

# 时变周期重复控制系统的等价输入干扰补偿与参数优化设计

贾奉溢<sup>1</sup>, 周 兰<sup>1†</sup>, 李美柳<sup>1,2,3</sup>, 肖文彬<sup>1</sup>

(1. 湖南科技大学 信息与电气工程学院, 湖南 湘潭 411201; 2. 复杂系统先进控制与智能化湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430074;  
3. 地球探测智能化技术教育部工程研究中心, 湖北 武汉 430074)

**摘要:** 本文提出一种基于等价输入干扰(EID)补偿的重复控制系统结构和参数优化设计方法, 对非周期扰动的作用进行实时估计和有效补偿, 实现对时变周期参考输入信号的高精度跟踪. 首先, 利用时变时滞算子构建时变周期参考输入信号内模, 引入低通滤波器建立时变周期重复控制器; 其次, 构造比例-积分观测器重构系统状态, 建立基于EID补偿的时变周期重复控制系统结构; 然后, 分析系统的稳定性条件和扰动抑制性能, 构建以稳定性为约束条件的粒子群算法, 寻找重复控制器增益、反馈控制器增益、状态观测器和EID估计器的最优参数组合; 最后, 将所提方法应用到卡盘-工件系统, 仿真对比说明所提方法比传统的基于状态观测器的定周期重复控制、基于EID补偿的空间域重复控制方法具有更好的抗扰性能和稳态性能.

**关键词:** 时变周期; 重复控制; 等价输入干扰; 粒子群优化算法

**引用格式:** 贾奉溢, 周兰, 李美柳, 等. 时变周期重复控制系统的等价输入干扰补偿与参数优化设计. 控制理论与应用, 2026, 43(4): 883 – 892

DOI: 10.7641/CTA.2024.40311

## Equivalent-input-disturbance compensation and parameter optimization for time-varying periodic repetitive control systems

JIA Feng-yi<sup>1</sup>, ZHOU Lan<sup>1†</sup>, LI Mei-liu<sup>1,2,3</sup>, XIAO Wen-bin<sup>1</sup>

(1. School of Information and Electrical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan 411201, China;  
2. Hubei Key Laboratory of Advanced Control and Intelligent Automation for Complex Systems, Wuhan Hubei 430074, China;  
3. Engineering Research Center of Intelligent Technology for Geo-Exploration, Ministry of Education, Wuhan Hubei 430074, China)

**Abstract:** This paper presents a repetitive control system structure and a parameter optimization design method based on the equivalent input disturbance (EID) compensation approach, which aims to estimate and compensate for the effect of aperiodic disturbances in real time and achieves high accuracy tracking for the time-varying periodic reference signal. Firstly, a time-varying time-delay operator is used to construct the internal mode of the time-varying periodic reference input signal, and a low-pass filter is introduced to construct the time-varying periodic repetitive controller. Secondly, a proportional-integral observer is constructed to reconstruct the state of the system, and a time-varying periodic repetitive control system based on EID compensation is established. Then, the stability and disturbance-rejection performance of the system are analyzed, and a particle swarm optimization algorithm with stability as the constraints is constructed to find an optimal combination of the repetitive controller gain, the feedback controller gain, the state observer gain, and the parameter of the EID estimator. Finally, the proposed method is applied to the chuck-workpiece system. Comparative simulations demonstrate that the proposed method has better disturbance-rejection and steady-state tracking performance than the conventional state-observer-based fixed-period repetitive control and EID-compensation-based spatial repetitive control methods.

**Key words:** time-varying period; repetitive control; equivalent input disturbance; particle swarm optimization algorithm

**Citation:** JIA Fengyi, ZHOU Lan, LI Meiliu, et al. Equivalent-input-disturbance compensation and parameter optimization for time-varying periodic repetitive control systems. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(4): 883 – 892

收稿日期: 2024-06-05; 录用日期: 2024-12-13.

†通信作者. E-mail: zhoulan75@163.com; Tel.: +86 18773283810.

本文责任编辑: 邹云.

