

# 符号网络下边系统的强结构能控性

薛鸿萍, 关永强<sup>†</sup>, 路张昕

(西安电子科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710071)

**摘要:** 本文针对符号网络研究了边系统的强结构能控性问题. 首先, 基于领导者-跟随者框架, 构建了边动力学系统的强结构能控性模型, 并通过分析系统矩阵得到了边系统强结构能控的基本性质; 其次, 引入了边符号图的颜色变化规则, 在此基础上, 分析了边权符号特性对强结构能控性的影响, 得到了刻画边系统强结构能控的图论充分条件. 结果表明, 当边系统的领导者集合是一个符号零迫集时, 该系统是强结构能控的; 此外, 构造了一个符号零迫集搜索算法, 该算法能够有效识别出任意给定边图的符号零迫集; 最后, 通过数值仿真例子验证了所得理论结果的有效性.

**关键词:** 多智能体系统; 边动力学; 符号网络; 强结构能控性; 符号零迫集

**引用格式:** 薛鸿萍, 关永强, 路张昕. 符号网络下边系统的强结构能控性. 控制理论与应用, 2026, 43(4): 747–754  
DOI: 10.7641/CTA.2024.40259

## Strong structural controllability of edge systems under signed networks

XUE Hong-ping, GUAN Yong-qiang<sup>†</sup>, LU Zhang-xin

(School of Mechano-electronic Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** This paper investigates the strong structural controllability of edge systems under signed networks. Firstly, based on the leader-follower framework, the model of the strong structural controllability for edge dynamic systems is established, and the basic property of the strong structural controllability for edge systems is obtained by analyzing the system matrix. Secondly, the color change rule of the edge signed graph is introduced, based on which, by analyzing the influence of the edge weighted signed property on the strong structural controllability, the graph theoretic sufficient condition for portraying the strong structural controllability of edge systems is obtained. The result shows that the edge system is strongly structurally controllable when its leader set is a signed zero forcing set. In addition, a search algorithm for the signed zero forcing sets is constructed, which can effectively identify the signed zero forcing sets of any given edge graph. Finally, the simulation examples are given to demonstrate the effectiveness of the theoretical results.

**Key words:** multi-agent system; edge dynamics; signed networks; strong structural controllability; signed zero forcing sets

**Citation:** XUE Hongping, GUAN Yongqiang, LU Zhangxin. Strong structural controllability of edge systems under signed networks. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(4): 747–754

## 1 引言

近年来, 能控性作为多智能体系统分布式协同控制研究领域中的一个基本而又重要的问题, 吸引了来自数学、物理、生物、计算机等不同领域专家学者的广泛关注. 目前相关研究已取得了丰硕的成果, 并广泛应用于脑网络重构<sup>[1]</sup>、多机器人协同控制<sup>[2]</sup>、智能电网调度<sup>[3]</sup>等多个领域中.

多智能体系统的能控性问题是Tanner于2004年首次在文献[4]中提出, 作者通过分析系统矩阵(拉普拉斯矩阵)的特征值和特征向量, 得到了判定能控性

的代数充要条件. 受此启发, 许多学者对多智能体系统的能控性进行了深入研究, 取得了一些成果<sup>[5–17]</sup>. 特别地, 一些学者采用图论的工具和方法对多智能体系统的能控性进行了探索. 例如, 文献[8–9]基于图的等价划分工具研究了多智能体系统的能控性, 得到了判定系统能控的图论条件. 文献[10–11]基于图的几乎等价划分和距离划分工具分别得到了系统能控子空间的上界和下界. 上述研究主要针对合作网络, 即智能体之间的交互是合作关系. 事实上, 合作与对抗(竞争)是驱动自然社会与生态系统动态演化的重要因素,

收稿日期: 2024–05–07; 录用日期: 2024–11–05.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: guan-jq@163.com; Tel.: +86 13772115926.

本文责任编辑: 陈谋.

国家自然科学基金项目(62073253, 62036002)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62073253, 62036002).

现实世界中智能体之间的对抗(竞争)普遍存在. 例如, 在社交网络<sup>[12]</sup>中, 个体间存在朋友(合作)关系和敌对(对抗)关系. 这类具有合作对抗交互作用的网络可以用符号网络描述. 符号网络下能控性的研究不仅能够丰富和拓展多智能体系统的理论研究范畴, 同时也能为军事应用、工业发展、生产生活等诸多领域提供理论指导和帮助. 近年来, 针对符号网络的能控性问题也已取得了重要的进展. 例如, 文献[13]研究了符号网络下多智能体系统的能控性, 利用图的广义等价划分工具刻画了能控子空间的上界. 文献[14]研究了结构平衡、反平衡和特殊严格不平衡符号网络的能控性, 并将几乎等价划分推广到了有向加权符号网络上. 文献[15]研究了保证符号网络能控的领导者选择问题, 并提供了一个启发式的领导者选择算法. 文献[16]研究了切换符号网络的能控性, 给出了网络能控的图论充分条件. 文献[17]研究了笛卡尔乘积符号网络的能控性, 得到了判定网络能控的代数充要判据.

上述结果均考虑的是系统参数值固定情形下的能控性问题. 实际中, 在系统结构固定的情况下, 系统参数值受到多种因素影响并非固定, 即系统的参数值是可变的, 也可能无法精确地知道. 因此许多学者转而研究系统的结构能控性. 结构能控性的概念是由Lin于1974年首次在文献[18]中提出的, 作者研究了单输入线性时不变系统的结构能控性, 并给出了图论充要判据. 在此基础上, 文献[19]将其结果扩展至多输入的线性时不变系统中. 注意到上述研究有一个共同的假设, 即系统矩阵的所有非零参数是相互独立的. 然而, 在一些实际应用中, 所有非零参数相互独立的要求并不一定被满足. 例如, 在无向网络中, 系统矩阵是对称的. 为了解决这一问题, 有学者提出了线性参数化方法. 例如, 文献[20]研究了一类满足二元假设的线性参数化系统的结构能控性, 给出了系统结构能控的图论条件. 文献[21]基于线性参数化方法, 得到了单领导者系统结构能控的充要判据, 并将其结果推广到了多领导者系统中. 此外, 不同于单一矩阵的情形, 一些学者也研究了具有矩阵簇形式的结构能控性. 例如, 文献[22]利用零迫集研究了具有矩阵簇的有向网络的结构能控性, 得到了判定网络结构能控的充要判据. 文献[23]利用平衡集研究了具有矩阵簇的无向网络的结构能控性, 提出了一种构造结构能控网络的方法.

