

多源不确定条件下智能薄板主动振动抑制

国佳¹, 文新宇^{1†}, 李生权², 崔洋洋³

(1. 太原科技大学 电子信息工程学院, 山西 太原 030024;

2. 扬州大学 电气与能源动力工程学院, 江苏 扬州 225127; 3. 北京大学 工学院, 北京 100080)

摘要: 针对压电元件导致的输入不确定和加速度传感器滞后问题, 提出一种复合观测器方法实现智能薄板结构的主动振动抑制. 首先, 采用输出递推观测器估算出振动源延迟信号. 然后, 设计预估器补偿传感器造成的相位滞后, 得到等效振动估计值. 为避免估计值中的非规则信号产生较大的补偿输入不确定, 对估计值进行整形, 得到更光滑的振动补偿信息. 该方法充分利用平台的特性和规律, 给出了系统化的振动补偿设计方案. 利用李雅普诺夫方法, 证明了闭环系统一致最终有界. 最后, 通过仿真以及智能薄板结构振动平台实验, 验证了复合观测器振动抑制方法的有效性.

关键词: 复合观测器; 智能薄板结构; 主动振动抑制; 输出时滞; 压电元件

引用格式: 国佳, 文新宇, 李生权, 等. 多源不确定条件下智能薄板主动振动抑制. 控制理论与应用, 2026, 43(3): 641 – 649

DOI: 10.7641/CTA.2024.40287

Active vibration suppression for smart thin plates under multi-source uncertainties

GUO Jia¹, WEN Xin-yu^{1†}, LI Sheng-quan², CUI Yang-yang³

(1. College of Electronic Information Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan Shanxi 030024, China;

2. College of Electrical and Energy Power Engineering, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu 225127, China;

3. College of Engineering, Peking University, Beijing 100080, China)

Abstract: This paper addresses the issues of input uncertainty and acceleration sensor lag caused by piezoelectric elements, a composite observer method is proposed for achieving active vibration suppression in smart thin plate structures. Firstly, an output recursive observer is employed to estimate the delayed vibration source signal. Then, a predictor is designed to compensate for the phase lag introduced by the sensor, resulting in an equivalent vibration estimation. To mitigate the significant compensation input uncertainty caused by irregular signals in the estimation, the estimated value is shaped to produce smoother vibration compensation information. This method takes full consideration of the system characteristics and laws of the platform, offering a systematic design scheme for vibration compensation. Using the Lyapunov method, it is proven that the closed-loop system is uniformly ultimately bounded. Finally, the effectiveness of the composite observer vibration suppression method is verified through simulations and experiments on a vibration platform with a smart thin plate structure.

Key words: composite observer; smart thin plate structures; active vibration suppression; output time delay; piezoelectric element

Citation: GUO Jia, WEN Xinyu, LI Shengquan, et al. Active vibration suppression for smart thin plates under multi-source uncertainties. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(3): 641 – 649

1 引言

薄板结构具有高强度、重量轻、柔性大等特点, 被广泛应用于航天航空、汽车、船舶^[1-3]等领域中. 实际应用中, 薄板结构振动很容易受到未知的外部激励引

起大幅振动^[4]. 近年来, 随着压电材料的发展, 采用智能薄板实现主动振动抑制的方法得到越来越多的关注, 将振动等效为外部干扰进行估计, 再通过前馈补偿, 可获得更好的振动抑制效果^[5].

收稿日期: 2024-05-21; 录用日期: 2024-11-14.

†通信作者. E-mail: wxysunrain@163.com; Tel.: +86 13503546214.

本文责任编辑: 郭宝珠.

国家自然科学基金项目(62303019), 山西省重点研发计划项目(202102020101013), 山西省应用基础研究面上项目(202103021224271)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62303019), the Key Research and Development Program of Shanxi Province (202102020101013) and the General Program of Applied Basic Research of Shanxi Province (202103021224271).

结构振动模态通常存在周期成分,当振动可以由外部模型描述时,陷波技术、自适应滤波技术以及重复控制等方法可以充分利用其特征得到比较好的主动振动抑制性能^[6-9]。另外一种振动抑制思路,可以摆脱对模型的依赖,将包括振动在内的所有不确定信息作为集总干扰进行估计,如滑模观测器^[10]、扩张状态观测器^[11-13]、区间观测器^[14]等。这类方法可以将振动和系统不确定性作为有界或导数有界干扰,但是对于时变信号,容易激发出高频模态,导致这些方法尖峰处误差大,并且设计参数相互影响,整定比较困难。而文献[15-16]将不同观测器融合在一起,估计不同类型的干扰,提高估计精度。

从振动抑制角度来看,由于薄板结构模态的复杂性,振动现象往往与输入不确定性,有界噪声、传感器输出时滞等多源不确定性耦合在一起。这导致振动的估计和补偿脱节,系统的关键特征也很难充分利用。文献[17]将时滞等效成一阶惯性环节,利用自抗扰控制(active disturbance rejection control, ADRC)对系统进行抑振,这种近似方法依然存在相位滞后,不能完全补偿时滞带来的影响。文献[18]利用区间观测器建立未知输入和系统状态的代数关系,当滞后满足一定边界条件时,可以直接对时滞系统的干扰进行补偿。而文献[19]设计一种预估机制,将理想的输入补偿量描述为干扰频率、状态和时间延迟的参数化形式,从而实现对输入通道干扰的完全补偿,但是忽略了输入不确定性。目前,大多数方法只考虑到了振动系统中某些特定环节的不确定性。能应用于多源不确定性条件下主动振动抑制的方法较少。此外,ADRC,干扰观测器控制(disturbance observer based control, DOBC)等方法涉及到系统等效状态估计^[20-21],这增加了设计复杂度。

综上所述,很多主动抑振的方法表现出了很好的性能,但是在处理多源不确定的时候还没有较好的解决办法,一般只能将内部不确定性和振动作为一种集总干扰进行估计和补偿,忽略了振动本身特性,具有较大保守性。而多源不确定会从振动估计和补偿两个方面影响到振动抑制效果,并且加大系统稳定性分析的难度。所以,研究一种能够针对振动形态特征设计观测器,使得各个环节相互独立,并具有综合性的振动补偿方式就非常重要。针对上述问题,本文设计了一种复合观测器,在多源不确定性条件下实现主动振动补偿,主要特点如下:1)首先采用递推的方式构造输出递推观测器,通过调节每次递推的滤波器参数提高鲁棒性,得到带有延迟的振动估计信号;2)设计振动预估器解决检测时滞问题;3)对主要振动模态进行整形重构,减小执行机构输入的非规则成分,避免出现较大的输入不确定;4)最后利用仿真和实验验证本文所提方法。