国家自然科学基金项目(62373145, 62303179), 湖南省自然科学基金项目(2021JJ30006, 2023JJ40297, 2023JJ40295), 湖南省教育厅科研基金项目(21A0321, 22B0468, 22C044), 湖南省重点研发计划项目(2023GK2027)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62373145, 62303179), the Hunan Provincial Natural Science Foundation (2021JJ30006, 2023JJ40297, 2023JJ40295), the Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department (21A0321, 22B0468, 22C044) and the Key Project of Research and Development Plan of Hunan Province (2023GK2027).

## 1 引言

旋转机械系统广泛应用于数控机床、医用离心机、风力发电机组等机械设备,通常需要跟踪或抑制位置相关周期信号.旋转机械系统通常需要调速或变速运行,旋转体转动一周的角度恒为 $2\pi$ ,但在时域内周期长度随着旋转体转速的变化而变化.变速加工是一种提高加工稳定性、抑制颤振的有效手段.以凸轮的精加工过程为例<sup>[1]</sup>,旋转电机带动固定凸轮毛胚的转台变速运行,由直线电机驱动的精磨砂轮则沿着垂直于转台主轴方向做径向进给运动,以完成所需的凸轮轮廓.砂轮与工件的相对位移是直线伺服单元的参考目标值,是一个随旋转位移周期性变化的重复信号.然而,在时域内则是瞬时频率与旋转速度成正比的时变周期信号,这对实现其渐近跟踪提出了极大的挑战.

重复控制<sup>[2]</sup>是一种有效的周期信号跟踪/抑制方法,其理论基础是内模原理<sup>[3]</sup>.通过将周期信号内模 $\frac{1}{1-e^{-T_r s}}$ 嵌入到系统回路,以实现任意周期为 $T_r$ 的周期信号的无偏差稳态跟踪或抑制.基本重复控制系统是一个中立型时滞系统,为了改善系统的稳定性,Hara等人<sup>[4]</sup>在内模时延环节串联低通滤波器构建改进型重复控制器.然而,改进型重复控制器是一个近似的周期信号发生器,对周期信号的稳态跟踪误差不再为零.重复控制方法具有易于实现、结构简单、控制效果好等优点,目前已被广泛应用于机电伺服系统等各个领域<sup>[5-7]</sup>.然而,传统重复控制对周期变化非常敏感,即使是微小的变化,也会导致重复控制器在基频和谐波处的增益大幅减小<sup>[8]</sup>,使得系统的周期性能急剧下降.因此,传统重复控制方法不适用于位置相关时变周期信号的跟踪或抑制.

针对位置相关时变周期信号的时域重复控制方法主要包括虚拟变频采样重复控制<sup>[9]</sup>和变频采样重复控制<sup>[10]</sup>.前者保持系统采样频率不变,将系统采样频率和周期信号瞬时频率的比值的分数部分用有限脉冲滤波器代替,只有当周期信号频率变化范围较小且变化缓慢时才能保证系统的控制精度;后者要求根据周期信号频率变化同步调节系统控制器采样频率,对系统硬件要求高,并且线性时不变(linear time invariant, LTI)系统通过变频采样后转化为线性时变系统,加大系统设计难度.旋转机械系统具有重复运行的特点,位置相关周期信号在时域内的周期时变,但在位置域内的周期恒定,为此国内外学者提出了空间域重复控制方法<sup>[11]</sup>.但LTI系统在位置域是一个非线性系统,并且时域镇定控制器难以在位置域实现,为了保证系统的稳定性,现有空间域重复控制方法通常需要在时域内近似实现周期信号内模,导致内模误差<sup>[12-13]</sup>,难以满足实际控制工程对系统控制精度的要求.