值得注意的是, 上述研究均聚焦于节点动力学系统. 然而, 在实际中, 一些动态过程通常发生在网络的连接边上. 例如, 在交通网络<sup>[24]</sup>中, 将道路交叉路口视为节点, 交通道路视为边, 交通流可以看作是边的状态, 它们随时间不断变化. 因此, 针对边动力学系统的协同控制研究也具有重要的理论价值和实际意义. 近年来, 针对边动力学系统的能控性研究已取得了一

些重要的结果<sup>[25-28]</sup>. 文献[25]研究了具有边动力学的复杂网络的能控性, 并给出了使得边动力学系统能控的最小驱动边数. 文献[26]研究了边动力学与节点动力学耦合的一阶多智能体系统的能控性, 得到了系统能控的代数条件. 文献[27]研究了具有边动力学的复杂网络的目标能控性, 提出了一种解决目标边控制问题的算法. 文献[28]研究了符号网络的边能控性, 基于图的距离和等价划分工具得到了边能控子空间的上下界, 并分析了边能控性与节点能控性的关系.

事实上, 强结构能控性具有严格苛刻的要求(对系统矩阵非零元素的任意选择都要使得系统能控), 同时, 符号网络的边权符号特性也给强结构能控性研究带来了极大的挑战. 目前, 关于符号网络下边系统能控性的研究成果寥寥. 特别地, 对于符号网络下边系统的强结构能控性研究未见研究报道. 本文针对符号网络研究了边系统的强结构能控性, 旨在给出使得边系统强结构能控的图论条件. 本文主要贡献如下:

1) 基于领导者-跟随者框架, 构建边动力学系统的强结构能控性模型, 通过对边拉普拉斯矩阵分析得到了边系统强结构能控的基本性质. 该性质表明, 在任意方向下, 当在节点图对应的边图中选择相同的领导者节点时, 边系统的强结构能控性是等价的. 这意味着边系统的强结构能控性不受节点图方向的影响;

2) 利用平衡集得到了一个判定边系统能控的代数条件. 该条件是从系统矩阵的非奇异性子矩阵的角度出发, 通过领导者角色的分析和选择实现边系统能控. 进一步, 本文通过引入边符号图的颜色变化规则, 结合平衡集的结论, 得到了一个刻画边系统强结构能控的图论充分条件. 相比代数条件, 该条件更加直观有效, 能够通过观察边系统对应的拓扑图, 从而有效确定领导者节点以实现边系统的强结构能控;

3) 对于任意给定的边图, 本文提供了寻找符号零迫集的有效搜索算法. 该算法主要分为两部分. 首先, 在每次迭代中, 通过选择最大数目的白色节点将其颜色变为黑色. 经过多次迭代直至获得符号零迫集; 其次, 通过删除所得符号零迫集中的冗余节点进而优化所得符号零迫集. 对于任意给定的边图, 该算法能够有效输出符号零迫集; 从而, 为边系统实现强结构能控提供帮助.

## 2 预备知识

### 2.1 符号节点图

令 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 表示无向节点图, 它由节点集 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 、边集 $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 和邻接矩阵 $\mathcal{A} = [\tilde{a}_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 构成. 其中, 如果 $e_k = (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , 则 $\tilde{a}_{ij} = w_{e_k}$  ( $w_{e_k}$ 表示 $e_k$ 的权重); 否则 $\tilde{a}_{ij} = 0$ . 令 $W = \text{diag}\{w_{e_1}, w_{e_2}, \dots, w_{e_m}\} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}| \times |\mathcal{E}|}$ 表示边的权重矩阵(简称边权矩阵).

令  $G = (\mathcal{G}, \theta)$  表示无向符号节点图, 它由无向(无符号)节点图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  和符号映射  $\theta: \mathcal{E} \rightarrow \{+, -\}$  构成. 其中  $\mathcal{G}$  被称为  $G$  的底层图,  $\theta$  用来反映智能体之间的合作或对抗关系, 对于  $e_k = (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , 如果  $\theta(e_k) = +$ , 则表示  $v_i$  和  $v_j$  之间为合作关系; 否则  $\theta(e_k) = -$ , 表示  $v_i$  和  $v_j$  之间为对抗关系.  $A_v = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为  $G$  的邻接矩阵, 如果  $e_k = (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , 则  $a_{ij} = \theta(e_k)w_{e_k}$ ; 否则  $a_{ij} = 0$ .  $G$  的拉普拉斯矩阵定义为  $L_v = D_v - A_v$ , 其中  $D_v = \text{diag} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{1j}|, \sum_{j=1}^n |a_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^n |a_{nj}| \right\}$  表示  $G$  的度矩阵. 对于  $G$  中的一条边  $e_k = (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ ,  $v_i$  和  $v_j$  被称为  $e_k$  的两个端点,  $(v_i, e_k)$  表示  $e_k$  和  $v_i$  之间的关联,  $I(G)$  表示  $G$  的关联集.

**定义 1**<sup>[28]</sup> 给定一个节点图  $G$ , 它的方向是一个映射  $\eta: I(G) \rightarrow \{\pm 1\}$ , 其满足以下两个条件: 1)  $\eta(v_t, e_k) = 0$ , 如果  $v_t \neq v_i, v_j$ ; 2)  $\eta(v_i, e_k)\eta(v_j, e_k) = -\theta(e_k)$ . 对于一个给定的方向  $\eta$ , 为  $G$  中的每条边都分配两个箭头(分配原则为: 如果  $\eta(v_i, e_k) = +1$ , 则在节点  $v_i$  处的箭头指向远离  $v_i$  的方向; 如果  $\eta(v_i, e_k) = -1$ , 则在节点  $v_i$  处的箭头指向进入  $v_i$  的方向), 那么称这种具有双箭头边的图为  $G$  的方向图, 记作  $G_\eta = (G, \eta)$ .

**定义 2**<sup>[28]</sup> 给定一个节点图  $G$  和固定方向  $\eta$ , 关联矩阵表示为  $H = [h_{ik}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , 其中如果节点  $v_i$  是  $e_k$  的一个端点, 则  $h_{ik} = \eta(v_i, e_k)$ ; 否则  $h_{ik} = 0$ .

### 2.2 符号边图

给定一个节点图  $G$ , 其对应的边图记为  $G_e = (\mathcal{G}_e, \theta_e)$ . 其中无向(无符号)边图  $\mathcal{G}_e = (\mathcal{V}_e, \mathcal{E}_e, \mathcal{A}_e)$  称为  $G_e$  的底层图,  $\mathcal{V}_e = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  表示其节点集(注意,  $G_e$  中的节点  $e_i \in \mathcal{V}_e$  即为  $G$  中的边  $e_i \in \mathcal{E}$ ),  $\mathcal{E}_e = \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$  表示其边集,  $\mathcal{A}_e$  表示其邻接矩阵.  $\theta_e$  为边集  $\mathcal{E}_e$  到集合  $\{+, -\}$  的映射, 即  $\theta_e: \mathcal{E}_e \rightarrow \{+, -\}$ .  $\mathcal{N}_{e_i} = \{e_j: l_k = (e_j, e_i) \in \mathcal{E}_e\}$  表示  $e_i$  的邻居集.  $\text{dist}(e_i, e_j)$  表示  $e_i$  到  $e_j$  的距离, 即从  $e_i$  到  $e_j$  经过的最少边的数目. 给定一个节点子集  $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_e$ , 任意一个节点  $e_i$  到该子集的距离表示为  $\text{dist}(e_i, \mathcal{V}_0) = \min\{\text{dist}(e_i, e_j): e_j \in \mathcal{V}_0\}$ ; 到  $\mathcal{V}_0$  的距离为  $d$  的节点构成的集合记为  $\mathcal{N}(\mathcal{V}_0, d) = \{e_i: \text{dist}(e_i, \mathcal{V}_0) = d, e_i \in \mathcal{V}_e\}$ .