2 问题描述

本文针对一类智能薄板结构,设计基于复合观测器的补偿器对其实现主动振动抑制。在DOBC结构下,通过协调控制器和观测器可以达到更好的抑振效果。为了阐述本文的核心研究内容,主要考虑观测器设计,分析振动对系统输出的影响,建立一种补偿机制。以如下二阶薄板振动补偿系统为例:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 u_0 + B_2(u_c + d + \Delta d_f + f(u_c)), \\ y = Cx(t - \tau), \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $y \in \mathbb{R}$ 分别表示系统状态向量、输出信号; A, B_1, B_2, C 是系统具有适当维数的系数矩阵; u_c 为补偿端的振动补偿信号; $d \in \mathbb{R}$ 为等效到补偿端的单模态振动信号; $\tau \in \mathbb{R}$, $f(u_c) \in \mathbb{R}$, $\Delta d_f \in \mathbb{R}$ 分别为输出时滞、补偿输入不确定性、有界噪声。为了研究方便,假设 A, B_1 是能控的,并且存在标称控制器 u_0 , 当不存在振动信号 d 以及 $\Delta d_f, f(u_c)$ 等多源不确定性时,该控制器可以保证输出滞后系统(1)是全局渐近稳定的。

薄板受到外部激励作用,呈现出特定频率的正弦周期性振动的形式。虽然基于模型的振动补偿可以充分利用振动特性,从而提高补偿性能,但是考虑到系统会受到输入不确定性,输出滞后和有界噪声等多源不确定的影响,这使得问题变得更加复杂,许多方法难以利用到振动特征,本文针对主要单模态提出了一种基于模型的复合观测器设计方法。

3 复合观测器设计

结合图1可以看出所设计的输出递推观测器、振动预估器、输入整形重构3个环节相互独立,构成复合观测器,避免了观测器设计过程中的参数耦合。输出递推观测器得到带有时滞的振动估计值,该观测器可以避免薄板结构的状态信息估计,减少了待估计参数。随后利用预估器对上一步估计值进行预测,以消除时滞产生的相位滞后。此外,考虑到压电作动器的输入可能发生畸变,对振动信号预估值进行了整形重构,以此得到一个振动补偿信号,减小了补偿输入不确定性。

3.1 输出递推观测器

由图1可知,输出递推观测器由两部分组成:等效低通滤波器 $F(s)$ 和辅助滤波器。 $\hat{d}(t - \tau)$ 为振动估计值; $\tilde{y} = y - y_m$ 是系统输出误差信号,其中: y 为系统输出信号, y_m 为系统标称模型输出信号。设计如下系统标称模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = Ax_m + B_1 u_0 + B_2 u_c, \\ y_m = Cx_m(t - \tau), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x_m \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 为系统标称模型的状态。结合式(1)

和式(2)可得误差方程

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}(t) + B_2(d(t) + \Delta d(t) + f(u_c)), \\ \tilde{y} = C\tilde{x}(t - \tau), \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ 分别为误差方程的状态和输出; A, B_1, B_2, C 定义与式(1)中相同. 由式(3)可以得到误差系统 $\Sigma: (A, B_2, C)$ 的传递函数

$$G_p = \frac{a_0}{s^2 + a_1s + a_2}, \quad (4)$$

其中参数 a_0, a_1, a_2 是已知的.

如图2所示, 等效低通滤波器为滤波器 G_p^{-1} 与一阶惯性环节 $T_i(s)$ 的串联. 首先利用滤波器激励出系统输出误差中的振动特性, 并在信号传输过程中得到一组具有级联关系的不可测信号 $\varsigma_i(t - \tau)$, 将其分解为标准正弦虚拟干扰、有界噪声干扰、衰减项、输入不确定性. 最终输出可测信号 $\varsigma_1(t - \tau)$. 设一阶惯性环节为

$$T_i(s) = \frac{1}{s + b_i}, \quad (5)$$

其中 $b_i > 0 (1 \leq i \leq 2)$ 为待定参数. 结合式(5)和图2可以得到等效低通滤波器表达式

$$F(s) = \frac{s^2 + a_1s + a_2}{a_0(s + b_1)(s + b_2)}, \quad (6)$$

结合式(6)和图2可以得到如下关系式:

$$\begin{cases} \varsigma_2(s)e^{-\tau s} = \frac{1}{s + b_2}(d(s) + f(u_c) + \Delta d_f)e^{-\tau s}, \\ \varsigma_1(s)e^{-\tau s} = \frac{\varsigma_2(s)}{s + b_1}e^{-\tau s}, \end{cases} \quad (7)$$

可得

$$\begin{cases} \dot{\varsigma}_1(t - \tau) = -b_1\varsigma_1(t - \tau) + \varsigma_2(t - \tau), \\ \dot{\varsigma}_2(t - \tau) = -b_2\varsigma_2(t - \tau) + d(t - \tau) + f(u_c(t - \tau)) + \Delta d_f(t - \tau). \end{cases} \quad (8)$$

