha > 0$ 使得 $A + \alpha I_n$ 为 K 非负矩阵; 2) $\lambda_{\max}(A) \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} \text{Re}(\lambda_i(A))$ 为 A 的一个特征根.

3 主要结果

3.1 锥不变性

考虑一个分数阶线性时滞系统

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\nu \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + A_d\mathbf{x}(t - d_1(t)) + B\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + C_d\mathbf{x}(t - d_2(t)) + D\mathbf{w}(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ 分别是系统的状态和输出, $\nu \in (0, 1)$ 为阶数, $d_1(t), d_2(t) \geq 0$ 为分段连续函数, $\mathbf{w}(t) \in L_\infty^m(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m)$ 为外部输入, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $C_d \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ 均为常数矩阵. 首先, 针对 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 需要做出下列假设:

假设 1 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 满足以下条件: 1) 存在时刻 $T > 0$, 使得 $\mu \triangleq \sup_{t \geq T} d_1(t)/t$ 满足 $\mu \in [0, 1)$; 2) 存在一个单调递增的数列 $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ 满足 $t_j \geq 0$, 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j - d_2(t_j) = \infty$, 并且 $\rho \triangleq \inf_{t \geq 0} t - d_2(t)$ 有界.

令 $\varrho \triangleq \inf_{t \in [0, T]} t - d_1(t)$, $\tau = -\min\{\rho, \varrho, 0\}$. 基于假设 1, 系统 (1) 的初值可以定义为 $\mathbf{x}(s) = \boldsymbol{\psi}(s)$, 其中 $s \in [-\tau, 0]$, $\boldsymbol{\psi}(\cdot) \in L^\infty([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$. 令 $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\psi})$ 和 $\mathbf{y}(t, \boldsymbol{\psi})$ 分别为系统 (1) 在初值为 $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ 下的状态轨迹和输出轨迹, 则该系统的锥不变性定义如下:

定义 4 给定正则锥 $K_x \in \mathbb{R}^n$, $K_w \in \mathbb{R}^m$ 和 $K_y \in \mathbb{R}^p$. 对任意初值 $\boldsymbol{\psi}(s) \in K_x (\forall s \in [-\tau, 0])$ 和外部输入 $\mathbf{w}(t) \in K_w (\forall t \geq 0)$, 有 $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\psi}) \in K_x$ 和 $\mathbf{y}(t, \boldsymbol{\psi}) \in K_y (\forall t \geq 0)$ 成立, 则称系统 (1) 是关于 (K_x, K_y, K_w)

的锥不变系统.

保证系统 (1) 锥不变性的充要条件给出如下:

定理 1 给定 3 个正则锥 $K_x \in \mathbb{R}^n$, $K_w \in \mathbb{R}^m$ 和 $K_y \in \mathbb{R}^p$. 在假设 1 满足的前提下, 系统 (1) 是关于 (K_x, K_y, K_w) 的锥不变系统, 当且仅当 A 是关于 K_x 的 cross-positive 矩阵, $A_d K_x \subseteq K_x$, $B K_w \subseteq K_x$, $C K_x \subseteq K_y$, $C_d K_x \subseteq K_y$, $D K_w \subseteq K_y$.

证 (充分性) 根据系统 (1) 和引理 2, 可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^\nu \mathbf{x}(t) &= -\alpha \mathbf{x}(t) + (A + \alpha I_n) \mathbf{x}(t) + \\ &A_d \mathbf{x}(t - d_1(t)) + B \mathbf{w}(t), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\alpha > 0$ 是保证 $A + \alpha I_n$ 为 K 非负矩阵的常数. 根据式 (2), 可以得出

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Theta_1(t) \boldsymbol{\psi}(0) + \int_0^t \Theta_2(t - \zeta) ([\alpha I_n + A] \mathbf{x}(\zeta) + \\ &[A_d] \mathbf{x}(\zeta - d_1(\zeta))) + B \mathbf{w}(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $\Theta_1(t) = \mathcal{E}_{\nu,1}(-\alpha t^\nu)$, $\Theta_2(t) = t^{\nu-1} \mathcal{E}_{\nu,\nu}(-\alpha t^\nu)$. 根据文献 [15, Lemma 1.1], 可知 $\Theta_1(t)$ 和 $\Theta_2(t)$ 为非负函数. 根据反证法, 假设 K_x 不是 $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\psi})$ 的不变集, 对任意 $\Delta T > 0$, $\boldsymbol{\psi}(s) \succ_{K_x} \mathbf{0}$, and $\mathbf{w}(t) \succeq_{K_w} \mathbf{0}$, 定义 $\mathcal{S} = \{t \in [0, \Delta T] \mid \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\psi}) \notin K_x\}$ 和 $t_0 = \inf \mathcal{S}$, 则对任意 $\zeta \in K_x^*$, 有 $\zeta^T \mathbf{x}(t_0) \geq \Theta_1(t_0) \zeta^T \boldsymbol{\psi}(0) > 0$, 这与 t_0 的定义矛盾, 因此 $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\psi}) \succeq_{K_x} \mathbf{0}$ 对于所有的 $t \geq 0$ 成立. 由于 $C K_x \subseteq K_y$, $C_d K_x \subseteq K_y$ 和 $D K_w \subseteq K_y$, $\mathbf{y}(t, \boldsymbol{\psi}) \succeq_{K_y} \mathbf{0}$ 也对于所有的 $t \geq 0$ 成立.