**定义 3** 给定一个节点图  $G$  和固定方向  $\eta$ , 则在方向  $\eta$  下  $G_e$  的邻接矩阵  $A_e = [\bar{a}_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  定义为: 如果  $l_k = (e_j, e_i) \in \mathcal{E}_e$ ,  $v_t$  为  $e_i$  和  $e_j$  的一个公共端点, 则  $\bar{a}_{ij} = w_{e_i}^{\frac{1}{2}} \eta(v_t, e_i) w_{e_j}^{\frac{1}{2}} \eta(v_t, e_j)$ ; 否则  $\bar{a}_{ij} = 0$ . 在方向  $\eta$  下  $G_e$  的拉普拉斯矩阵  $L_e = [\bar{l}_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  定义为  $L_e = 2W + A_e$ .

**注 1** 注意到边拉普拉斯矩阵  $L_e = 2W + A_e$  的定义

与符号节点图中的节点拉普拉斯矩阵  $L_v = D_v - A_v$  的定义相类似. 其中, 矩阵  $2W$  承担着边图  $G_e$  中的边度矩阵的角色, 在节点图  $G$  中度矩阵  $D_v$  的第  $i$  个对角元表示的是节点  $v_i$  与其邻居间的连接边权值的绝对值之和, 而在边图  $G_e$  中矩阵  $2W$  的第  $i$  个对角元表示的是边  $e_i$  的端点个数倍的连接边权值的绝对值; 矩阵  $A_e$  则承担着与  $A_v$  相同的角色, 分别表示边邻接矩阵和节点邻接矩阵.

**引理 1**<sup>[28]</sup> 给定一个节点图  $G$  和固定方向  $\eta$ , 其对应的关联矩阵为  $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , 则节点拉普拉斯矩阵  $L_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  和边拉普拉斯矩阵  $L_e \in \mathbb{R}^{m \times m}$  分别满足:  $L_v = HWH^T$ ,  $L_e = W^{\frac{1}{2}}H^T H W^{\frac{1}{2}}$ .

### 3 模型建立

考虑一个具有  $n$  个智能体  $m$  条连接边的多智能体系统, 其对应的边图为  $G_e$ . 假设  $\mathcal{V}_e$  被划分为领导者集合  $\mathcal{V}_{e_l}$  和跟随者集合  $\mathcal{V}_{e_f}$ . 不失一般性, 假设  $G_e$  中的前  $p$  ( $p < m$ ) 个节点为领导者, 即  $\mathcal{V}_{e_l} = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ , 剩余的节点为跟随者, 即  $\mathcal{V}_{e_f} = \mathcal{V}_e \setminus \mathcal{V}_{e_l}$ .

在领导者-跟随者的框架下, 领导者受到外部控制输入的直接作用, 其任务是通过邻居交互来影响跟随者从而引导系统的整体状态, 故领导者受其自身、邻居和外部控制输入的共同影响; 跟随者则只受其自身和邻居的影响. 因此, 节点  $e_i$  的动力学方程描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_e^i(t) = -2w_{e_i}x_e^i(t) - \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij}x_e^j(t) + u_e^i(t), & i \in \mathcal{V}_{e_l}, \\ \dot{x}_e^i(t) = -2w_{e_i}x_e^i(t) - \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij}x_e^j(t), & i \in \mathcal{V}_{e_f}, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_e^i(t) \in \mathbb{R}$  为  $e_i$  的状态,  $u_e^i(t) \in \mathbb{R}$  为作用在  $e_i$  上的外部控制输入.

令  $x_e(t) = [x_e^1(t) \ x_e^2(t) \ \dots \ x_e^m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $u_e(t) = [u_e^1(t) \ u_e^2(t) \ \dots \ u_e^p(t)]^T \in \mathbb{R}^p$ , 则边系统的动力学方程的紧凑形式表示为

$$\dot{x}_e(t) = -L_e x_e(t) + B_e u_e(t), \quad (2)$$

其中:  $L_e \in \mathbb{R}^{m \times m}$  为边拉普拉斯矩阵,  $B_e = [I_p \ 0]^T \in \mathbb{R}^{m \times p}$  为控制输入矩阵.

**定义 4** 给定边系统(2), 如果对于任意的边权矩阵  $W$  使得矩阵对  $(L_e, B_e)$  都是能控的, 则称边系统(2)是强结构能控的.

**引理 2**<sup>[28]</sup> 给定一个节点图  $G$ , 其对应的边图为  $G_e$ . 则当  $G_e$  中领导者固定时, 在任意方向  $\eta$  下, 边系统(2)的能控性是等价的.

若在给定方向  $\eta_1$  下, 边系统(2)是强结构能控的. 根据定义4和引理2可得, 在另一给定方向  $\eta_2$  下, 边系统(2)也是强结构能控的, 即边系统(2)的强结构能控

性不受方向的影响. 因此有以下推论成立.