此外,旋转机械系统不可避免地会受到参数扰动

和外部扰动等不确定性影响,根据Bode积分原理,重复控制在周期信号基频及其谐波处的灵敏度为零,以牺牲其他频率处的灵敏度为代价,重复控制无法抑制甚至可能放大非周期扰动.为了提高重复控制系统的扰动抑制性能,国内外学者提出了将重复控制和其他主动扰动抑制方法相结合的系统设计方法,如基于扰动观测器的重复控制<sup>[14]</sup>,基于自抗扰控制(active disturbance rejection control, ADRC)的重复控制<sup>[15]</sup>和基于等价输入干扰(equivalent input disturbance, EID)补偿的重复控制<sup>[16-17]</sup>等. EID方法的基本思想是将各种扰动对系统的影响等价成一个输入干扰对系统的影响,通过估计这个等价的输入干扰(即EID),直接作用于系统输入端,并使它的作用相反来进行补偿,从而消除扰动对系统的影响<sup>[18]</sup>.该方法与其他主动扰动抑制方法相比具有明显的优势,例如:不要求解控制对象的逆模型、无需扰动的任何先验信息、不存在不稳定的零极点对消问题<sup>[19]</sup>.但是以上方法都仅应用于周期为常数的周期信号跟踪或抑制,没有考虑如何提高时变周期重复控制系统的抗扰性能.这就是本文的研究动机.

本文针对一类具有位置相关周期性控制任务的旋转机械系统,提出基于EID补偿的时变周期重复控制系统结构和控制器参数优化方法,抑制非周期扰动对系统输出的影响,实现对位置相关时变周期性参考输入的高精度跟踪.本文的主要创新点如下: 1) 利用系统位置信息构建基于时变时滞算子的位置相关时变周期信号内模,内模匹配且能准确实现,保证了系统的稳态控制精度和可操作性; 2) 构造基于比例-积分观测器(proportional-integral observer, PIO)的EID估计器,对非周期扰动的作用进行实时估计和动态补偿,与传统基于龙伯格观测器(luenberger observer, LO)的EID方法相比, EID估计精度得到提高,进而改善系统的扰动抑制性能; 3) 重复控制增益、观测器增益和反馈控制增益通过粒子群优化(particle swarm optimization, PSO)算法进行同步优化,保证系统获得满意的扰动抑制性能、跟踪性能和鲁棒性.

## 2 问题描述

考虑如下受扰旋转机械系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_d d(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态变量;  $u(t) \in \mathbb{R}$ 为控制输入;  $y(t) \in \mathbb{R}$ 为输出;  $d(t) \in \mathbb{R}$ 为外部扰动;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_d \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 为已知实数矩阵. 假设矩阵 $B$ 是列满秩矩阵.

**假设 1**  $(A, B)$ 能控且 $(A, C)$ 能观.

**假设 2**  $(A, B, C)$ 在虚轴上没有零点.

**假设 3** 扰动  $d(t)$  引起的输出轨迹  $y(t) \in \Phi$ , 其中  $\Phi = p_i(t) \sin(\omega_i t + \phi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n < \infty$ ,  $\omega_i \geq 0$  和  $\phi_i$  为常值,  $p_i(t)$  为时间相关的多项式函数.

**注 1** 假设 1 是系统在设计过程中保持内部稳定的标准条件, 系统能观是设计状态观测器的前提. 系统 (1) 中, 若  $\text{rank}\{B, B_d\} = \text{rank}\{B\}$  成立, 则外部扰动  $d(t)$  是匹配的; 否则称其为非匹配扰动. 因此, 传统 ADRC 方法<sup>[20]</sup> 不适用于本系统. 假设 2 是保证系统内部稳定性的简化条件, 实际上只需要保证系统虚轴上的零点不与参考输入信号内模上的极点重合.

**引理 1**<sup>[18]</sup> 在假设 1-3 成立的情况下, 系统 (1) 存在作用于控制输入通道的 EID  $d_e(t)$ , 该信号对输出  $y(t)$  的影响与外部扰动  $d(t)$  的作用等效.

根据引理 1, 可以将系统 (1) 等效表示为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + d_e(t)], \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (2)$$

本文后续均用上述系统 (2) 表示控制对象 (1).

假设参考输入信号  $r(t)$  为位置相关周期函数, 即

$$r(t) := \tilde{r}(\theta) = \tilde{r}(\theta - T_\theta), \quad (3)$$

其中  $T_\theta$  是位置域周期常数.