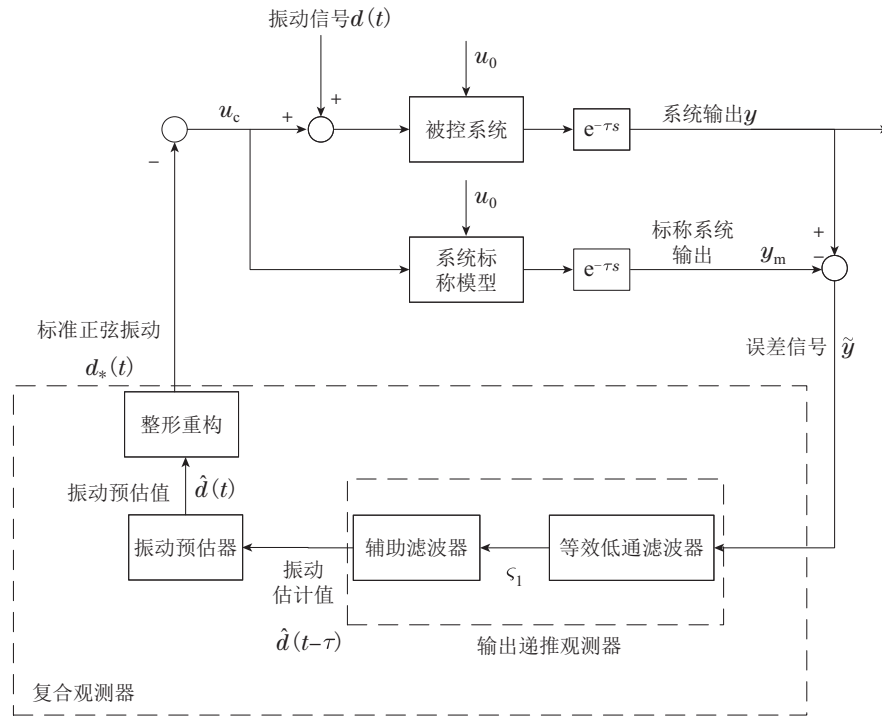


图 1 基于复合观测器的振动补偿结构

Fig. 1 Vibration compensation structure based on composite observer

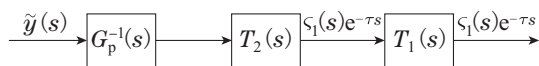


图 2 等效低通滤波器

Fig. 2 Equivalent low-pass filter

利用级联的惯性环节将 $\varsigma_i(t - \tau) (1 \leq i \leq 2)$ 描述为

$$\varsigma_i(t - \tau) = d_i(t - \tau) + \sigma_i(t - \tau) + \Delta d_{fi}(t - \tau) + f_i(u_c(t - \tau)), \quad (9)$$

其中 $d_i(t - \tau)$ 是带有时延的标准正弦虚拟振动信号. 并假设衰减项 $\sigma_i(t - \tau) (1 \leq i \leq 2)$ 的表达式为

$$\dot{\sigma}_i(t - \tau) = -b_i\sigma_i(t - \tau). \quad (10)$$

结合式(5)(9)和图2可得 $\Delta d_{fi} (1 \leq i \leq 2)$ 之间以及与 Δd_f 满足如下关系:

$$\begin{cases} \Delta d_{f2}(s)e^{-\tau s} = \frac{\Delta d_f(s)}{s + b_2}e^{-\tau s}, \\ \Delta d_{f1}(s)e^{-\tau s} = \frac{\Delta d_{f2}(s)}{s + b_1}e^{-\tau s}. \end{cases} \quad (11)$$

同理可得 $f_i(u_c) (1 \leq i \leq 2)$ 之间以及与 $f(u_c)$ 满足如下关系:

$$\begin{cases} f_2(u_c(s))e^{-\tau s} = \frac{f(u_c(s))}{s+b_2}e^{-\tau s}, \\ f_1(u_c(s))e^{-\tau s} = \frac{f_2(u_c(s))}{s+b_1}e^{-\tau s}, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $f_i(u_c)$ 和 Δd_{fi} 是第 i 次递推产生的中间变量。

接下来构造辅助滤波器,如图3所示.利用辅助滤波器将未知振动信号表示为一系列关于虚拟振动信号参数形式.首先利用可测信号 $\varsigma_1(t-\tau)$ 递推出标准正弦虚拟振动估计值 $\hat{d}_2(t-\tau)$,再根据 $\hat{d}_2(t-\tau)$ 进行第2次递推,得到期望的振动估计值 $\hat{d}(t-\tau)$.其中 $g_i > 0, k_i (1 \leq i \leq 2)$ 为待定参数.若推广至 n 阶系统,则只需按照递推步骤重复 n 次,并将辅助滤波器内部信号 $\hat{\Psi}_{i1}(s), \hat{\Psi}_{i2}(s) (1 \leq i \leq 2)$ 描述为

$$\begin{cases} \hat{\Psi}_{i1}(s)e^{-\tau s} = \frac{1}{s+g_i}\varsigma_i(s)e^{-\tau s}, \\ \hat{\Psi}_{i2}(s)e^{-\tau s} = \frac{s}{s+g_i}\varsigma_i(s)e^{-\tau s}. \end{cases} \quad (13)$$

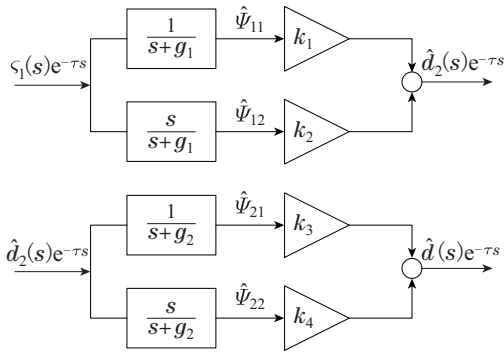


图3 辅助滤波器

Fig. 3 Auxiliary filter

结合式(8)和式(13)可得

$$\begin{cases} \dot{\hat{\Psi}}_{i1}(t-\tau) = \hat{\Psi}_{i2}(t-\tau), \\ \dot{\hat{\Psi}}_{i2}(t-\tau) = -g_i\hat{\Psi}_{i2}(t-\tau) + \dot{\varsigma}_i(t-\tau). \end{cases} \quad (14)$$

由文献[22]和文献[23]可得:存在向量函数 $\hat{\Psi}_{i1}(t-\tau), \hat{\Psi}_{i2}(t-\tau) (1 \leq i \leq 2)$ 满足关系式(14),且有 $\Psi_i(t-\tau) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 满足下式:

$$\dot{\hat{\Psi}}_i(t-\tau) = G_i\Psi_i(t-\tau) + Ld_{i+1}(t-\tau), \quad (15)$$

其中:

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_i g_i & -b_i - g_i \end{bmatrix}, \Psi_i(t-\tau) = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{i1}(t-\tau) \\ \hat{\Psi}_{i2}(t-\tau) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\theta_i = \begin{bmatrix} k_{2i-1} \\ k_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i g_i - \omega^2 \\ b_i + g_i \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

并有 $\hat{\delta}_i(t-\tau) (1 \leq i \leq 2)$ 满足

$$\dot{\hat{\delta}}_i(t-\tau) = G_i\hat{\delta}_i(t-\tau) - L(\sigma_{i+1}(t-\tau) + \Delta d_{fi+1}(t-\tau) + f_{i+1}(u_c(t-\tau))). \quad (18)$$

则可以将第1次递推得到的标准正弦虚拟振动信号 $d_2(t-\tau)$ 描述为

$$d_2(t-\tau) = \hat{\Psi}_{11}(t-\tau)(b_1 g_1 - \omega^2) + \hat{\Psi}_{12}(t-\tau)(b_1 + g_1) + \theta_1^T \hat{\delta}_1. \quad (19)$$