**推论 1** 给定一个节点图  $G$ , 其对应的边图为  $G_e$ , 则当  $G_e$  中领导者固定时, 在任意方向  $\eta$  下, 边系统 (2) 的强结构能控性是等价的.

### 4 主要结论

#### 4.1 符号零迫集

下面引入边符号图  $G_e$  的颜色变化规则. 设  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_e$ , 且  $\mathcal{V}_1$  和  $\mathcal{V}_2$  之间存在一组非空的边集, 记为  $(\mathcal{E}_e)_{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2} = \{(e_i, e_j) \in \mathcal{E}_e, e_i \in \mathcal{V}_1, e_j \in \mathcal{V}_2\}$ , 则由集合  $(\mathcal{E}_e)_{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2}$  中不存在公共端点的边构成的子集, 记为  $\mathcal{M}$ , 称之为  $\mathcal{V}_1$  和  $\mathcal{V}_2$  之间的匹配. 如果  $\mathcal{V}_1$  和  $\mathcal{V}_2$  的基数与匹配  $\mathcal{M}$  的基数相等, 即  $|\mathcal{M}| = |\mathcal{V}_1| = |\mathcal{V}_2| = k$ , 称该匹配是完美匹配. 对于  $\mathcal{V}_1$  中的节点  $e_i$ , 令  $\mathbf{s}_i \in \{0, +, -\}^k$  表示  $e_i$  与  $\mathcal{V}_2$  中所有节点  $e_j$  的连接边的符号向量, 即如果第  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, k$ ) 条边  $(e_i, e_j)$  的符号为正, 则  $(\mathbf{s}_i)_l = +$ ; 如果  $(e_i, e_j)$  的符号为负, 则  $(\mathbf{s}_i)_l = -$ ; 否则  $(\mathbf{s}_i)_l = 0$ . 任意两个符号向量  $\mathbf{s}_i$  与  $\mathbf{s}_j$  之间的加法运算规则为: 如果分量  $(\mathbf{s}_i)_l$  与  $(\mathbf{s}_j)_l$  的元素相同, 则加法运算结果为对应的元素; 如果分量  $(\mathbf{s}_i)_l$  与  $(\mathbf{s}_j)_l$  的元素存在“0”, 则加法运算结果为另一不为“0”的元素; 如果分量  $(\mathbf{s}_i)_l$  与  $(\mathbf{s}_j)_l$  的元素同时包含“+”和“-”, 则加法运算结果为“?” (“?”表示加法运算后的结果不确定, 可能为元素“0”, “+”或“-”; 且“?”与任意元素相加仍为“?”). 例如:  $\mathbf{s}_1 = [+ \ + \ 0]^T$ ,  $\mathbf{s}_2 = [0 \ 0 \ +]^T$ ,  $\mathbf{s}_3 = [0 \ + \ -]^T$ , 则  $\mathbf{s}_2$  与  $\mathbf{s}_3$  加法运算的结果为  $[0 \ + \ ?]^T$ , 即  $\mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = [0 \ + \ ?]^T$ ,  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  与  $\mathbf{s}_3$  加法运算的结果为  $[+ \ + \ ?]^T$ , 即  $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = [+ \ + \ ?]^T$ .

**定义 5** 给定边图  $G_e$ , 令该图中所有节点的初始颜色为黑色或白色. 初始黑色节点集记为  $\mathcal{S}_e$ , 称为颜色集; 初始白色节点集记为  $\mathcal{Q}_e$  ( $\mathcal{Q}_e = \mathcal{V}_e \setminus \mathcal{S}_e$ ). 设  $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{S}_e, \mathcal{X}_2 \subseteq \mathcal{Q}_e$  且  $|\mathcal{X}_1| = |\mathcal{X}_2| = k$ . 如果  $\mathcal{X}_1$  和  $\mathcal{X}_2$  之间存在一个完美匹配, 且仅当系数  $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  全为零时, 以下等式成立:

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i \mathbf{s}_i = a_k \mathbf{s}_k, \tag{3}$$

则称  $\mathcal{X}_2$  是  $\mathcal{X}_1$  的一个完美符号邻居.

符号颜色变化过程:  $\mathcal{S}_e$  是边图  $G_e$  中的颜色集, 且  $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{S}_e, \mathcal{X}_2 \subseteq \mathcal{Q}_e$ . 如果  $\mathcal{X}_2$  是  $\mathcal{X}_1$  唯一的完美符号邻居, 则将  $\mathcal{X}_2$  中所有节点颜色变为黑色, 即  $\mathcal{X}_1$  迫使  $\mathcal{X}_2$  变为黑色, 记作  $\mathcal{X}_1 \xrightarrow{c} \mathcal{X}_2$ . 重复利用上述颜色变化规则直至  $G_e$  中不再有节点的颜色发生改变, 这个过程称为符号颜色变化过程. 当符号颜色变化过程结束时, 将所有黑色节点构成的集合记为  $\mathcal{D}_c(\mathcal{S}_e)$ . 如果  $\mathcal{D}_c(\mathcal{S}_e) = \mathcal{V}_e$ , 称颜色集  $\mathcal{S}_e$  为符号零迫集.

**例 1** 考虑一个由6个节点和7条连接边构成的

节点图  $G$ , 如图1(a)所示. 在固定的方向  $\eta$  下,  $G$  对应的方向图为  $G_\eta$ , 如图1(b)所示.  $G$  对应的边图为  $G_e$ , 如图1(c)所示. 取  $G_e$  中的颜色集为  $\{e_1, e_3, e_5\}$ , 如图1(d)所示. 由于集合  $\{e_1, e_3\}$  与  $\{e_2, e_4\}$  间存在一个完美匹配  $\mathcal{M} = \{(e_1, e_2), (e_3, e_4)\}$ , 且  $\mathbf{s}_1 = [+ \ +]^T, \mathbf{s}_3 = [- \ +]^T$ , 仅当  $a_1 = a_3 = 0$  时, 等式  $a_1 \mathbf{s}_1 = a_3 \mathbf{s}_3$  成立, 因此  $\{e_2, e_4\}$  作为  $\{e_1, e_3\}$  唯一的完美符号邻居而被迫染成黑色, 如图1(e)所示. 随后剩余白色节点  $\{e_6, e_7\}$  作为  $\{e_4, e_5\}$  唯一的完美符号邻居而被迫染成黑色, 如图1(f)所示. 至此  $G_e$  中所有节点都被染成黑色, 符号颜色变化过程结束. 因此,  $\{e_1, e_3, e_5\}$  是  $G_e$  的一个符号零迫集.

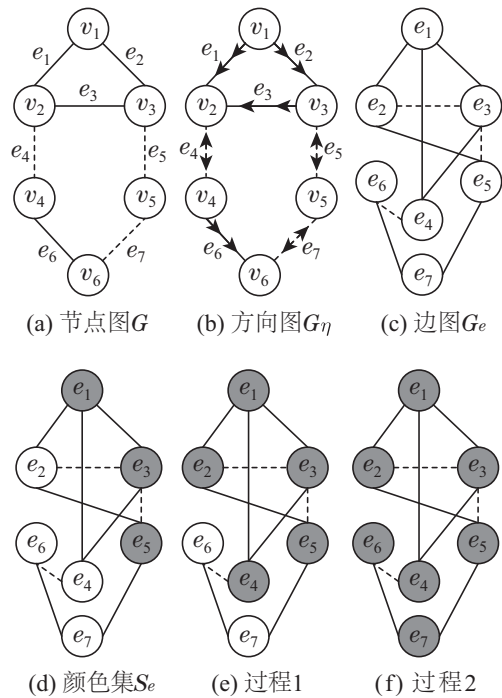


图 1 符号颜色变化过程, 其中实线和虚线分别表示正边和负边

Fig. 1 Process of signed color change. Where the solid and dashed lines represent the positive and negative edges, respectively

#### 4.2 平衡集

给定边图  $G_e$ , 为其中的每个节点  $e_i \in \mathcal{V}_e$  都分配一个变量  $v_{e_i}$ . 令  $\mathcal{J}_e \subseteq \mathcal{V}_e, \mathcal{U}_e = \mathcal{V}_e \setminus \mathcal{J}_e$ , 若节点  $e_j \in \mathcal{J}_e$  对应的变量为零, 即  $v_{e_j} = 0, e_j \in \mathcal{J}_e$ ; 节点  $e_k \in \mathcal{U}_e$  对应的变量初始是不确定的, 则称  $\mathcal{J}_e$  为零节点集. 令  $\mathcal{J}_e$  中的每个节点都伴随着一个平衡方程

$$\sum_{e_k \in \mathcal{N}_{e_j} \setminus \mathcal{J}_e} \bar{l}_{jk} v_{e_k} = 0. \tag{4}$$