(必要性) 首先证明 A 是关于 K_x 的 cross-positive 矩阵. 如果不是, 一定存在两个向量 $\boldsymbol{\zeta} \in K_x^*$ 和 $\boldsymbol{\eta} \in K_x$ 满足 $\boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\eta} = 0$, 使得 $\boldsymbol{\zeta}^T A \boldsymbol{\eta} < 0$. 令 $\mathbf{w}(t) = \mathbf{0}$, $d_1(t) = d_2(t) = 1$, $\boldsymbol{\psi}(s) = (1 + s)\boldsymbol{\eta}$ 和 $f(t) = \boldsymbol{\zeta}^T \mathcal{D}_t^\nu \mathbf{x}(t)$, 有 $s \in [-1, 0]$ 和 $f(0) = \boldsymbol{\zeta}^T A \boldsymbol{\eta} < 0$. 由于 $\boldsymbol{\psi}(s)$ 在 $[-1, 0]$ 上连续, 根据连续函数的局部保号性, 一定存在一个常数 $\delta > 0$, 使得 $f(t) < 0$ 对于所有的 $t \in [0, \delta]$ 成立, 从而有

$$\boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{x}(\delta) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\delta (\delta - \zeta)^{\nu-1} f(\zeta) d\zeta < 0,$$

这与系统 (1) 的锥不变性矛盾. 所以, A 是关于 K_x 的 cross-positive 矩阵. 如果 $A_d K_x \not\subseteq K_x$, 则存在 $\boldsymbol{\zeta} \in K_x^*$ 和 $\boldsymbol{\eta} \in K_x$, 使得 $\boldsymbol{\zeta}^T A_d \boldsymbol{\eta} < 0$. 令 $\mathbf{w}(t) = \mathbf{0}$, $d_1(t) = d_2(t) = 1$, $\boldsymbol{\psi}(s) = s\boldsymbol{\eta}$ 和 $f(t) = \boldsymbol{\zeta}^T \mathcal{D}_t^\nu \mathbf{x}(t)$, 有 $f(0) = \boldsymbol{\zeta}^T A_d \boldsymbol{\eta} < 0$. 同理可得存在一个常数 $\delta > 0$ 使得 $\boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{x}(\delta) < 0$, 这仍然与系统 (1) 的锥不变性矛盾. 所以, $A_d K_x \subseteq K_x$. 如果 $B K_w \not\subseteq K_x$, 则存在 $\boldsymbol{\zeta} \in K_x^*$ 和 $\boldsymbol{\eta} \in K_w$ 使得 $\boldsymbol{\zeta}^T B \boldsymbol{\eta} < 0$. 令 $\mathbf{w}(t) = \boldsymbol{\eta}$, 类似的讨论可以推导出存在常数 $\delta > 0$ 使得 $\boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{x}(\delta) < 0$, 这依然与系统 (1) 的锥不变性矛盾. 所以, $B K_w \subseteq K_x$. 同理可得 $C K_x \subseteq K_y$, $C_d K_x \subseteq K_y$ 和 $D K_w \subseteq K_y$. 证毕.

4 稳定性

这一节将会给出一个充要条件来实现系统(1)在 $w = 0$ 和锥不变性满足时的渐近稳定性. 在具体结果呈现之前, 需要给出以下引理.

引理 3 在假设 1 满足的前提下, 如果存在 $\eta \in \text{int}K_x$ 使得 $(A + A_d)\eta \preceq_{K_x} 0$, 则: 1) 当 $\varphi(s) = \eta$ ($s \in [-\tau, 0]$), 有 $x(t, \eta) \preceq_{K_x} \eta$ 对所有的 $t \geq 0$ 成立; 2) 当 $\varphi(s) = -\eta$, 有 $-\eta \preceq_{K_x} x(t, -\eta)$ 对所有的 $t \geq 0$ 成立.

证 令 $e_x(t) = \eta - x(t, \eta)$, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^\nu e_x(t) = \\ A e_x(t) + A_d e_x(t - d_1(t)) - (A + A_d)\eta, \end{aligned}$$

其中 $e_x(s) = 0$ ($s \in [-\tau, 0]$). 将 $-(A + A_d)\eta$ 视为一个外部输入, 根据定理 1, 可得 $e_x(t) \succeq_{K_x} 0$ 对于任意 $t \geq 0$ 成立, 这等价于 $x(t, \eta) \preceq_{K_x} \eta$. 重新定义 $e_x(t) = x(t, -\eta) + \eta$, 同理可得 $-\eta \preceq_{K_x} x(t, -\eta)$ 对所有的 $t \geq 0$ 成立. 证毕.

系统(1)关于初值的单调性可以总结为下列引理.

引理 4 在假设 1 满足的前提下, 对任意 $\psi_1(s), \psi_2(s) \in \mathbb{R}^n$ ($s \in [-\tau, 0]$) 满足 $\psi_1(s) \preceq_{K_x} \psi_2(s)$, 有 $x(t, \psi_1) \preceq_{K_x} x(t, \psi_2)$ 对所有的 $t \geq 0$ 成立.

该引理可以直接从系统(1)的线性和锥不变性得出.

引理 5 考虑假设 1 成立. 如果存在 $\eta \in \text{int}K_x$ 使得 $(A + A_d)\eta \prec_{K_x} 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \eta) = 0$.

证

步骤 1 由于 $(A + A_d)\eta \prec_{K_x} 0$ 严格成立, 则有 $A\eta \prec_{K_x} 0$. 根据引理 1, A 是 Hurwitz 矩阵, $-A^{-1}$ 是 K_x 正矩阵, 且 $0 \preceq_{K_x} -A^{-1}A_d\eta \prec_{K_x} \eta$. 由于该不等式严格成立, 则一定存在一个常数 $\epsilon \in (0, 1)$ 使得 $-A^{-1}A_d\eta \preceq_{K_x} (1 - \epsilon)\eta$. 定义

$$\mathcal{D}_t^\nu z(t) = Az(t) + A_d\eta, \quad (4)$$

其中 $z(s) = \eta, s \in [-\tau, 0]$. 根据定理 1, 对任意 $t \geq 0$, 都有 $z(t) \in K_x$. 令 $e_z(t) = z(t) + A^{-1}A_d\eta$, 有 $\mathcal{D}_t^\nu e_z(t) = Ae_z(t)$ 和 $e_z(s) \succeq_K 0$. 由于 A 是 Hurwitz 的, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_z(t) = 0$, 这可以推出 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -A^{-1}A_d\eta$. 因此, 一定存在某个时刻 t_1 使得 $z(t) \preceq_{K_x} (1 - \epsilon)\eta$ 对任意 $t \geq t_1$ 成立. 定义 $e_z(t) = z(t) - x(t, \eta)$, 有

$$\mathcal{D}_t^\nu e_x(t) = Ae_x(t) + A_d(\eta - x(t - d_1(t))),$$

其中 $e_x(s) = 0$. 根据引理 3 和定理 1, $e_x(t) \succeq_{K_x} 0$ 对任意 $t \geq 0$ 成立, 这得出 $x(t, \eta) \preceq_K z(t) \preceq_K (1 - \epsilon)\eta$ 对任意 $t \geq t_1$ 成立.