假设旋转体的旋转方向不变, 旋转角度  $\theta$  定义为

$$\theta := f(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + f(0), \quad (4)$$

其中:  $f(0)$  是初始角度,  $\omega(t)$  是角速度. 由式 (4) 得

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) > 0, \quad \forall t > 0, \quad (5)$$

$f(t)$  是关于时间  $t$  的单调递增函数, 存在反函数, 记为  $t := f^{-1}(\theta)$ .

定义时变周期

$$\tau(t) := \begin{cases} t_0 = f^{-1}(T_\theta), & 0 < t \leq t_0, \\ t - f^{-1}(f(t) - T_\theta) = t - t_\theta, & t > t_0, \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $t_0$  表示旋转第 1 个位置域周期  $T_\theta$  所需的时间, 当

前旋转位置  $f(t)$  与  $f(t) - T_\theta$  具有相同的相对位置,  $t_\theta = f^{-1}(f(t) - T_\theta)$  表示旋转到上一个相同(相对)位置所需的时间. 因此

$$r(t) = \begin{cases} \tilde{r}(\theta(t)), & 0 < t < t_0, \\ r(t - \tau(t)), & t \geq t_0. \end{cases} \quad (7)$$

进而由拉格朗日中值定理, 存在  $t_{\xi_1}$  和  $t_{\xi_2}$  满足

$$T_\theta = \begin{cases} f(t_0) - f(0) = \omega(t_{\xi_1})t_0, & 0 < t_{\xi_1} \leq t_0, \\ f(t) - f(t_\theta) = \omega(t_{\xi_2})(t - t_\theta), & t_0 < t_{\xi_2} < t, \end{cases} \quad (8)$$

于是存在一个  $t_\xi \in \{t_{\xi_1}, t_{\xi_2}\}$ , 使得

$$T_\theta = \omega(t_\xi)\tau(t), \quad (9)$$

即有

$$\tau(t) = \frac{T_\theta}{\omega(t_\xi)} \leq \frac{T_\theta}{\omega_{\min}}. \quad (10)$$

进一步地, 由式 (6) 得到

$$\dot{\tau}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0, \\ 1 - \frac{\omega(t)}{\omega(t_\theta)} \leq 1 - \frac{\omega_{\min}}{\omega_{\max}}, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (11)$$

根据式 (10)-(11), 存在正数边界  $\bar{\tau}$  和  $h$  满足

$$0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}, \quad \dot{\tau}(t) \leq h. \quad (12)$$

本文控制目标: 对于旋转机械系统 (1), 设计控制律  $u(t)$  以消除外部扰动  $d(t)$  对输出  $y(t)$  的影响, 并实现对时变周期参考输入信号的高精度跟踪, 即使得跟踪误差  $e(t) = [r(t) - y(t)] \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

### 3 基于 EID 补偿的时变周期重复控制系统

基于 EID 补偿的时变周期重复控制系统 (图 1) 包括 5 个部分: 时变周期重复控制器、PIO、EID 估计器、反馈控制器和被控对象, 其中: 重复控制器用于跟踪时变周期参考输入信号, PIO 用来估计系统状态, EID 估计器用于估计非周期扰动, 反馈控制器用于改善系统的动态性能.