零扩展过程<sup>[23]</sup>: 设  $\mathcal{P}_e$  是边图  $G_e$  中的零节点集, 且  $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{P}_e, \mathcal{Y}_2 = \mathcal{N}(\mathcal{Y}_1, 1) \setminus \mathcal{P}_e$ . 如果集合  $\mathcal{Y}_1$  中节点的平衡方程能够使得  $\mathcal{Y}_2$  中所有节点都变为零节点, 即  $v_{e_k} = 0, e_k \in \mathcal{Y}_2$ , 称  $\mathcal{Y}_1$  通过平衡方程迫使  $\mathcal{Y}_2$  变为零, 记作  $\mathcal{Y}_1 \xrightarrow{z} \mathcal{Y}_2$ , 此时新的零节点集合为  $\mathcal{P}'_e = \mathcal{P}_e \cup \mathcal{Y}_2$ .

重复利用上述零扩展规则直至 $G_e$ 中不再有新的零节点出现, 这个过程称为零扩展过程. 当零扩展过程结束时, 将所有零节点构成的集合记为 $\mathcal{D}_z(\mathcal{P}_e)$ . 如果 $\mathcal{D}_z(\mathcal{P}_e) = \mathcal{V}_e$ , 称零节点集 $\mathcal{P}_e$ 为平衡集.

**注2** 注意到, 当 $(L_e)_{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2}(\mathbf{v})_{\mathcal{Y}_2} = \mathbf{0}$ ,  $(L_e)_{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2}$ 是满秩时, 集合 $\mathcal{Y}_1$ 可以通过平衡方程迫使集合 $\mathcal{Y}_2$ 中所有节点变为零节点.

### 4.3 边强结构能控与符号零迫集

**引理3**<sup>[29]</sup> 考虑一个矩阵 $L_e$ , 如果 $L_e$ 的一个特征向量 $\beta$ 的第 $i$ 个分量 $\beta_{e_i}$ 为零, 那么 $\beta_{e_j}, e_j \in \mathcal{N}_{e_i}$ 的权重之和也为零, 即 $\sum_{e_j \in \mathcal{N}_{e_i}} \bar{l}_{ij} \beta_{e_j} = 0$ .

引理3意味着平衡方程对于特征向量 $\beta$ 中的零分量也是成立的, 因此以下推论成立.

**推论2** 给定边图 $G_e$ , 令 $\beta$ 是 $L_e$ 的一个非零特征向量, 如果 $\mathcal{T}_e$ 是特征向量 $\beta$ 中零分量的集合, 则对于所有的 $e_i \in \mathcal{D}_z(\mathcal{T}_e)$ 有 $\beta_{e_i} = 0$ .

**定理1** 给定边图 $G_e$ , 如果领导者集合 $\mathcal{V}_{e_1}$ 是一个平衡集, 则边系统(2)是能控的.

**证** 假设领导者集合 $\mathcal{V}_{e_1}$ 是一个平衡集, 而边系统(2)是不能控的, 那么矩阵 $L_e$ 存在一个非零特征向量 $\beta$ 使得 $\beta_{e_j} = 0, e_j \in \mathcal{V}_{e_1}$ . 由推论2可得,  $\beta_{e_i} = 0, e_i \in \mathcal{D}_z(\mathcal{V}_{e_1})$ . 又因为 $\mathcal{V}_{e_1}$ 是一个平衡集, 故有 $\mathcal{D}_z(\mathcal{V}_{e_1}) = \mathcal{V}_e$ . 因此 $\beta = \mathbf{0}$ , 这与 $\beta$ 为非零特征向量相矛盾. 所以边系统(2)是能控的. 证毕.

**定理2** 给定一个具有 $n$ 个节点 $m$ 条连接边的节点图 $G$ 和一个方向 $\eta$ , 对应的边图为 $G_e$ . 如果领导者集合 $\mathcal{V}_{e_1}$ 是一个符号零迫集, 则边系统(2)是强结构能控的.

**证** 为 $G_e$ 中的所有节点 $e_i \in \mathcal{V}_e$ 都分配一个变量 $v_{e_i}$ , 使得节点 $e_j \in \mathcal{V}_{e_1}$ 对应的变量都为零, 即 $v_{e_j} = 0, e_j \in \mathcal{V}_{e_1}$ , 且 $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_{e_1}, \mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_{e_1}$ . 如果 $\mathcal{V}_{e_1}$ 是一个符号零迫集, 根据颜色变化规则,  $\mathcal{V}_1$ 迫使 $\mathcal{V}_2$ 中所有节点颜色变为黑色, 这意味着 $\mathcal{V}_2$ 是 $\mathcal{V}_1$ 的唯一完美符号邻居, 即 $\mathcal{V}_1$ 中每个节点至少有一个邻居在 $\mathcal{V}_2$ 中, 且 $\mathcal{V}_1$ 与 $\mathcal{V}_2$ 的连接边的符号向量满足仅当系数 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 都为零时, 等式(3)成立. 因此矩阵 $(L_e)_{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2}$ 一定不存在零行(列)及线性相关的某些行(列), 且对于任意的边权矩阵 $W$ , 矩阵 $(L_e)_{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2}$ 都是非奇异的. 又因为 $(\mathbf{v})_{\mathcal{V}_1} = \mathbf{0}$ 且 $\mathcal{V}_1$ 中所有节点变量都满足平衡方程(4), 则 $(L_e)_{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2}(\mathbf{v})_{\mathcal{V}_2} = \mathbf{0}$ , 因此 $(\mathbf{v})_{\mathcal{V}_2} = \mathbf{0}$ . 重复应用颜色变化规则直至 $G_e$ 中所有节点都变为黑色, 此时 $v_{e_i} = 0, e_i \in \mathcal{V}_e$ . 故对于任意边权矩阵 $W$ ,  $\mathcal{V}_{e_1}$ 都是一个平衡集. 根据定理1和定义4, 边系统(2)是强结构能控的.

证毕.

定理2给出了一个判定边系统(2)是否为强结构能

控的充分条件. 根据该条件, 通过观察边系统对应的拓扑图结构, 选择特定的节点作为领导者, 就能够实现边系统(2)的强结构能控. 下面构造了一个符号零迫集搜索算法来识别出任意给定边图 $G_e$ 的符号零迫集.