步骤 2 定义时间序列 $\{T_k\}_{k=1}^\infty$, 其中 $T_k = \frac{T}{(1 - \mu)^{k-1}}$. 很明显, 该序列单调递增且满足

$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty$. 因此, 一定存在某个索引 $k_1 \geq 1$ 使得 $T_{k_1} \geq t_1$. 根据步骤 1, 当 $t \geq T_{k_1}$ 时, $x(t, \eta) \preceq (1 - \epsilon)\eta$. 此外, 当 $t \geq T_{k_1+1}$, 根据假设 1, 有 $t - d_1(t) \geq T_{k_1}$. 定义 $x_1(t) = x(t, (1 - \epsilon)\eta)$, 并且当 $s \in [T_{k_1} - T_{k_1+1}, 0]$ 时, 令 $x_1(s) = (1 - \epsilon)\eta$. 由于 $(1 - \epsilon)(A + A_d)\eta \prec_{K_x} 0$ 仍然成立, 重复步骤 1, 可以找到某个时刻 $t_2 \geq 0$, 当 $t \geq t_2$ 时, 有 $x_1(t) \preceq_{K_x} (1 - \epsilon)^2\eta$. 定义 $h_1(t) = x(t + T_{k_1+1}, \eta)$, $e_{h_1}(t) = x_1(t) - h_1(t)$, 其中 $e_{h_1}(s) = (1 - \epsilon)\eta - x(s + T_{k_1+1}, \eta) \succeq_K 0$. 定理 1 推出 $e_{h_1}(t) \succeq_K 0$, 这可以得出当 $t \geq t_2 + T_{k_1+1}$ 时, $x(t, \eta) \preceq_{K_x} (1 - \epsilon)^2\eta$.

步骤 3 选择一个索引 $k_2 \geq k_1$ 使得 $T_{k_2} \geq t_2 + T_{k_1+1}$. 根据步骤 2, 当 $t \geq T_{k_2}$ 时, $x(t, \eta) \preceq (1 - \epsilon)^2\eta$. 定义 $x_2(t) = x(t, (1 - \epsilon)^2\eta)$, 并且当 $s \in [T_{k_2} - T_{k_2+1}, 0]$ 时, 令 $x_2(s) = (1 - \epsilon)^2\eta$. 定义 $h_2(t) = x(t + T_{k_2+1}, \eta)$, $e_{h_2}(t) = x_2(t) - h_2(t)$, 其中 $e_{h_2}(s) = (1 - \epsilon)^2\eta - x(s + T_{k_2+1}, \eta) \succeq_K 0$. 重复步骤 2, 可以找到某个时刻 $t_3 \geq 0$ 使得当 $t \geq t_3 + T_{k_2+1}$ 时, 有 $x(t, \eta) \preceq_{K_x} (1 - \epsilon)^3\eta$ 成立.

步骤 4 根据数学归纳法, 可以得出 $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ 的一个子列 $\{T_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{k_n} = \infty$, 并且当 $t \geq T_{k_n}$, 有 $x(t, \eta) \preceq_{K_x} (1 - \epsilon)^n\eta$ 成立. 由于 $x(t, \eta) \succeq_K 0$ 对任意 $t \geq 0$ 成立, 根据夹逼准则, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \eta) = 0$.

证毕.

从引理 5 可以得出下列推论.

推论 1 考虑假设 1 成立. 如果存在 $\eta \in \text{int}K_x$ 使得 $(A + A_d)\eta \prec_{K_x} 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, -\eta) = 0$.

证 令 $z(t) = -x(t, -\eta)$, 有

$$\mathcal{D}_t^\nu z(t) = Az(t) + A_d z(t - d_1(t)), \quad (5)$$

其中 $z(s) = \eta$ ($s \in [-\tau, 0]$), 这可以推出 $z(t) \succeq_{K_x} 0$. 根据引理 5, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, -\eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. 证毕.

基于引理 4-5 和推论 1, 一个确保实现系统(1)稳定性的充要条件可以通过以下定理给出.

定理 2 令假设 1 和 $\psi(\cdot) \in L^\infty([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ 成立, 则系统(1)可以实现渐近稳定性当且仅当存在向量 $\eta \in \text{int}K_x$, 使得 $(A + A_d)\eta \prec_{K_x} 0$.

证 (充分性) 对于任意 $\psi(\cdot) \in L^\infty([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, 总存在一个常数 $c \geq \sup_{s \in [-\tau, 0]} \|\psi(s)\|_\eta$, 使得 $-c\eta \preceq_{K_x} \psi(s) \preceq_{K_x} c\eta$ 对所有的 $s \in [-\tau, 0]$ 成立. 根据引理 4, 有 $x(t, -c\eta) \preceq_{K_x} x(t, \psi) \preceq_{K_x} x(t, c\eta)$ 对所有 $t \geq 0$ 成立. 由于 $(A + A_d)c\eta \prec_{K_x} 0$, 根据引理 5 和推论 1, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, c\eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, -c\eta) = 0$. 因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \psi) = 0$.

接下来将证明系统(1)的 Lyapunov 稳定性. 对于

任意 $\varepsilon > 0$, 当 $\sup_{s \in [-\tau, 0]} \|\psi(s)\|_\eta \leq \varepsilon$, 对任意 $s \in [-\tau, 0]$, 有 $-\varepsilon\eta \preceq_{K_x} \psi(s) \preceq_{K_x} \varepsilon\eta$. 引理 3 和引理 4 推出 $-\varepsilon\eta \preceq_{K_x} \mathbf{x}(t, -\varepsilon\eta) \preceq_{K_x} \mathbf{x}(t, \psi) \preceq_{K_x} \mathbf{x}(t, \varepsilon\eta) \preceq_{K_x} \varepsilon\eta$ 对所有 $t \geq 0$ 成立, 这等价于 $\|\mathbf{x}(t, \psi)\|_\eta \leq \varepsilon$.