结合式(9)(14)–(15)可得

$$\dot{\tilde{\Psi}}_i = \tilde{\Psi}_i - \dot{\tilde{\Psi}}_i = G_i\tilde{\Psi}_i - L(\sigma_{i+1} + \Delta d_{fi+1} + f_{i+1}(u_c)). \quad (20)$$

根据式(19)得到标准正弦虚拟振动估计值为

$$\hat{d}_2(t-\tau) = \hat{\Psi}_{11}(t-\tau)(b_1 g_1 - \omega^2) + \hat{\Psi}_{12}(t-\tau)(b_1 + g_1). \quad (21)$$

故结合式(19)和式(21)可得虚拟振动误差为

$$\tilde{d}_2(t-\tau) = \theta_1^T \hat{\delta}_1(t-\tau), \quad (22)$$

同理可得第2次递推的振动误差为

$$\tilde{d}(t-\tau) = \theta_2^T \hat{\delta}_2(t-\tau), \quad (23)$$

其中 $\theta_{1,2}, \hat{\delta}_{1,2}(t)$ 分别满足式(17)–(18).

根据式(16)可以得到 G_i 是Hurwitz矩阵,由于 $\Delta d_{fi}, f(u_c)$ 均是有界的,再结合式(20)得出 $\tilde{\Psi}_i$ 是一致最终有界的,详细证明请见附录.当有界噪声 Δd_{fi} 和补偿不确定性 $f(u_c)$ 不存在时, $\tilde{\Psi}_i$ 满足渐近稳定.同理可得 $\tilde{d}(t-\tau)$ 满足一致最终有界.

3.2 振动预估器

实际系统中的振动往往与时滞耦合在一起.本文为了解决传感器的输出滞后问题,设计振动预估器.

首先,令振动估计值 $\hat{d}(t-\tau)$ 分别经过一个低通滤波器和一个高通滤波器,构造辅助变量 $\hat{\xi}$ 满足如下关系式:

$$\begin{cases} \hat{\xi}_1(s)e^{-\tau s} = \frac{1}{(s+p)^2}\hat{d}(s)e^{-\tau s}, \\ \hat{\xi}_2(s)e^{-\tau s} = \frac{s}{(s+p)^2}\hat{d}(s)e^{-\tau s}, \end{cases} \quad (24)$$

其中: $p > 0$ 是给定的已知常值, $\hat{d}(s)e^{-\tau s}$ 是 $\hat{d}(t-\tau)$ 的拉氏变换.

类比式(15)可得

$$\dot{\hat{\xi}}(t-\tau) = \vartheta\hat{\xi}(t-\tau) + L\hat{d}(t-\tau), \quad (25)$$

其中

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa_1 & -\kappa_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 & -2p \end{bmatrix}. \quad (26)$$

其次,选取一个与频率有关的矩阵 W 和一个常值矩阵 V ,对振动信号 $d(t)$ 进行建模,即

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Ww(t), \\ d(t) = Vw(t), \end{cases} \quad (27)$$

其中:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, V = [1 \ 0]. \quad (28)$$

根据文献[19]定理1可知, 存在一个可逆常数矩阵 Π , 使得 $w(t - \tau)$ 可以表示成下式:

$$w(t - \tau) = \Pi^{-1} \hat{\xi}(t - \tau) - \Pi^{-1} \hat{\xi}(t - \tau), \quad (29)$$

其中

$$\Pi^{-1} = \begin{bmatrix} -(\kappa_1 - \omega^2) & -\kappa_2 \\ \omega^2 \kappa_2 & -(\kappa_1 - \omega^2) \end{bmatrix}, \quad (30)$$

并有

$$\dot{\hat{\xi}}(t - \tau) = \vartheta \hat{\xi}(t - \tau), \quad (31)$$

可以看出 $\hat{\xi}$ 是有界的. 根据式(27)得

$$\begin{aligned} \hat{d}(t - \tau) &= Vw(t - \tau) = \\ &(\kappa_1 - \omega^2) \hat{\xi}_1(t - \tau) \kappa_2 \hat{\xi}_2(t - \tau) - \bar{V} \hat{\xi}(t - \tau), \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$\bar{V} = -V\Pi^{-1}. \quad (33)$$

最后, 根据上述分析设计预估器

$$\begin{aligned} \hat{d}(t) &= \varphi \sin[\omega(t - \tau + \tau) + \phi_0] = \\ &2\hat{d}(t - \tau) \cos(\omega\tau) - \hat{d}(t - 2\tau), \end{aligned} \quad (34)$$

从而可以得到振动信号 $\hat{d}(t - \tau)$ 的预估值 $\hat{d}(t)$.

同理, 令振动信号 $d(t - \tau)$ 分别经过一个低通滤波器和一个高通滤波器, 设计辅助变量 ξ 满足

$$\begin{cases} \xi_1(s)e^{-\tau s} = \frac{1}{(s+p)^2} d(s)e^{-\tau s}, \\ \xi_2(s)e^{-\tau s} = \frac{s}{(s+p)^2} d(s)e^{-\tau s}, \end{cases} \quad (35)$$

可以得到

$$\dot{\xi}(t - \tau) = \vartheta \xi(t - \tau) + Ld(t - \tau). \quad (36)$$

依据式(27)可得

$$\begin{aligned} d(t - \tau) &= (\kappa_1 - \omega^2) \xi_1(t - \tau) + \\ &\kappa_2 \xi_2(t - \tau) - \bar{V} \bar{\xi}(t - \tau), \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\dot{\bar{\xi}}(t - \tau) = \vartheta \bar{\xi}(t - \tau). \quad (38)$$

从而利用预估器得到振动信号 $d(t - \tau)$ 的预估值

$$\hat{d}(t) = 2\hat{d}(t - \tau) \cos(\omega\tau) - \hat{d}(t - 2\tau). \quad (39)$$

结合式(23)(25)(36), 得到

$$\dot{\hat{\xi}}(t - \tau) = \vartheta \hat{\xi}(t - \tau) + L\theta_2^T \hat{\delta}_2(t - \tau). \quad (40)$$