表1 算法1: 任意给定边图 $G_e$ 的符号零迫集

Table 1 Algorithm 1: Signed zero forcing sets of given edge graph  $G_e$

<b>Input:</b>	边图 $G_e$ 和任意节点子集 $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_e$
<b>Output:</b>	符号零迫集 $\bar{\mathcal{S}}$
1	$d = \max\{\text{dist}(e_i, \mathcal{V}_0) : e_i \in \mathcal{V}_e\}$
2	$\mathcal{S} = \emptyset, i = 1$
3	<b>while</b> $0 < i \leq d$ <b>do</b>
4	$\mathcal{V}_i = \mathcal{N}(\mathcal{V}_0, i) \setminus \mathcal{V}_0$
5	寻求最大子集 $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{V}_i$ 为 $\mathcal{V}_{i-1}$ 中一些子集的完美符号邻居
6	$\mathcal{S} = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_i$
7	$i = i + 1$
8	<b>end</b>
9	$\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{V}_e \setminus \mathcal{S}$
10	<b>for all</b> $e_i \in \bar{\mathcal{S}}$ <b>do</b>
11	<b>if</b> $\mathcal{D}_c(\bar{\mathcal{S}} \setminus e_i) = \mathcal{V}_e$ <b>then</b>
12	$\bar{\mathcal{S}} = \bar{\mathcal{S}} \setminus e_i$
13	<b>end</b>
14	<b>end</b>
15	<b>return</b> $\bar{\mathcal{S}}$

**注3** 算法1主要通过两个部分来得到任意给定边图 $G_e$ 的符号零迫集. 首先, 算法的第3-9步通过在集合 $\mathcal{V}_i (i = 1, 2, \dots, d)$ 中寻求最大子集 $\mathcal{S}_i$ 的方法得到了一个符号零迫集 $\bar{\mathcal{S}}$ . 但所得 $\bar{\mathcal{S}}$ 中可能存在冗余节点, 使得返回的符号零迫集具有较大的保守性. 因此, 进一步通过算法的第10-14步对 $\bar{\mathcal{S}}$ 中的冗余节点进行删除, 进而, 优化所得符号零迫集. 定理3严格证明了该算法能够有效识别出任意给定边图 $G_e$ 的符号零迫集.

**定理3** 给定边图 $G_e$ , 由算法1输出的集合记为 $\bar{\mathcal{S}}$ . 当 $\mathcal{V}_{e_1} = \bar{\mathcal{S}}$ 时, 则边系统(2)是强结构能控的.

**证** 给定边图 $G_e$ , 令 $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{V}_e \setminus \mathcal{S}$ 为初始黑色节点集合, 当第 $i (i = 1, 2, \dots, d)$ 次应用颜色变化规则时, 由于 $\mathcal{V}_{i-1}$ 中的某个子集仅有一个完美符号邻居 $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{V}_i$ , 因此该子集迫使 $\mathcal{S}_i$ 中所有节点的颜色变为黑色. 直至当第 $d$ 次应用颜色变化规则后,  $G_e$ 中所有节点颜色都变为黑色. 因此集合 $\bar{\mathcal{S}}$ 是一个符号零迫集. 由于此时 $\bar{\mathcal{S}}$ 中可能存在冗余节点 $e_i$ , 即 $\mathcal{D}_c(\bar{\mathcal{S}} \setminus e_i) = \mathcal{V}_e$ , 故删除冗余节点之后得到新的集合 $\bar{\mathcal{S}}$ 仍是一个符号零迫集, 因此,  $\mathcal{V}_{e_1}$ 是一个符号零迫集. 根据定理2, 边系统(2)是强结构能控的. 证毕.

**例2** 这里通过一个例子来验证算法1的有效性. 考虑一个由6个节点和6条连接边所构成的节点图 $G$ , 如图2(a)所示. 在固定的方向 $\eta$ 下,  $G$ 对应的方向图为

$G_\eta$ , 如图2(b)所示. 在方向 $\eta$ 下的 $G$ 对应的边图为 $G_e$ , 如图2(c)所示. 若向算法1输入图2(c)的边图 $G_e$ 和任意的节点子集 $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_e$ , 则将出现以下情况:

**情况1** 算法的第3-9步输出了一个符号零迫集 $\bar{\mathcal{S}}$ , 且 $\bar{\mathcal{S}}$ 中不包含冗余节点. 例如, 输入节点子集 $\mathcal{V}_0 = \{e_5, e_6\}$ , 则 $d = 2$ . 当 $i = 1$ 时,  $\mathcal{V}_1 = \{e_2, e_4\}$ , 最大子集 $\mathcal{S}_1 = \{e_2, e_4\}$ 为 $\mathcal{V}_0$ 的完美符号邻居, 此时 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ ; 当 $i = 2$ 时,  $\mathcal{V}_2 = \{e_1, e_3\}$ , 最大子集 $\mathcal{S}_2 = \{e_1, e_3\}$ 为 $\mathcal{V}_1$ 的完美符号邻居, 此时 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ . 最终 $\bar{\mathcal{S}} = \{e_5, e_6\}$ 为 $G_e$ 的一个符号零迫集且不包含冗余节点.

**情况2** 算法的第3-9步输出了一个符号零迫集 $\bar{\mathcal{S}}$ , 但 $\bar{\mathcal{S}}$ 中包含冗余节点. 例如, 输入节点子集 $\mathcal{V}_0 = \{e_2, e_5, e_6\}$ , 则 $d = 2$ . 当 $i = 1$ 时,  $\mathcal{V}_1 = \{e_1, e_4\}$ , 最大子集 $\mathcal{S}_1 = \{e_1, e_4\}$ 为子集 $\{e_2, e_5\} \subseteq \mathcal{V}_0$ 的完美符号邻居, 此时 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ ; 当 $i = 2$ 时,  $\mathcal{V}_2 = \{e_3\}$ , 最大子集 $\mathcal{S}_2 = \{e_3\}$ 为子集 $\{e_1\} \subseteq \mathcal{V}_1$ 的完美符号邻居, 此时 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ . 最终 $\bar{\mathcal{S}} = \{e_2, e_5, e_6\}$ 为 $G_e$ 的一个符号零迫集但其包含冗余节点. 进一步通过算法的第10-14步, 由于 $\mathcal{D}_c(\bar{\mathcal{S}} \setminus e_2) = \mathcal{V}_e$ , 故此时 $\bar{\mathcal{S}} = \{e_5, e_6\}$ ; 随后又由于 $\mathcal{D}_c(\bar{\mathcal{S}} \setminus e_5) \neq \mathcal{V}_e$ 且 $\mathcal{D}_c(\bar{\mathcal{S}} \setminus e_6) \neq \mathcal{V}_e$ , 故最终 $\bar{\mathcal{S}} = \{e_5, e_6\}$ 为 $G_e$ 的一个符号零迫集.