(必要性) 令 $d_1(t) = 0$, 有 $\mathcal{D}_t^\nu \mathbf{x}(t) = (A + A_d)\mathbf{x}(t)$. 根据文献 [17, Lemma1], 该系统实现渐近稳定性当且仅当所有的 $\lambda_i(A + A_d)$ 满足 $|\arg(\lambda_i(A + A_d))| > \frac{\nu\pi}{2}$. 注意到 $A + A_d$ 仍然是关于 K_x 的 cross-positive 矩阵, 根据引理 2, 可以推出 $\lambda_{\max}(A + A_d)$ 为实数, 且一定为负实数. 因此, 所有的 $\operatorname{Re}(\lambda_i(A))$ 都为负实数, 从而 $A + A_d$ 一定为 Hurwitz 矩阵. 根据引理 1, 一定存在 $\eta \in \operatorname{int}K_x$ 使得 $(A + A_d)\eta \prec_{K_x} \mathbf{0}$. 证毕.

5 锥诱导增益

在这一节中, 考虑定理 1 和定理 2 中的条件同时满足. 令 $\mathbf{x}(t, \mathbf{w})$ 和 $\mathbf{y}(t, \mathbf{w})$ 分别为系统 (1) 在输入 $\mathbf{w}(t)$ 下的状态轨迹和输出轨迹. 给定向量 $\zeta \in \operatorname{int}K_y$ 和 $\theta \in \operatorname{int}K_w$, 则系统 (1) 从输入到输出的锥诱导增益可以定义为

$$\gamma = \sup_{\mathbf{w}(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^m), \mathbf{w}(t) \neq \mathbf{0}} \frac{\operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \|\mathbf{y}(t, \mathbf{w})\|_\zeta}{\operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \|\mathbf{w}(t)\|_\theta}$$

为了计算 γ , 需要引入以下引理.

引理 6 对任意 $\mathbf{w}_1(t)$ 和 $\mathbf{w}_2(t)$ 满足 $\mathbf{w}_1(t) \preceq_{K_w} \mathbf{w}_2(t) (\forall t \geq 0)$, 有 $\mathbf{x}(t, \mathbf{w}_1) \preceq_{K_x} \mathbf{x}(t, \mathbf{w}_2)$ 和 $\mathbf{y}(t, \mathbf{w}_1) \preceq_{K_y} \mathbf{y}(t, \mathbf{w}_2)$ 成立.

该引理可以直接从系统 (1) 的线性和锥不变性得出.

基于引理 6, 分析系统 (1) 的锥诱导增益时只要考虑 $\mathbf{w}(t) = \theta$ 的情形, 此时 $\gamma = \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \|\mathbf{y}(t, \mathbf{w})\|_\zeta$.

引理 7 令 $\mathbf{x}_1(t, \theta)$ 和 $\mathbf{y}_1(t, \theta)$ 分别为下列辅助系统的状态轨迹和输出轨迹:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\nu \mathbf{x}_1(t) = (A + A_d)\mathbf{x}_1(t) + B\theta, \\ \mathbf{y}_1(t) = C\mathbf{x}_1(t) + C_d\mathbf{x}_1(t - d_2(t)) + D\theta, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{x}_1(s) = \mathbf{0} (s \in [-\tau, 0])$, 则有: 1) 对任意 $t, \Delta t \geq 0$, 有 $\mathbf{0} \preceq_{K_x} \mathbf{x}_1(t, \theta) \preceq_{K_x} \mathbf{x}_1(t + \Delta t, \theta)$; 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_1(t, \theta) = -(A + A_d)^{-1}B\theta$.

证 根据定理 1, 可知系统 (6) 是锥不变的. 对任意 $\Delta t \geq 0$, 定义 $\mathbf{e}_{x_1}(t) = \mathbf{x}_1(t + \Delta t, \theta) - \mathbf{x}_1(t, \theta)$, 有 $\mathcal{D}_t^\nu \mathbf{e}_{x_1}(t) = (A + A_d)\mathbf{e}_{x_1}(t)$, 其中 $\mathbf{e}_{x_1}(0) = \mathbf{x}_1(\Delta t, \theta) \preceq_{K_x} \mathbf{0}$. 再次使用定理 1, 可知 $\mathbf{e}_{x_1}(t) \preceq_{K_x} \mathbf{0}$. 定义 $\mathbf{e}_{x_1}(t) = \mathbf{x}_1(t, \theta) + (A + A_d)^{-1}B\theta$, 这仍然可以推出 $\mathcal{D}_t^\nu \mathbf{e}_{x_1}(t) = (A + A_d)\mathbf{e}_{x_1}(t)$, 其中 $\mathbf{e}_{x_1}(0) = -(A + A_d)^{-1}B\theta \preceq_{K_x} \mathbf{0}$. 根据定理 2, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_{x_1}(t) = \mathbf{0}$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_1(t, \theta) = -(A + A_d)^{-1}B\theta$. 证毕.

引理 8 令 $\mathbf{x}_2(t, \theta)$ 和 $\mathbf{y}_2(t, \theta)$ 分别为下列分数阶采样系统的状态轨迹和输出轨迹:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\nu \mathbf{x}_2(t) = A\mathbf{x}_2(t) + A_d\mathbf{x}_2(\lfloor \frac{t}{N} \rfloor) + B\theta, \\ \mathbf{y}_2(t) = C\mathbf{x}_2(t) + C_d\mathbf{x}_2(t - d_2(t)) + D\theta, \end{cases} \quad (7)$$

其中: $\mathbf{x}_2(s) = \mathbf{0} (s \in [-\tau, 0])$, $N > 1$ 为整数, 则有: 1) 对任意 $t, \Delta t \geq 0$, 有 $\mathbf{0} \preceq_{K_x} \mathbf{x}_2(t, \theta) \preceq_{K_x} \mathbf{x}_2(t + \Delta t, \theta)$; 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_2(t, \theta) = -(A + A_d)^{-1}B\theta$.