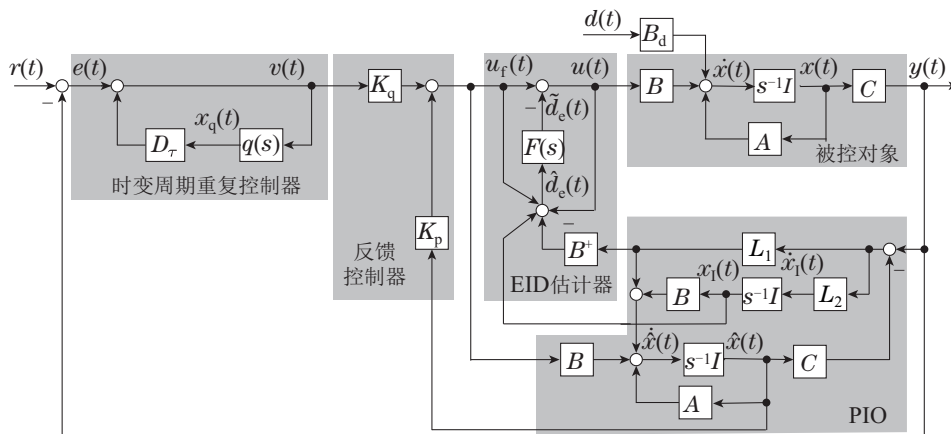


图 1 基于 EID 补偿的时变周期重复控制系统结构

Fig. 1 Configuration of EID-compensation based time-varying repetitive control system

### 3.1 基于PIO的EID估计器

在图1中, PIO的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu_f(t) + L_1[y(t) - \hat{y}(t)] + Bx_1(t), \\ \dot{x}_1(t) = L_2[y(t) - \hat{y}(t)], \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \end{cases} \quad (13)$$

其中:  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  为  $x(t)$  的估计值,  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}$  为观测器输出,  $x_1(t) \in \mathbb{R}$  为积分项,  $L_1 = [l_{11} \ l_{12} \ \cdots \ l_{1n}]^T$  和  $L_2 \in \mathbb{R}$  为待设计的观测器增益.

基于重构状态反馈的重复控制律为

$$u_f(t) = K_q v(t) + K_p \hat{x}(t), \quad (14)$$

其中:  $K_q$  是重复控制前馈增益,  $K_p$  是重构状态反馈控制增益,  $v(t)$  是重复控制器输出.

定义状态估计误差

$$x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad (15)$$

联立式(2)得到

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Ax_e(t) - \dot{x}_e(t) + B[u(t) + d_e(t)]. \quad (16)$$

假设存在控制输入  $\Delta d(t)$ , 使得

$$B\Delta d(t) = Ax_e(t) - \dot{x}_e(t), \quad (17)$$

设EID估计值为

$$\hat{d}_e(t) = \Delta d(t) + d_e(t), \quad (18)$$

将式(17)–(18)代入式(16), 得到

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B[u(t) + \hat{d}_e(t)]. \quad (19)$$

结合式(13)(19), 求解出EID估计值

$$\hat{d}_e(t) = B^+ L_1 C x_e(t) + x_1(t) + u_f(t) - u(t), \quad (20)$$

其中  $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$  为矩阵  $B$  的伪逆.

**注2** 本文采用PIO(13)估计系统状态, 与传统基于LO的EID方法(简记为LO-EID)相比, 增加了误差积分项, 以提高对系统状态的估计精度, 进而提高EID的估计精度, 改善系统的扰动抑制能力. 这在第5节的仿真对比分析得到了验证. 为了防止PIO(13)中误差积分项引起的积分饱和现象, 本文对积分环节进行了限幅, 并通过选取合适的观测器增益, 保证能量函数单调递减, 也就是进行条件积分.

EID估计值  $\hat{d}_e(t)$  可能会受到输出端高频噪声影响, 更重要的是, 为了解决EID估计值与控制输入之间的因果关系问题<sup>[21]</sup>, 为此引入低通滤波器  $F(s)$ , 得到滤波后的EID估计值, 即

$$\tilde{D}_e(s) = F(s)\hat{D}_e(s), \quad (21)$$

其中  $\hat{D}_e(s)$  和  $\tilde{D}_e(s)$  分别是  $\hat{d}_e(t)$  和  $\tilde{d}_e(t)$  的拉普拉斯变换.  $F(s)$  满足频率特性

$$|F(j\omega)| \approx 1, \omega \in \omega_d, \quad (22)$$

其中  $\omega_d$  为扰动  $d(t)$  的最大角频率, 其状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_F(t) = A_F x_F(t) + B_F \hat{d}_e(t), \\ \tilde{d}_e(t) = C_F x_F(t), \end{cases} \quad (23)$$

其中  $x_F(t)$  为滤波器状态变量.