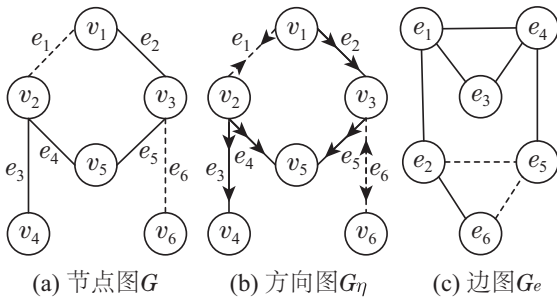


图2 算法1的输入图, 其中实线和虚线分别表示正边和负边

Fig. 2 Input graph of Algorithm 1, where the solid and dashed lines represent the positive and negative edges, respectively

### 5 仿真实例

本小节通过数值仿真例子来验证所得理论结果的有效性. 考虑一个由7个智能体和8条连接边构成的多智能体系统, 其对应的节点图为 $G$ , 如图3(a)所示. 在固定的方向 $\eta$ 下,  $G$ 对应的方向图为 $G_\eta$ , 如图3(b)所示.  $G$ 对应的边图为 $G_e$ , 如图3(c)所示. 取 $G_e$ 中的颜色集为 $\{e_1, e_2, e_3\}$ , 如图3(d)所示. 由于集合 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 与 $\{e_4, e_5, e_6\}$ 之间存在一个完美匹配 $\mathcal{M} = \{(e_1, e_5), (e_2, e_6), (e_3, e_4)\}$ , 且 $\mathbf{s}_1 = [0 \ -0]^T$ ,  $\mathbf{s}_2 = [-0 \ -]^T$ ,  $\mathbf{s}_3 = [+ \ -0]^T$ , 仅当 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 时,  $a_1 \mathbf{s}_1 + a_2 \mathbf{s}_2 = a_3 \mathbf{s}_3$ 成立, 因此 $\{e_4, e_5, e_6\}$ 作为 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 唯一的完美符号邻居而被迫染成黑色, 如图3(e)所示.

随后剩余白色节点 $\{e_7, e_8\}$ 作为 $\{e_5, e_6\}$ 唯一的完美符号邻居而被迫染成黑色, 如图3(f)所示. 至此 $G_e$ 中所有节点都被染成黑色, 符号颜色变化过程结束. 所以 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是 $G_e$ 的一个符号零迫集. 故在 $G_e$ 中选择节点集 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 作为领导者集合, 即 $\mathcal{V}_{e_1} = \{e_1, e_2, e_3\}$ .

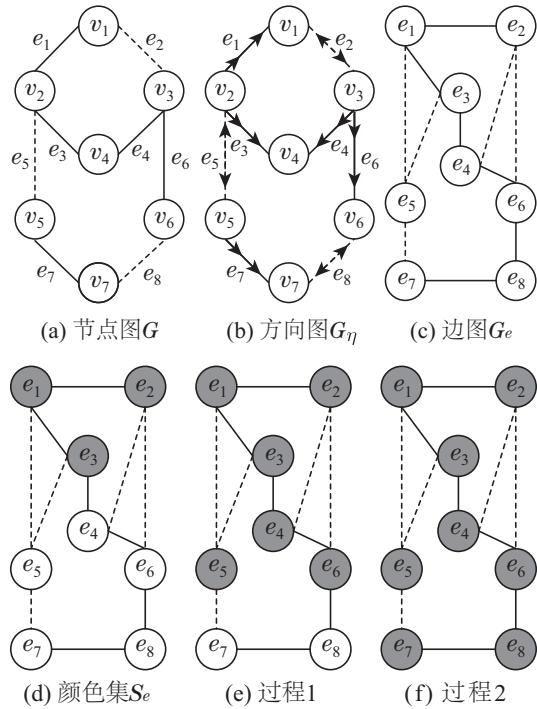


图3 符号颜色变化过程, 其中实线和虚线分别表示正边和负边

Fig. 3 Process of signed color change, where the solid and dashed lines represent the positive and negative edges, respectively

任取边权矩阵 $W_1 = \text{diag}\{1, 4, 4, 9, 1, 1, 9, 1\}$ . 则根据引理1, 其对应的边系统 $(L_{e_1}, B_e)$ 的边拉普拉斯矩阵 $L_{e_1}$ 和控制输入矩阵 $B_e$ 分别为

$$L_{e_1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & -6 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 6 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 18 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

现为 $G_e$ 中的所有节点 $e_i, i = 1, 2, \dots, 8$ 都分配一个变量 $v_{e_i}$ , 使得领导者集合 $\mathcal{V}_{e_1}$ 为零节点集. 由于 $L_{e_1}$ 中

的子矩阵

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

是非奇异的, 因此集合 $\mathcal{V}_{e_1}$ 中的节点通过平衡方程(4)迫使 $\{e_4, e_5, e_6\}$ 中所有节点都变为零节点, 即 $v_{e_i} = 0, i = 4, 5, 6$ ; 又由于 $L_{e_1}$ 中的子矩阵

$$L_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是非奇异的, 因此集合 $\{e_5, e_6\}$ 迫使 $\{e_7, e_8\}$ 中所有节点都变为零节点, 即 $v_{e_i} = 0, i = 7, 8$ . 至此 $G_e$ 中所有节点都为零节点, 即 $v_{e_i} = 0, i = 1, 2, \dots, 8$ , 零扩展过程结束. 所以领导者集合 $\mathcal{V}_{e_1}$ 是 $G_e$ 中的一个平衡集.

对于边系统 $(L_{e_1}, B_e)$ , 指定边初始状态和最终状态分别为 $x_e(0) = [5 \ 5 \ 5 \ 5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -5]^T$ 和 $x_e(5) = [2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , 在有限时间 $t = 5$ 内, 在如图 4 所示的外部控制输入 $u_e(t)$ 的作用下, 边系统 $(L_{e_1}, B_e)$ 的边状态轨迹如图 5 所示. 该仿真表明在外部控制输入 $u_e(t)$ 的作用下, 在有限时间 $t = 5$ 内可以使得边系统 $(L_{e_1}, B_e)$ 的边状态从指定的初始状态到达指定的最终状态, 因此边系统 $(L_{e_1}, B_e)$ 是能控的. 这验证了定理 1 的有效性.

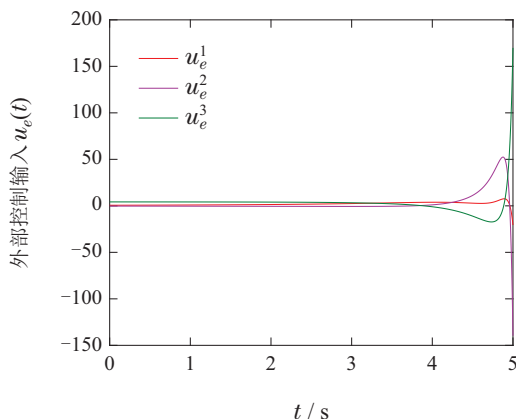


图 4 外部控制输入曲线

Fig. 4 Curves of the external control inputs

此外, 由于系统中智能体之间的互连关系以及连接边的符号是固定的, 只有连接边权值是变化的. 因此对于任意边权矩阵 $W$ , 系统矩阵 $L_e$ 中相应的子矩阵 $L_1$ 和 $L_2$ 也都是非奇异的. 这意味着在任意的边权矩阵 $W$ 所对应的边系统 $(L_e, B_e)$ 中, 领导者集合 $\mathcal{V}_{e_1}$ 都是一个平衡集. 因此根据定理 1 和定义 4, 边系统 $(L_e, B_e)$ 是强结构能控的. 这验证了定理 2 的有效性.