证 根据定理 1, 可知系统 (7) 是锥不变的. 对于任意 $t, t + \Delta t \in [0, N)$, 定义 $\mathbf{e}_{x_2}(t) = \mathbf{x}_2(t + \Delta t, \theta) - \mathbf{x}_2(t, \theta)$, 有

$$\mathcal{D}_t^\nu \mathbf{e}_{x_2}(t) = A\mathbf{e}_{x_2}(t) + A_d\mathbf{x}_2(\lfloor \frac{t + \Delta t}{N} \rfloor) - A_d\mathbf{x}_2(\lfloor \frac{t}{N} \rfloor), \quad (8)$$

其中 $\mathbf{e}_{x_2}(s) = \mathbf{x}_2(\Delta t, \theta) \preceq_{K_x} \mathbf{0}$. 注意到 $\mathbf{x}_2(\lfloor \frac{t}{N} \rfloor) = \mathbf{x}_2(\lfloor \frac{t + \Delta t}{N} \rfloor) = \mathbf{0}$, 根据定理 1, $\mathbf{e}_{x_2}(t) \preceq_{K_x} \mathbf{0}$ 对任意 $t \in [0, N)$ 成立, 即 $\mathbf{x}_2(t + \Delta t, \theta) \preceq_{K_x} \mathbf{x}_2(t, \theta)$ 对于任意 $t, t + \Delta t \in [0, N)$ 成立.

根据数学归纳法, 假设 $\mathbf{x}_2(t + \Delta t, \theta) \preceq_{K_x} \mathbf{x}_2(t, \theta)$ 对于任意 $t, t + \Delta t \in [0, kN)$ 成立, 其中 $k \geq 1$ 为整数. 注意到当 $t, t + \Delta t \in [0, kN + N)$ 时, 有 $0 \leq \lfloor \frac{t}{N} \rfloor \leq \lfloor \frac{t + \Delta t}{N} \rfloor < k + 1$, 且 $[0, k + 1) \subseteq [0, kN)$, 所以有 $\mathbf{x}_2(\lfloor \frac{t}{N} \rfloor) \preceq_{K_x} \mathbf{x}_2(\lfloor \frac{t + \Delta t}{N} \rfloor)$, 这可以推出 $\mathbf{x}_2(t + \Delta t, \theta) \preceq_{K_x} \mathbf{x}_2(t, \theta)$ 对于任意 $t, t + \Delta t \in [0, kN + N)$ 成立. 根据归纳准则, 对任意 $t, \Delta t \geq 0$, 有 $\mathbf{x}_2(t, \theta) \preceq_{K_x} \mathbf{x}_2(t + \Delta t, \theta)$ 成立.

定义 $\mathbf{e}_x(t) = \mathbf{x}_1(t, \theta) - \mathbf{x}_2(t, \theta)$, 有

$$\mathcal{D}_t^\nu \mathbf{e}_x(t) = (A + A_d)\mathbf{e}_x(t) + A_d\mathbf{x}_2(t) - A_d\mathbf{x}_2(\lfloor \frac{t}{N} \rfloor), \quad (9)$$

其中 $\mathbf{e}_x(s) = \mathbf{0}$. 定理 1 可以推出 $\mathbf{x}_1(t, \theta) \preceq_{K_x} \mathbf{x}_2(t, \theta)$. 结合引理 7, 可知极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_2(t, \theta)$ 一定存在. 令

$$\kappa = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_2(t, \theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_2(\lfloor \frac{t}{N} \rfloor, \theta),$$

从而有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{D}_t^\nu \mathbf{x}_2(t) = (A + A_d)\kappa + B\theta$. 根据终值定理, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{D}_t^\nu \mathbf{x}_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}\{\mathcal{D}_t^\nu \mathbf{x}_2(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} s^{\nu+1} X_2(s) = \mathbf{0},$$

其中 $X_2(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}_2(t)\}$. 所以, $\kappa = -(A + A_d)^{-1}B\theta$.

证毕.

基于引理 7-8, γ 的计算可以总结为下列定理.

定理 3 给定正则锥 $K_x \in \mathbb{R}^n$, $K_w \in \mathbb{R}^m$ 和 $K_y \in$

\mathbb{R}^p , 以及向量 $\zeta \in \text{int}K_y$ 和 $\theta \in \text{int}K_w$. 系统(1)的锥诱导增益为 $\gamma = \|(D - (C + C_d)(A + A_d)^{-1})\theta\|_\zeta$.

证 令 $e_{x_1}(t) = x_1(t, \theta) - x(t, \theta)$, $e_{y_1}(t) = y_1(t, \theta) - y(t, \theta)$, 有

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\nu e_{x_1}(t) = Ae_{x_1}(t) + A_d e_{x_1}(t - d_1(t)) + \\ \quad A_d x_1(t) - A_d x_1(t - d_1(t)), \\ e_{y_1}(t) = Ce_{x_1}(t) + C_d e_{x_1}(t - d_2(t)), \end{cases} \quad (10)$$

其中 $e_{x_1}(s) = \mathbf{0}$, $s \in [-\tau, 0]$. 通过引理7和定理1, 可知系统(10)是锥不变系统, 所以有 $x_1(t, \theta) \succeq_{K_x} x(t, \theta)$ 和 $y_1(t, \theta) \succeq_{K_y} y(t, \theta)$ 对所有 $t \geq 0$ 成立. 令 $e_{x_2}(t) = x(t, \theta) - x_2(t, \theta)$, $e_{y_2}(t) = y(t, \theta) - y_2(t, \theta)$, 有

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\nu e_{x_2}(t) = Ae_{x_2}(t) + A_d e_{x_2}(t - d_1(t)) + \\ \quad A_d x_2(t - d_1(t)) - A_d x_2(\lfloor \frac{t}{N} \rfloor), \\ e_{y_2}(t) = Ce_{x_2}(t) + C_d e_{x_2}(t - d_2(t)), \end{cases} \quad (11)$$

其中 $e_{x_2}(s) = \mathbf{0}$. 令 $N \geq \max\{(1 - \mu)^{-1}, T\}$, 根据假设1, 有 $x_2(t - d_1(t)) \succeq_{K_x} x_2(\lfloor \frac{t}{N} \rfloor)$, 这表明系统(11)是锥不变系统, 所以有

$$\begin{cases} \mathbf{0} \preceq_{K_x} x_2(t, \theta) \preceq_{K_x} x(t, \theta) \preceq_{K_x} x_1(t, \theta), \\ \mathbf{0} \preceq_{K_y} y_2(t, \theta) \preceq_{K_y} y(t, \theta) \preceq_{K_y} y_1(t, \theta), \end{cases} \quad (12)$$