**注3** 设计EID估计器的关键是选择合适的观测器增益  $L_1, L_2$  和滤波器  $F(s)$ , 使得  $\hat{d}_e(t)$  渐近收敛到  $d_e(t)$ , 且有  $\tilde{D}_e(j\omega) \approx \hat{D}_e(j\omega), \forall \omega \in [0, \omega_d]$ , 从而保证  $\tilde{d}_e(t)$  高精度估计  $d_e(t)$ .

### 3.2 时变周期重复控制器

基于式(6)的时变周期  $\tau(t)$ , 定义时变时滞算子

$$D_\tau(\xi(t)) := \xi(t - \tau(t)), \quad (24)$$

构造图1所示的时变周期重复控制器, 其中  $q(s)$  为一阶低通滤波器

$$q(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \quad (25)$$

其状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_q(t) = -\omega_c x_q(t) + \omega_c x_q(t - \tau(t)) + \omega_c e(t), \\ v(t) = e(t) + x_q(t - \tau(t)), \end{cases} \quad (26)$$

其中:  $\omega_c$  是剪切频率,  $x_q(t)$  为低通滤波器的状态变量,  $v(t)$  为时变周期重复控制器输出.

**注4** 由时变时滞算子  $D_\tau$ (24) 构成的正反馈回路实质是一个时变周期信号发生器, 特殊地, 若  $\tau(t)$  为常数, 则转化为文献[17]中的传统重复控制器. 对应的中立型时变时滞系统可以实现对时变周期参考输入信号的无偏差稳态跟踪, 但对于一般的控制对象系统难以稳定<sup>[22]</sup>. 低通滤波器的嵌入改善了系统的稳定性条件, 但使得系统对时变周期参考输入信号的稳态跟踪误差不再为零. 因此, 时变周期重复控制系统存在稳定性和稳态跟踪性能之间的折衷问题, 选择合适的剪切频率  $\omega_c$ , 是解决这个折衷问题的关键. 为此要求低通滤波器  $q(s)$  满足如下频率特性:

$$\begin{cases} |q(j\omega)| \approx 1, \omega \leq \omega_r, \\ |q(j\omega)| < 1, \omega > \omega_r, \end{cases} \quad (27)$$

其中  $\omega_r$  是时变周期参考输入信号的最大角频率.

## 4 稳定性分析与控制器参数优化

构造基于EID补偿的复合控制律

$$u(t) = u_f(t) - \tilde{d}_e(t), \quad (28)$$

其中:  $u_f(t)$  用于实现对时变周期参考输入信号的高精度跟踪; 引入的  $\tilde{d}_e(t)$  用于补偿非周期扰动, 提高时变周期重复控制器的鲁棒性.

本文控制设计的关键是选择合适的观测器增益  $[L_1 \ L_2]$  和反馈控制增益  $[K_p \ K_q]$ , 使得系统具有满意的动态响应速度、稳态跟踪性能和鲁棒性.

### 4.1 稳定性分析

通过对图1进行结构等价变换, 得到由两个子系统串联构成的等效系统(图2): 虚线上方为扰动抑制子系统(子系统I), 虚线下方为跟踪控制子系统(子系统II).