结合式(31)(38)可得

$$\dot{\tilde{\xi}}(t - \tau) = \vartheta \tilde{\xi}(t - \tau). \quad (41)$$

综上, 结合式(32)(34)(37)(39)可以得到预估误差

$$\begin{aligned} \tilde{d}(t) &= d(t) - \hat{d}(t) = \\ &2\theta_2^T \hat{\delta}_2(t - \tau) \cos(\omega\tau) - \bar{V} \tilde{\xi}(t - 2\tau) + \bar{V} \tilde{\xi}(t - 2\tau). \end{aligned} \quad (42)$$

3.3 整形重构

从式(34)中可以看出预测值中含有非规则成分, 压电驱动装置本身存在非线性特性, 实验中发现, 如果将预测值直接作用到压电元件, 会产生较大输入不确定性. 为此, 本小节对振动预估信号进行整形, 减小输入不确定性 $f(u_c)$. 将振动预估信号 $\hat{d}(t)$ 表示成如下形式:

$$\hat{d}(t) = \Phi^T \Theta + \varepsilon_0, \quad (43)$$

其中: $\Theta \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 是待估计参数向量,

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

并满足

$$\varepsilon_0 = \tilde{d}(t). \quad (45)$$

将整形输出表示为参数化的三角函数形式

$$d_*(t) = \Phi^T \hat{\Theta}, \quad (46)$$

其中 $\hat{\Theta}$ 为 Θ 的估计, 并且满足

$$\dot{\hat{\Theta}} = \Gamma \Phi(\hat{d}(t) - d_*(t)), \quad (47)$$

其中 $\Gamma > 0$ 是已知对角正定矩阵.

综上, 可以得到误差方程

$$\dot{\tilde{\Theta}} = -A(t)\tilde{\Theta} + \varepsilon, \quad (48)$$

其中:

$$A(t) = \Gamma \Phi \Phi^T, \varepsilon = \Gamma \Phi \varepsilon_0. \quad (49)$$

4 稳定性分析

鉴于上述复合观测器设计, 针对性考虑了多源不确定性问题, 给出了主要振动模态的补偿方案. 可以构造以下定理来分析系统的稳定性.

定理 1 针对多源不确定性振动系统(1), 选择补偿器为式(50), 其中 $d_*(t)$ 满足式(46), 那么存在 $P, m, \gamma > 0$, 使得振动系统(1)一致最终有界.

$$u_c = -d_*(t). \quad (50)$$

证 首先证明整形参数估计误差的有界性. 由公式(44)可知, 存在正常数 T, β 使得 $\int_t^{t+T} \Phi(\tau) \Phi(\tau)^T d\tau \geq \beta I$, 其中 I 是单位矩阵. 因此, $\Phi(t)$ 满足可持续激励条件^[24]. 根据公式(48)可得

$$\tilde{\Theta}(t) = \Phi'(t, 0)\tilde{\Theta}(0) + \int_0^t \Phi'(t, \mu)\varepsilon d\mu, \quad (51)$$

其中 $\Phi'(t, \mu)$ 是线性时变系统(48)的状态转移矩阵, 并且根据式(51)可以得到

$$\|\Phi'(t, \mu)\| \leq \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-\mu)}, \forall t \geq 0, \quad (52)$$

其中 γ_1, γ_2 是正常数. 由式(52)可知, 当 $\varepsilon=0$ 时, 式(48)是渐近稳定的. 结合式(51)–(52)可得

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Theta}(t)\| &\leq \\ \|\Phi'(t, 0)\| \|\tilde{\Theta}(0)\| &+ \int_0^t \|\Phi'(t, \mu)\| \|\varepsilon\| d\mu \leq \\ \gamma_1 e^{-\gamma_2 t} \|\tilde{\Theta}(0)\| &+ \gamma_1 \sup_{0 \leq \mu \leq t} \|\varepsilon\| \int_0^t e^{-\gamma_2(t-\mu)} d\mu \leq \\ \gamma_1 e^{-\gamma_2 t} \|\tilde{\Theta}(0)\| &+ \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sup_{0 \leq \mu \leq t} \|\varepsilon\|. \end{aligned} \quad (53)$$

根据式(18)可以得出 $\hat{\delta}_2$ 是有界的, 并且 ϑ 满足式(26)是Hurwitz矩阵, 因此结合式(40)和式(41)可知 $\tilde{\xi}(t-\tau), \tilde{\xi}(t-\tau)$ 均是有界的. 故得出预估误差(42)是有界的. 因此, 基于上述分析可得 $\tilde{\Theta}$ 也是有界的.

接下来, 证明 $e(t)$ 是有界的. 定义系统振动补偿误差为

$$e(t) = d(t) - d_*(t). \quad (54)$$

类似的, 利用式(43)(46)得到整形误差

$$\tilde{d}_*(t) = \hat{d}(t) - d_*(t) = \Phi^T \tilde{\Theta} + \varepsilon_0, \quad (55)$$

由于 $\tilde{\Theta}$ 和 ε_0 均是有界的, 可以得出 $\tilde{d}_*(t)$ 是有界的.

结合式(42)(55)可得

$$\begin{aligned} e(t) = d(t) - d_*(t) &= \\ d(t) - \hat{d}(t) + \hat{d}(t) - d_*(t) &= \\ \tilde{d}(t) + \tilde{d}_*(t), \end{aligned} \quad (56)$$

由于 $\tilde{d}(t), \tilde{d}_*(t)$ 是有界的, 可以保证 $e(t)$ 是有界的, 即存在 $\alpha > 0$ 使得 $\|e(t)\| \leq \alpha$.

最后, 证明整个闭环系统的稳定性. 将构造的补偿量(50)代入系统(1), 可得如下系统状态空间表达式:

$$\dot{x} = Ax + B_1 u_0 + B_2 \eta, \quad (57)$$

定义

$$\eta = e(t) + \Delta d_f + f(u_c), \quad (58)$$

由于对补偿信号 u_c 进行整形, 所以减小了输入不确定性 $f(u_c)$, 同时不难看出 η 是有界的.