从而可以推出 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \theta) = -(A + A_d)^{-1}B\theta$. 根据引理7、引理8和假设1, 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_1(t_j, \theta) = \lim_{j \rightarrow \infty} y_2(t_j, \theta) = (D - (C + C_d)(A + A_d)^{-1})\theta,$$

所以 $\lim_{j \rightarrow \infty} y(t_j, \theta) = (D - (C + C_d)(A + A_d)^{-1})\theta$. 根据引理7和式(12), 有 $x(t, \theta) \preceq_{K_x} -(A + A_d)^{-1}B\theta$ 对任意 $t \geq 0$ 成立, 所以

$$y(t, \theta) \preceq_{K_y} (D - (C + C_d)(A + A_d)^{-1})\theta$$

对任意 $t \geq 0$ 成立, 从而可以推出

$$\gamma = \|(D - (C + C_d)(A + A_d)^{-1})\theta\|_\zeta.$$

证毕.

注 2 对于有界时滞或无时滞情形, 假设1仍然满足. 从定理2的证明可以看出, 系统(1)的稳定性由矩阵 $A + A_d$ 的 Hurwitz 性质决定, 和时滞 $d_1(t)$ 的大小并无关联.

6 数值仿真

考虑系统(1)由下列系统矩阵组成:

$$A = \begin{bmatrix} -1.25 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & -0.95 & -0.1 \\ -0.3 & 0.4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 0.25 & 0 \\ -0.4 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.5 & -0.2 \\ 0.8 & 0.4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & -0.4 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

定义多面体锥 K_x, K_y 和 K_w 分别为 $K_x \triangleq \{x \in \mathbb{R}^3 | F_x x \in \mathbb{R}_+^4\}$, $K_y \triangleq \{y \in \mathbb{R}_+^2 | F_y y \in \mathbb{R}_+^2\}$ 和 $K_w \triangleq \{w \in \mathbb{R}_+^2 | F_w w \in \mathbb{R}_+^2\}$, 其中:

$$F_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F_y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_w = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

由于存在一个 Metzler 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} -0.925 & 0 & 0.05 & 0.025 \\ 0.5625 & -1.275 & 0 & 0.3875 \\ 0.225 & 0 & -1.2 & 0.325 \\ 0.1625 & 0.075 & 0 & -0.9625 \end{bmatrix},$$

使得 $H F_x = F_x A$, 根据文献 [24, Proposition 1], 可以得出 A 是关于 K_x 的 cross-positive 矩阵. 同理可得 $A_d K_x \subseteq K_x, B K_w \subseteq K_x, C K_x \subseteq K_y, C_d K_x \subseteq K_y, D K_w \subseteq K_y$. 令 $\nu = 0.95$,

$$d_1(t) = \begin{cases} |\sin t| + 0.1, & t < 1, \\ 0.3t |\cos t|, & t \geq 1, \end{cases}$$

$$d_2(t) = \begin{cases} |\cos t|, & t < 1, \\ 0.4t |\sin t|, & t \geq 1, \end{cases}$$

$\psi(s) = [2 \sqrt{6} + \cos \pi s \quad 2 \sin \pi s]^T$ ($s \in [-1.1, 0]$). 根据定理2, 当 $\eta = [77.1939 \quad 89.5752 \quad 12.4439]^T$, 有 $(A + A_d)\eta \prec_{K_x} \mathbf{0}$, 这说明 $A + A_d$ 是 Hurwitz 矩阵. 因此, 当 $w(t) = \mathbf{0}$, 系统(1)是渐近稳定的, 并且系统的状态轨迹被描绘在图1中. 为了显示系统(1)的锥不变性, 令 $z(t) = F_x x(t)$ 和 $h(t) = F_y y(t)$. 由于 $\mathbf{0} \in K_w$, 根据多面体锥 K_x 和 K_y 的定义, 如果 $z(t) \in \mathbb{R}_+^4$ 和 $h(t) \in \mathbb{R}_+^2$ 对于 $\forall t \geq 0$ 成立, 则系统(1)是关于 (K_x, K_y, K_w) 锥不变的. $z(t)$ 和 $h(t)$ 随时间演化的轨迹被分别描绘在图2-3中. 正如图所示, $z(t)$ 和 $h(t)$ 始终保持在非负象限, 这证明了系统(1)是关于 (K_x, K_y, K_w) 锥不

变的.

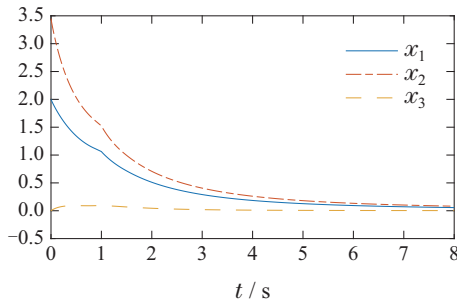


图 1 $\nu = 0.95$ 时, 系统(1)在初值 $\psi(\cdot)$ 下的状态轨迹

Fig. 1 The state trajectory of system (1) under the initial value $\psi(\cdot)$ when $\nu = 0.95$

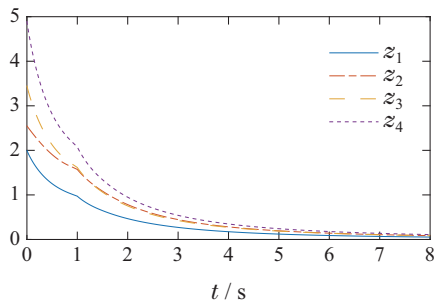


图 2 $\nu = 0.95$ 时, $z(t)$ 的轨迹

Fig. 2 The trajectory of $z(t)$ when $\nu = 0.95$

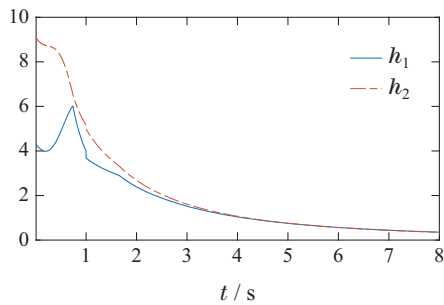


图 3 $\nu = 0.95$ 时, $h(t)$ 的轨迹

Fig. 3 The trajectory of $h(t)$ when $\nu = 0.95$

令 $\theta = [0.4 \ 1]^T$, $\zeta = [1 \ 0]^T$ 和 $\psi(s) = \mathbf{0}$. 当 $t \rightarrow \infty$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t, \theta) = (D - (C + C_d)(A + A_d)^{-1})\theta = [41.1267 \ 9.5700]^T.$$