## 6 结论与展望

本文研究了符号网络下边系统的强结构能控性. 基于边符号图的颜色变化规则和零扩展规则分析边权符号特性对于边系统强结构能控性的影响, 给出了

一个刻画边系统强结构能控的图论充分条件. 进一步地, 对于任意给定的边图, 构造了能够有效选择一个符号零迫集的搜索算法. 本文所提供的条件不是必要的, 寻求使得边系统强结构能控的充要条件仍是一个有待解决的问题. 此外, 本文研究的是具有边动力学的多智能体系统, 未来将进一步研究具有节点动力学和边动力学耦合的多智能体系统的能控性问题.

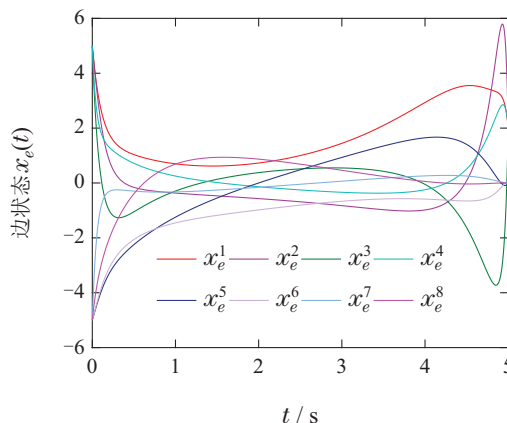


图 5 边系统 $(L_{e_1}, B_e)$ 的边状态轨迹

Fig. 5 Edge state trajectories of the edge system  $(L_{e_1}, B_e)$

## 参考文献:

- [1] GU S, PASQUALETTI F, CIESLAK M, et al. Controllability of structural brain networks. *Nature Communications*, 2015, 6(1): 8414.
- [2] SIEBER D, HIRCHE S. Human-guided multirobot cooperative manipulation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, 27(4): 1492 – 1509.
- [3] PIRANI M, TAYLOR J A. Controllability of AC power networks with DC lines. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2020, 36(2): 1649 – 1651.
- [4] TANNER H G. On the controllability of nearest neighbor interconnections. *The 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Nassau: IEEE, 2004: 2467 – 2472.
- [5] GUAN Yongqiang, JI Zhijian, ZHANG Lin, et al. Recent developments on controllability of multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(4): 421 – 431. (关永强, 纪志坚, 张霖, 等. 多智能体系统能控性研究进展. *控制理论与应用*, 2015, 32(4): 421 – 431.)
- [6] CHEN Shiming, WANG Pei, LI Haiying, et al. Controllable containment control of multi-agent systems with strongly connected subgraph. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(3): 401 – 407. (陈世明, 王培, 李海英, 等. 带强连通分支的多智能体系统可控包含控制. *控制理论与应用*, 2017, 34(3): 401 – 407.)
- [7] WANG Long, LU Kaihong, GUAN Yongqiang. Distributed optimization via multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(11): 1820 – 1833. (王龙, 卢开红, 关永强. 分布式优化的多智能体方法. *控制理论与应用*, 2019, 36(11): 1820 – 1833.)
- [8] RAHMANI A, JI M, MESBAHI M, et al. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 48(1): 162 – 186.
- [9] QU J, JI Z, SHI Y. The graphical conditions for controllability of multiagent systems under equitable partition. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 51(9): 4661 – 4672.

- [10] ZHANG S, CAO M, CAMLIBEL M K. Upper and lower bounds for controllable subspaces of networks of diffusively coupled agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 59(3): 745 – 750.
- [11] YAZICIOĞLU A Y, ABBAS W, EGERSTEDT M. Graph distances and controllability of networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(12): 4125 – 4130.
- [12] ALTAFINI C. Dynamics of opinion forming in structurally balanced social networks. *Plos One*, 2012, 7(6): e38135.
- [13] SUN C, HU G, XIE L. Controllability of multiagent networks with antagonistic interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(10): 5457 – 5462.
- [14] GUAN Y, WANG L. Controllability of multi-agent systems with directed and weighted signed networks. *Systems & Control Letters*, 2018, 116: 47 – 55.
- [15] SHE B, MEHTA S, TON C, et al. Controllability ensured leader group selection on signed multiagent networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 50(1): 222 – 232.
- [16] GUAN Y, TIAN L, WANG L. Controllability of switching signed networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 67(6): 1059 – 1063.
- [17] LIU B, HU M, HUANG J, et al. Controllability of cartesian product signed networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, 53(11): 7125 – 7137.
- [18] LIN C T. Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, 19(3): 201 – 208.
- [19] SHIELDS R, PEARSON J. Structural controllability of multiinput linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(2): 203 – 212.
- [20] LIU F, MORSE A S. Structural controllability of linear systems. *The 56th Annual Conference on Decision and Control*. Melbourne: IEEE, 2017: 3588 – 3593.
- [21] MEHRABADI M K, ZAMANI M, CHEN Z. Structural controllability of a consensus network with multiple leaders. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(12): 5101 – 5107.
- [22] MONSHIZADEH N, ZHANG S, CAMLIBEL M K. Zero forcing sets and controllability of dynamical systems defined on graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(9): 2562 – 2567.
- [23] MOUSAVI S S, HAERI M, MESBAHI M. On the structural and strong structural controllability of undirected networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 63(7): 2234 – 2241.
- [24] TETTAMANTI T, LUSPAY T, KULCSAR B, et al. Robust control for urban road traffic networks. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2013, 15(1): 385 – 398.
- [25] NEPUSZ T, VICSEK T. Controlling edge dynamics in complex networks. *Nature Physics*, 2012, 8(7): 568 – 573.
- [26] WANG Y, XIANG J, LI Y, et al. Controllability of dynamic-edge multi-agent systems. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2017, 5(3): 857 – 867.
- [27] LU F, YANG K, QIAN Y. Target control based on edge dynamics in complex networks. *Scientific Reports*, 2020, 10(1): 9991.
- [28] GUAN Y, REN S, LI A. Edge controllability of signed networks. *Automatica*, 2023, 147: 110694.
- [29] BIYIKOGLU T, LEYDOLD J, STADLER P F. Laplacian eigenvectors of graphs. *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer, 2007: 1 – 113.

#### 作者简介:

薛鸿萍 硕士研究生, 主要研究方向为多智能体系统能控性, E-mail: hpxue@stu.xidian.edu.cn;

关永强 副教授, 主要研究方向为多智能体系统分布式协同控制, E-mail: guan-jq@163.com;

路张昕 硕士研究生, 主要研究方向为多智能体系统能控性, E-mail: lu\_zx@stu.xidian.edu.cn.