建立Lyapunov函数验证振动系统(1)的稳定性, 即

$$V(t) = x^T P x, \quad (59)$$

结合式(57)(59)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (Ax + B_1 u_0 + B_2 \eta)^T P x + \\ x^T P (Ax + B_1 u_0 + B_2 \eta), \end{aligned} \quad (60)$$

因为存在 u_0 使标称系统渐近稳定, 故有 $\gamma > 0$ 使得下式成立:

$$\dot{V}(t) < -2\gamma \|x\|_2^2 + 2\|\eta\| \|P\| \|B_2^T\| \|x\|, \quad (61)$$

由于 η, B_2^T 均是有界的, 所以存在 $m > 0$ 使得 $\|\eta\| \times \|B_2^T\| \leq m$, 进而可以得到下式:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -2\gamma \|x\|_2^2 + 2m \|P\| \|x\| = \\ -\gamma \|x\|_2^2 - \gamma \left(\|x\| - \frac{m \|P\|}{\gamma} \right)^2 &+ \frac{m^2 \|P\|^2}{\gamma} \leq \\ -\gamma \|x\|_2^2 + \frac{m^2 \|P\|^2}{\gamma} &\leq \\ -\gamma \sigma_{\max}^{-1}(P) V(t) + \frac{m^2 \|P\|^2}{\gamma}, \end{aligned} \quad (62)$$

其中 $\sigma(\cdot)$ 代表取得矩阵特征值. 根据式(59), 可得

$$\|x\|_2^2 \leq \|x(0)\|_2^2 \exp(-\gamma \sigma_{\max}^{-1}(P)t) + \bar{\varepsilon}, \quad (63)$$

其中

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m^2 \|P\| \sigma_{\max}(P)}{\gamma \sigma_{\min}(P)}. \quad (64)$$

综上所述, 可以得到振动系统(1)一致最终有界结论.

证毕.

5 智能薄板仿真实验

5.1 实验平台介绍

本文在压电智能薄板上进行多源不确定性主动振动抑制实验. 实验平台如图4所示. 压电元件作为驱动器和传感器, 并在薄板的右侧布置HEV-20激振器, 通过信号发生器发出正弦激励信号, 利用功率放大器放大激励信号, 从而使得激振器引起薄板的振动. 加速度传感器利用压电效应将结构振动的位移信号转换成相应的电信号, 经NI-PCIe6343采集功能, 传送至Simulink的实时仿真Desktop real time环境下的Analog Input模块, 通过Analog Output模块将振动补偿信号作用到压电作动器, 实现振动补偿.

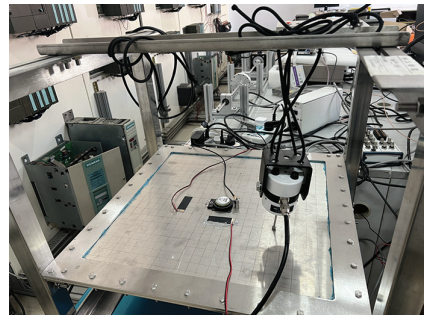


图4 实验平台

Fig. 4 Experimental platform

5.2 仿真结果与分析

下面给出数值算例, 验证复合观测器振动抑制方法的有效性. 首先将振动影响等效到补偿端得到实验平台的数学模型, 其中滞后时间 $\tau = 9.083$ ms, 即

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.483 \times 10^4 & -30.28 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 293.4 \end{bmatrix}, \\ C = [1 \ 0], \end{cases} \quad (65)$$

结合式(4)和式(65)可以得到误差系统 A, B_2, C 的传

递函数

$$G_p(s) = \frac{293.4}{s^2 + 30.28s + 3.483 \times 10^4} \quad (66)$$

根据式(66), 可将式(6)中等效低通滤波器 $F(s)$ 设计为

$$F(s) = \frac{s^2 + 30.28s + 34830}{293.4(s + b_1)(s + b_2)} \quad (67)$$

其中: 输出递推干扰观测器参数选取为 $b_1 = b_2 = 500$, $g_1 = g_2 = 500$, 则根据式(17)可得图3中辅助滤波器的系数 k_1, k_2, k_3, k_4 分别为214470, 1000, 214470, 1000; 预估器参数选取为 $p = 100$, $\kappa_1 = 10000$, $\kappa_2 = 200$.

假设振动频率为30 Hz, 幅值为1, 将输入不确定 $f(u_c)$ 和有界噪声 Δd_f 用方差为0.01的随机噪声表示. 采用第3.2节方法对输出递推估计值进行预估, 多源不确定因素会导致较大的原始振动预估误差, 这种非规则成分会激发出较大的输入不确定 $f(u_c)$. 为此, 对 $\hat{d}(t)$ 进行整形, 得到复合观测器的输出值 $d_*(t)$, 经过整形后的振动补偿误差 $d(t) - d_*(t)$ 和未经过整形后的振动补偿误差 $d(t) - \hat{d}(t)$, 如图5所示, 可以看出达到稳态后经过整形的补偿信号更光滑, 并且误差较小.

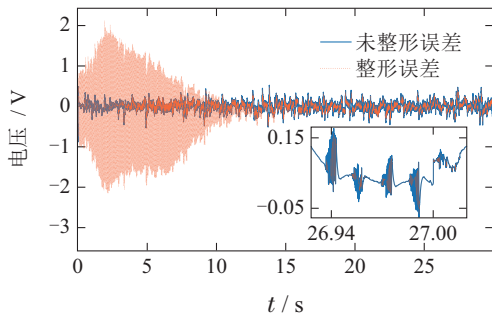


图5 振动补偿误差对比图

Fig. 5 Comparison diagram of vibration compensation error

5.3 实验结果与分析

接下来, 随机选用不同频率的信号分别进行抑振实验. 通过振动抑制效果可以看出, 没有引入振动补偿信号之前系统是稳定的, 但是受振动影响较大, 故本文重点不在于控制器的设计, 而是着重强调观测器的设计方案.

一般来说, 将压电式加速度传感器采用同位配置的原则布置^[17], 可以减小系统时延, 但是由于薄板的实际结构所限, 只能将传感器和驱动器布置于同一平面. 而采用本文的方法可以不考虑传感器和驱动器的位置带来的影响. 为说明本文所提方法的有效性, 故与文献[17]所提方法进行比较.

首先, 给出了在时域响应下不同方法的振动抑制效果, 如图6和图7所示, 从图中可以看出, 采用ESO^[17]方法引入补偿信号之后, 当频率为35 Hz时, 传感器输

出电压幅值从0.6 V下降至0.09 V, 抑振程度为85%; 当频率为30 Hz时, 传感器输出电压幅值从0.6 V下降至0.093 V, 抑振程度为84.5%. 采用本文方法引入补偿信号之后, 当频率为35 Hz时, 传感器输出电压幅值从0.6 V下降至0.03 V, 抑振程度为95%; 当频率为30 Hz时, 传感器输出电压幅值从0.6 V下降至0.031 V, 抑振程度为94.8%. 根据补偿效果可以验证复合观测器具有较强鲁棒性.