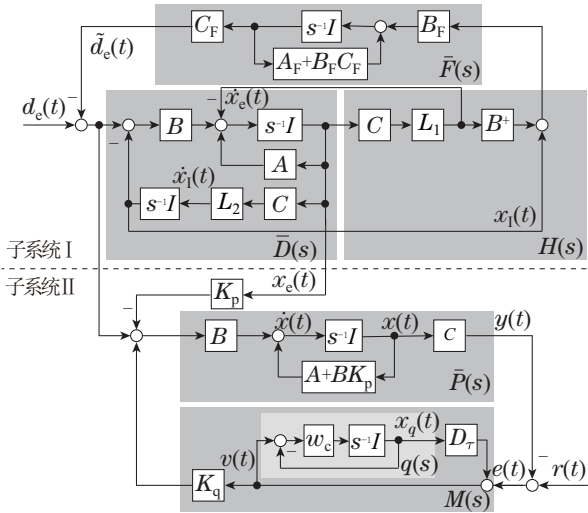


图 2 图 1 的等效系统

Fig. 2 Equivalent system of Fig. 1

结合式(2)(13)(15)(20)(23)(28), 得到子系统 I 的状态方程描述

$$\dot{\chi}_1(t) = \bar{A}_1 \chi_1(t), \quad (29)$$

其中:  $\chi_1(t) = [x_e^T(t) \ x_1^T(t) \ x_F^T(t)]^T$ , 系统矩阵

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A-L_1C & -B & -BC_F \\ L_2C & 0 & 0 \\ B_F B^+ L_1 C & B_F & A_F + B_F C_F \end{bmatrix}.$$

对于跟踪控制子系统 II, 考虑到线性时不变系统的稳定性与外部输入信号无关, 令  $r(t) = 0$  和  $d(t) = 0$ , 结合式(2)(14)(26)(28) 得到其状态方程描述

$$\dot{\chi}_2(t) = \bar{A}_2 \chi_2(t) + \bar{A}_d \chi_2(t - \tau(t)), \quad (30)$$

其中:

$$\begin{cases} \chi_2(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_q(t) \end{bmatrix}, \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} A + B F_p & 0 \\ -\omega_c C & -\omega_c \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & B F_q \\ 0 & \omega_c \end{bmatrix}, F_p = K_p - K_q C, F_q = K_q. \end{cases} \quad (31)$$

可见子系统 I 没有包含子系统 II 的动态. 因此, 闭环系统满足分离设计原理.

**注 5** 系统矩阵  $\bar{A}_2$  和  $\bar{A}_d$  中引入了参数  $F_p$  和  $F_q$ , 通过调节  $F_p$  和  $F_q$  可以实现对重复控制过程中连续控制行为和相邻周期之间学习行为的调节, 从而改善系统的暂态和稳态性能. 同时由式(31)得到

$$K_p = F_p + F_q C, \quad K_q = F_q. \quad (32)$$

假设矩阵  $\Pi$  的结构奇异值分解式为

$$\Pi = \bar{U} [\bar{S} \ 0] \bar{V}^T, \quad (33)$$

其中:  $\bar{S}$  是半正定矩阵;  $\bar{U}, \bar{V}$  是酉矩阵.

基于结构奇异值分解式(33), 得到如下满足矩阵方程  $\Pi X = \bar{X} \Pi$  的条件.

**引理 2**<sup>[23]</sup> 给定矩阵  $\Pi \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $\text{rank}(\Pi) = p$ .

对任意矩阵  $X$ , 存在  $\bar{X} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , 使得  $\Pi X = \bar{X} \Pi$  的充要条件是  $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$  可以表示为

$$X = \bar{V} \begin{bmatrix} \bar{X}_\alpha & 0 \\ 0 & \bar{X}_\beta \end{bmatrix} \bar{V}^T, \quad (34)$$

其中:  $\bar{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  是酉矩阵,  $\bar{X}_\alpha \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\bar{X}_\beta \in \mathbb{R}^{(m-p) \times (m-p)}$ .

**引理 3**<sup>[24]</sup> 对于给定的实对称矩阵  $\Sigma = \Sigma^T$ , 以下条件等价:

- 1)  $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ * & \Sigma_{22} \end{bmatrix} < 0$ ;
- 2)  $\Sigma_{11} < 0$ , 且  $\Sigma_{22} - \Sigma_{12}^T \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} < 0$ ;
- 3)  $\Sigma_{22} < 0$ , 且  $\Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T < 0$ .