求解优化问题

$$\begin{aligned} \gamma &= \min \alpha, \\ \text{s.t. } & F_y[\alpha\zeta - (D - (C + C_d)(A + A_d)^{-1})\theta] \in \mathbb{R}_+^2, \\ & F_y[\alpha\zeta + (D - (C + C_d)(A + A_d)^{-1})\theta] \in \mathbb{R}_+^2, \\ & \alpha \geq 0, \end{aligned}$$

可得系统的锥诱导增益为 $\gamma = 50.6967$. 在此情形下输出 $\mathbf{y}(t)$ 的轨迹被描绘在图4中, 可以看到 $\mathbf{y}(t)$ 收敛到点 $(41.1267, 9.5700)$. 此外, $\mathbf{y}(t)$ 随时间的演化轨迹被呈现在图5中. 可以看到 $\mathbf{y}(t)$ 是单调递增的.

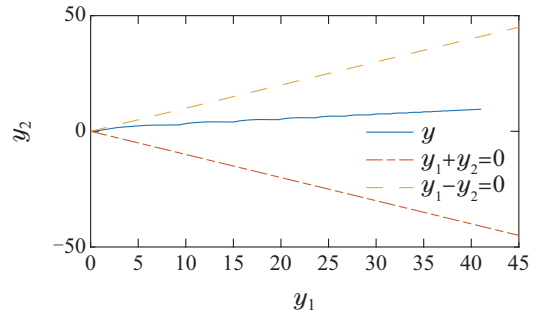


图 4 系统(1)在 $\nu = 0.95$, $\psi(s) = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{w}(t) = \theta$ 下的输出轨迹

Fig. 4 The output trajectory of system (1) under $\nu = 0.95$, $\psi(s) = \mathbf{0}$ and $\mathbf{w}(t) = \theta$

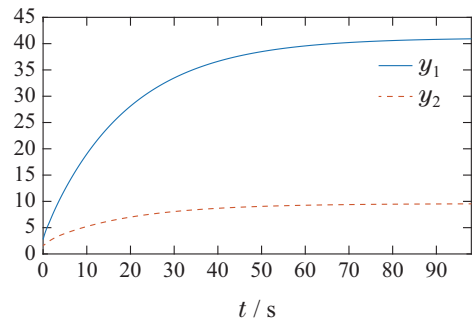


图 5 系统(1)在 $\nu = 0.95$, $\psi(s) = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{w}(t) = \theta$ 下随时间演化的输出轨迹

Fig. 5 The output trajectory of system (1) under $\nu = 0.95$, $\psi(s) = \mathbf{0}$ and $\mathbf{w}(t) = \theta$ evolving over time

进一步地, 考虑 $\nu = 0.41$ 的情形. 在同等条件下, 系统的状态轨迹被描绘在图6中. 可以看到, 当阶数 $\nu = 0.41$ 时, 系统仍然可以实现渐近稳定性. 图7-8 表明了 $z(t) \in \mathbb{R}_+^4$ 和 $h(t) \in \mathbb{R}_+^2$ 对于 $\forall t \geq 0$ 成立, 这说明系统(1)是关于 (K_x, K_y, K_w) 锥不变的. 类似地, 当 $\psi(s) = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{w}(t) = \theta$, 正如图9所示, $\mathbf{y}(t)$ 仍然可以收敛到点 $(41.1267, 9.5700)$. 和图1和图5相比, 图6中系统状态的衰减速率更慢, 图10中系统输出的增长速率更慢. 这说明阶数的变化对系统的稳定性和增益性能没有影响, 仅仅会影响系统的状态和输出轨迹衰减或增长的速率.

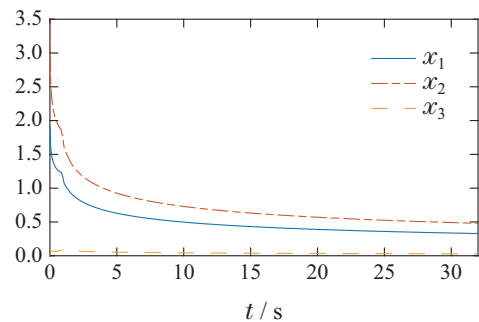
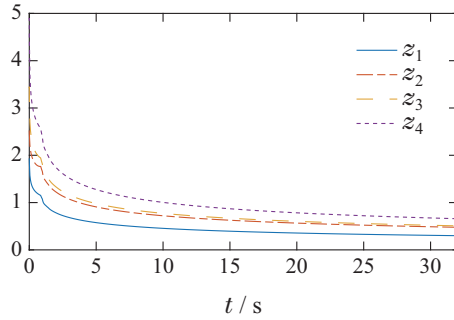
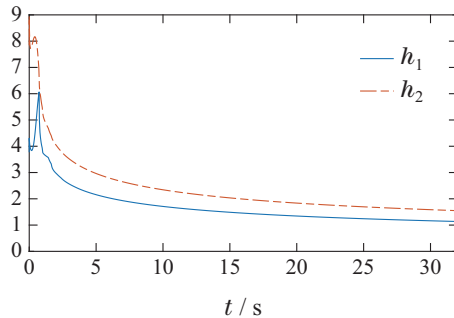
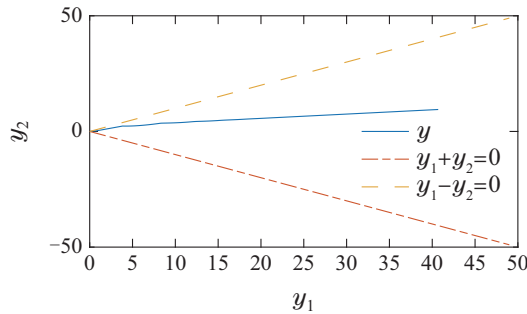
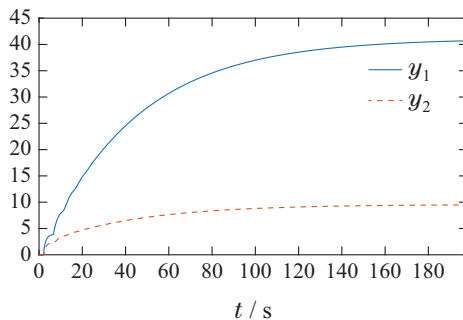