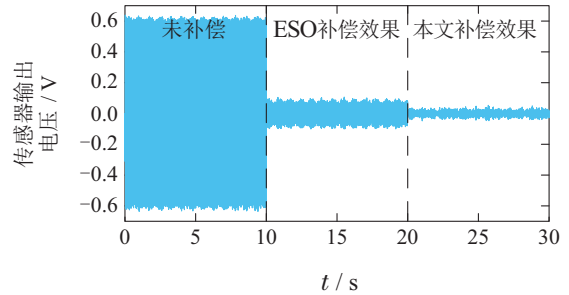


图6 不同方法下的振动补偿实验结果(35 Hz)

Fig. 6 Experimental results of vibration compensation under different methods(35 Hz)

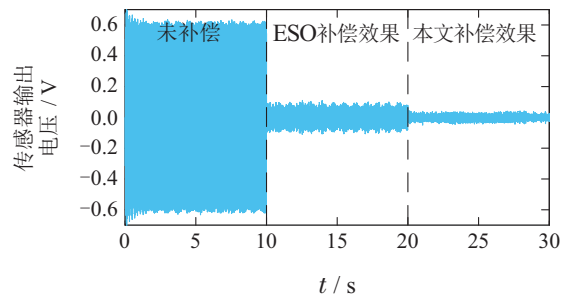


图7 不同方法下的振动补偿实验结果(30 Hz)

Fig. 7 Experimental results of vibration compensation under different methods(30 Hz)

其次, 为了进一步分析抑振效果, 对两种方法下的传感器输出信号进行快速傅里叶变换 (fast fourier transform, FFT)分析, 得到图8和图9所示的频域信号.

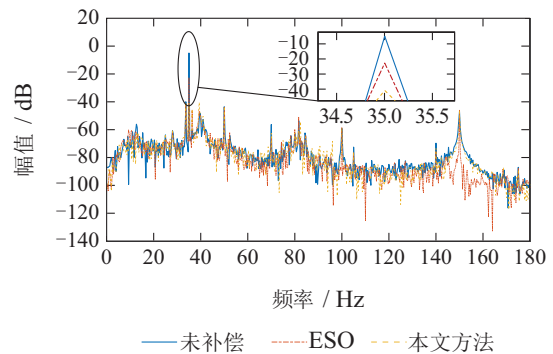


图8 本文方法和ESO^[17]的振动补偿频域响应对比(35 Hz)

Fig. 8 Frequency responses comparison results of this paper and ESO^[17](35 Hz)

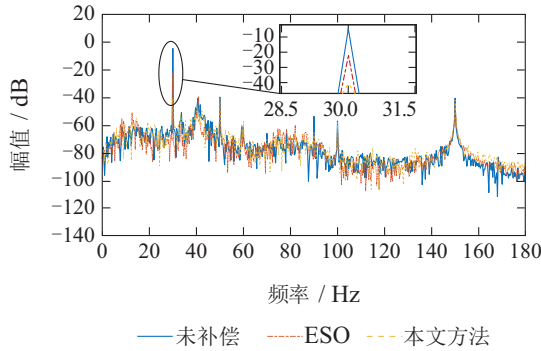


图9 本文方法和ESO^[17]的振动补偿频域响应对比(30 Hz)

Fig. 9 Frequency responses comparison results of this paper and ESO^[17](30 Hz)

根据频域响应结果图可以看出,在主要模式下,幅值下降明显.当频率为35 Hz时:采用ESO^[17]方法的传感器输出幅值从 -4.642 dB下降至 -22.73 dB,共减少了 18.088 dB;采用本文方法的传感器输出幅值从 -4.642 dB下降至 -40.62 dB,共减少了 35.978 dB.当频率为30 Hz时:采用ESO^[17]方法的传感器输出幅值从 -4.627 dB下降至 -22.17 dB,共减少了 17.543 dB;采用本文方法的传感器输出幅值从 -4.627 dB下降至 -40.59 dB,共减少了 35.963 dB.

根据上述分析可知,本文方法能有效抑制多源不确定条件下薄板的主要模态振动.

6 结论

针对智能薄板中存在的输出时滞、噪声、补偿输入不确定性等问题,提出了一种振动补偿机制.该设计方法对多源不确定采用针对性的处理方法,各个环节相互独立,给出一种系统化的主动振动补偿方案.充分利用系统的关键特征设计观测器,具有较小的保守性.智能薄板的主动振动抑制实验结果说明,本文方法在主要模式下具有较好的振动抑制能力.上述工作重点考虑了观测器的设计方法,下一步将考虑在控制器配合下的主动振动抑制能力.另外在频率偏移或者变时滞条件下,如何设计复合观测器也是未来重要研究方向.

参考文献:

[1] WU R F, SHEN X Q, ZHAO J K. Conforming finite element methods for two-dimensional linearly elastic shallow shell and clamped plate models. *Applied Mathematics and Computation*, 2022, 430: 127259.

[2] SENGAR V, NYNARU M, WATTS G, et al. Postbuckled vibration behaviour of skew sandwich plates with metal foam core under arbitrary edge compressive loads using isogeometric approach. *Thin-Walled Structures*, 2023, 184: 110524.

[3] HASSAN A H A, KURGAN N. Bending analysis of thin FGM skew plate resting on Winkler elastic foundation using multi-term extended Kantorovich method. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 2020, 23(4): 788 – 800.

[4] LI S Q, ZHANG L Y, ZHU C W, et al. Nonlinear ESO-based vibration control for an all-clamped piezoelectric plate with disturbances

and time delay: Design and hardware implementation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2022, 33(18): 2321 – 2335.

[5] LI J, ZHANG L Y, LI S Q, et al. Active disturbance rejection control for piezoelectric smart structures: A review. *Machines*, 2023, 11(2): 174.

[6] YANG Y J, CUI Y Y, QIAO J Z, et al. Adaptive periodic-disturbance observer based composite control for SGCMG gimbal servo system with rotor vibration. *Control Engineering Practice*, 2023, 132: 105407.

[7] ZHOU J X, ZHENG S Q, HAN B C, et al. Effects of notch filters on imbalance rejection with heteropolar and homopolar magnetic bearings in a 30-kW 60 000-r/min motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(10): 8033 – 8041.

[8] CUI P L, XU H, LIU Z Y, et al. Improved second-order repetitive control with parameter optimization for magnetically suspended rotor system. *IEEE Sensors Journal*, 2019, 20(5): 2294 – 2303.