图 6 $\nu = 0.41$ 时, 系统(1)在初值 $\psi(\cdot)$ 下的状态轨迹

Fig. 6 The state trajectory of system (1) under the initial value $\psi(\cdot)$ when $\nu = 0.41$

图7 $\nu = 0.41$ 时, $z(t)$ 的轨迹Fig. 7 The trajectory of $z(t)$ when $\nu = 0.41$ 图8 $\nu = 0.41$ 时, $h(t)$ 的轨迹Fig. 8 The trajectory of $h(t)$ when $\nu = 0.41$ 图9 系统(1)在 $\nu = 0.41$, $\psi(s) = \mathbf{0}$ 和 $w(t) = \theta$ 下的输出轨迹Fig. 9 The output trajectory of system (1) under $\nu = 0.41$, $\psi(s) = \mathbf{0}$ and $w(t) = \theta$ 图10 系统(1)在 $\nu = 0.41$, $\psi(s) = \mathbf{0}$ 和 $w(t) = \theta$ 下随时间演化的输出轨迹Fig. 10 The output trajectory of system (1) under $\nu = 0.41$, $\psi(s) = \mathbf{0}$ and $w(t) = \theta$ evolving over time

7 结论

在本文中,具有无界时滞的分数阶线性锥不变系统的渐近稳定性和锥诱导增益问题被解决.通过利用建立在正则锥上的偏序关系来分析系统状态轨迹的单调性,证明了在无界时滞下分数阶线性锥不变系统是渐近稳定的,当且仅当相应的系统矩阵和是Hurwitz矩阵.沿着这条思路,利用锥诱导范数准确地刻画了系统从输入到输出的锥诱导增益.本文的结果是正时滞系统稳定性的重要扩展,并揭示了时滞不敏感性对锥不变系统仍然适用.

参考文献:

- [1] BHATTACHARYA R, TIWARI A, FUNG J, et al. Cone invariance and rendezvous of multiple agents. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2009, 223(6): 779 – 789.
- [2] BANAJI M. Monotonicity in chemical reaction systems. *Dynamical Systems*, 2009, 24(1): 1 – 30.
- [3] TANAKA T, LANGBORT C, UGRINOVSKII V. DC-dominant property of cone-preserving transfer functions. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(8): 699 – 707.
- [4] QIU H, WANG H, PAN Y, et al. Stability and L_∞ -gain of positive fractional-order singular systems with time-varying delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2023, 70(9): 3534 – 3538.
- [5] LI P, LAM J. Decentralized control of compartmental networks with H_∞ tracking performance. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, 60(2): 546 – 553.
- [6] GOUZÉ J L. Positive and negative circuits in dynamical systems. *Journal of Biological Systems*, 1998, 6(1): 11 – 15.
- [7] LIU X, YU W, WANG L. Stability analysis for continuous-time positive systems with time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 1024 – 1028.
- [8] LIU X, YU W, WANG L. Stability analysis of positive systems with bounded time-varying delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2009, 56(7): 600 – 604.
- [9] ZHU B, LAM J, SONG X, et al. Stability and stabilization of periodic piecewise positive systems: A time segmentation approach. *Asian Journal of Control*, 2023, 25(2): 677 – 694.
- [10] QIU H, CAO J, LIU H. Stability and L_∞ -gain of positive fractional-order coupled differential-difference systems with unbounded time-varying delays. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 175: 113948.
- [11] THU N T. Stability and stabilizability of positive switched discrete-time linear singular systems. *Systems & Control Letters*, 2024, 185: 105725.
- [12] QIU H, SHEN J. Analysis and stabilization of discrete-time positive systems with input saturation. *Systems & Control Letters*, 2024, 190: 105854.
- [13] YIN K, YANG D. Asynchronous fault detection filter of positive Markov jump systems by dynamic event-triggered mechanism. *ISA Transactions*, 2023, 138: 197 – 211.
- [14] WANG J, GAO A, WANG K, et al. Event-based filter design for singular positive Markov jump systems with parameter uncertainty and measurement delay. *Journal of the Franklin Institute*, 2024, 361(8): 106818.

- [15] KACZOREK T, ROGOWSKI K. *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2015.
- [16] BENZAOUIA A, MESQUINE F, BENHAYOUN M, et al. Stabilization of continuous-time fractional positive systems with delays and asymmetric control bounds. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2019, 141(5): 051008.
- [17] SHEN J, LAM J. Stability and performance analysis for positive fractional-order systems with time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 61(9): 2676 – 2681.
- [18] SEURET A, TARBOURIECH S. A data-driven approach to the L_2 stabilization of linear systems subject to input saturations. *IEEE Control Systems Letters*, 2023, 7: 1646 – 1651.
- [19] PEREIRA R L, DE OLIVEIRA M S. Improved H_2 and L_2 control designs for discrete-time LPV/LFR systems. *International Journal of Control*, 2023, 96(7): 1786 – 1796.
- [20] BRIAT C. Robust stability and stabilization of uncertain linear positive systems via integral linear constraints: L_1 -gain and L_∞ -gain characterization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23(17): 1932 – 1954.
- [21] HADDAD W M, CHELLABOINA V S, RAJPUROHIT T. Dissipativity theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(5): 747 – 751.
- [22] BERMAN A, PLEMMONS R J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1994.
- [23] CHEN Y, BOLZERN P, COLANERI P. Stability, L_1 performance and state feedback design for linear systems in ice-cream cones. *International Journal of Control*, 2021, 94(3): 784 – 792.
- [24] CASTELAN E B, HENNET J C. On invariant polyhedra of continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(11): 1680 – 1685.

作者简介:

邱宏凌 博士研究生, 目前研究方向为正系统理论及其应用, E-mail: lingge945494@163.com;

沈俊 教授, 博士, 目前研究方向为正系统理论及其应用, E-mail: junshen2009@gmail.com.