[9] CUI P L, LIU Z Y, XU H, et al. Harmonic vibration force suppression of magnetically suspended rotor with frequency-domain adaptive LMS. *IEEE Sensors Journal*, 2019, 20(3): 1166 – 1175.

[10] CAZZULANI G, CINQUEMANI S, RONCHI M. A sliding mode observer to identify faulty FBG sensors embedded in composite structures for active vibration control. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2018, 271: 9 – 17.

[11] LI J, ZHANG L Y, ZHANG M H, et al. Multi-modal vibration control for all-clamped plate subjected to periodic disturbances by ESO-based frequency-shaped LQR. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 201: 110658.

[12] XIA Y Q, ZHU Z, FU M Y, et al. Attitude tracking of rigid spacecraft with bounded disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010, 58(2): 647 – 659.

[13] HIZARCI B, KIRAL Z, ŞAHIN S. Optimal extended state observer based control for vibration reduction on a flexible cantilever beam with using air thrust actuator. *Applied Acoustics*, 2022, 197: 108944.

[14] ZHU F L, LI M W. Distributed interval observer and distributed unknown input observer designs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, 69(12): 8868 – 8875.

[15] GUO K X, JIA J D, YU X, et al. Multiple observers based anti-disturbance control for a quadrotor UAV against payload and wind disturbances. *Control Engineering Practice*, 2020, 102: 104560.

[16] WANG H L, DENG J Q, ZHANG L Y, et al. Enhanced disturbance observer-based hybrid cascade active disturbance rejection control design for high-precision tracking system in application to aerospace satellite. *Aerospace Science and Technology*, 2024, 146: 108939.

[17] LI S Q, ZHU C W, MAO Q B, et al. Active disturbance rejection vibration control for an all-clamped piezoelectric plate with delay. *Control Engineering Practice*, 2021, 108: 104719.

[18] ZHU F L, FU Y H, DINH T N. Asymptotic convergence unknown input observer design via interval observer. *Automatica*, 2023, 147: 110744.

[19] WEN X Y, YAN P. Disturbance-prediction-based control of input time delay systems for rejection of unknown frequency disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(1): 338 – 350.

[20] SANZ R, GARCIA P, ALBERTOS P. Enhanced disturbance rejection for a predictor-based control of LTI systems with input delay. *Automatica*, 2016, 72: 205 – 208.

[21] DU Y W, CAO W H, SHE J H, et al. Disturbance rejection for input-delay system using observer-predictor-based output feedback control. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, 16(7): 4489 – 4497.

[22] WEN X Y, YAN P. Two-layer observer based control for a class of uncertain systems with multi-frequency disturbances. *ISA Transactions*, 2016, 63: 84 – 92.

- [23] WEN Xinyu, WANG Zihao, WANG Baoguang, et al. Design method of reverse recursive sinusoidal disturbance observer. *Control and Decision*, 2021, 36: 403 – 410.
(文新宇, 王子豪, 王宝光, 等. 一种反向递推正弦干扰观测器的设计方法. *控制与决策*, 2021, 36: 403 – 410.)
- [24] NARENDRA K S, ANNASWAMY A M. Persistent excitation in adaptive systems. *International Journal of Control*, 1987, 45(1): 127 – 160.

附录

为方便描述, 将式(20)重新定义为如下形式:

$$\dot{\tilde{\Psi}}_i = G_i \tilde{\Psi}_i - L \Delta_{i+1}, \tag{A1}$$

其中

$$\Delta_{i+1} = \sigma_{i+1} + \Delta d_{f_{i+1}} + f_{i+1}(u_c). \tag{A2}$$

建立Lyapunov方程满足下式:

$$V_m = \tilde{\Psi}_i^T Q \tilde{\Psi}_i, \tag{A3}$$

其中 $Q > 0$ 是一个正定矩阵. 由式(16)可知矩阵 G_i 满足Hurwitz条件, 使得

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &= \tilde{\Psi}_i^T (G_i^T Q + Q G_i) \tilde{\Psi}_i - 2 \Delta_{i+1}^T L^T Q \tilde{\Psi}_i < \\ &- 2 \gamma_m \|\tilde{\Psi}_i\|_2^2 + 2 \Delta_{i+1} \|L^T\| \|Q\| \|\tilde{\Psi}_i\|, \end{aligned} \tag{A4}$$

由于 Δ_{i+1} 有界, 所以存在 $\varpi > 0$ 使得 $\Delta_{i+1} \|L^T\| \leq \varpi$. 进而可得

$$\dot{V}_m \leq -2 \gamma_m \|\tilde{\Psi}_i\|_2^2 + 2 \varpi \|Q\| \|\tilde{\Psi}_i\| =$$

$$\begin{aligned} &- \gamma_m \|\tilde{\Psi}_i\|_2^2 - \gamma_m \left(\|\tilde{\Psi}_i\| - \frac{\varpi}{\gamma_m} \|Q\| \right)^2 + \frac{\varpi^2}{\gamma_m} \|Q\|^2 \leq \\ &- \gamma_m \|\tilde{\Psi}_i\|_2^2 + \frac{\varpi^2}{\gamma_m} \|Q\|^2 \leq \\ &- \gamma_m \sigma_{\max}^{-1}(Q) V_m + \frac{\varpi^2}{\gamma_m} \|Q\|^2, \end{aligned} \tag{A5}$$

根据式(A3), 可得

$$\|\tilde{\Psi}_i\|_2^2 \leq \|\tilde{\Psi}_i(0)\|_2^2 \exp(-\gamma_m \sigma_{\max}^{-1}(Q)t) + \varepsilon_m, \tag{A6}$$

其中

$$\varepsilon_m = \frac{\varpi^2 \|Q\| \sigma_{\max}(Q)}{\gamma_m \sigma_{\min}(Q)}, \tag{A7}$$

这意味着 $\tilde{\Psi}_i$ 是一致最终有界的.

作者简介:

国佳 硕士研究生, 主要研究方向为主动振动抑制、干扰观测器控制, E-mail: guojia1942231060@163.com;

文新宇 副教授, 主要研究方向为干扰观测器设计和补偿、抗干扰控制等研究, E-mail: wxysunrain@163.com;

李生权 教授, 主要研究方向为抗干扰理论及其在智能结构等领域的应用研究, E-mail: sqli@yzu.edu.cn;

崔洋洋 博士后研究员, 目前研究方向为干扰估计和补偿、先进控制理论及其在机电系统中的应用, E-mail: yangyangcui@pku.edu.cn.