**定理 1** 给定一个矩阵  $M$ , 以及正数  $\alpha_{11}$  和  $\alpha_{12}$ , 如果存在正定对称矩阵  $X_\alpha, X_\beta, X_{12}, X_{13}$  和合适维数的矩阵  $W_{11}$  和  $W_{12}$ , 使得下列线性矩阵不等式 (linear matrix inequality, LMI) 成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ * & * & \Phi_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} X_{11} & \alpha_{12} X_{11} M & 0 \\ * & X_{12} & 0 \\ * & * & X_{13} \end{bmatrix} > 0, \quad (35)$$

其中: 输出矩阵  $C$  的奇异值分解式为

$$C = U [S \ 0] V^T, \quad (36)$$

$S \in \mathbb{R}^{p \times p}$  是半正定矩阵,  $U \in \mathbb{R}^{p \times p}, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是酉矩阵;  $X_{11} = V \text{diag}\{X_\alpha, X_\beta\} V^T$ ;

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \alpha_{11} (A X_{11} + X_{11} A^T - W_{11} C - C^T W_{11}^T) - \\ &\quad \alpha_{12} (B M^T X_{11} + X_{11} M B^T); \\ \Phi_{12} &= \alpha_{12} (A X_{11} M - W_{11} C M) + \alpha_{11} C^T W_{12}^T - B X_{12}; \\ \Phi_{13} &= -B C_F X_{13} + \alpha_{11} C^T W_{11}^T B^+ B_F^T + \alpha_{12} X_{11} M B_F^T; \\ \Phi_{22} &= \alpha_{12} (W_{12} C M + M^T C^T W_{12}^T); \\ \Phi_{23} &= \alpha_{12} M^T C^T W_{11}^T B^+ B_F^T + X_{12} B_F^T; \\ \Phi_{33} &= (A_F + B_F C_F) X_{13} + X_{13} (A_F + B_F C_F)^T, \end{aligned}$$

则子系统 I(29) 渐近稳定, 且 PIO 观测器增益为

$$\begin{cases} L_1 = W_{11} \bar{X}_{11}^{-1}, \quad L_2 = W_{12} \bar{X}_{11}^{-1}, \\ \bar{X}_{11}^{-1} = U S X_\alpha^{-1} S^{-1} U^T. \end{cases} \quad (37)$$

证明见附录 A.

**定理 2** 给定正数  $\alpha_{21}$  和  $\beta_{22}$ , 如果存在正定对称矩阵  $X_{21}, X_{22}, Y_{21}, Y_{22}$  和合适维数的矩阵  $W_{21}$  和  $W_{22}$ , 使得下列 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 & \Psi_{14} & \alpha_{21} X_{21} & 0 \\ * & \Psi_{22} & 0 & \Psi_{24} & 0 & X_{22} \\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Y_{21} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_{22} Y_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (38)$$

则子系统II渐近稳定, 其中:

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \alpha_{21}(AX_{21} + X_{21}A^T + BW_{21} + W_{21}^T B^T), \\ \Psi_{12} &= -\alpha_{21}\omega_c X_{21}C^T, \Psi_{14} = \beta_{22}BW_{22}, \\ \Psi_{22} &= -2\omega_c X_{22}, \Psi_{24} = \beta_{22}\omega_c Y_{22}, \\ \Psi_{33} &= (h-1)Y_{21}, \Psi_{44} = (h-1)\beta_{22}Y_{22}. \end{aligned}$$

进一步地, 可得控制增益

$$F_p = W_{21}X_{21}^{-1}, F_q = W_{22}Y_{22}^{-1}. \quad (39)$$

证明见附录B. 进而由式(39)得式(14)中的控制增益

$$K_p = W_{21}X_{21}^{-1} + W_{22}Y_{22}^{-1}C, K_q = W_{22}Y_{22}^{-1}. \quad (40)$$

**注6** LMI(35)(38)中引入可调参数(矩阵) $M, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ 和 $\beta_{22}$ 可以增强求解控制器参数的LMI可行性, 降低系统设计的保守性, 并提高系统设计的灵活性.

### 4.2 扰动抑制性能分析

令参考输入 $r(t) = 0$ , 对图2进行结构等价变换得到图3,  $d_e(t)$ 到 $y(t)$ 的传递函数为

$$G_{dy}(s) = G_d(s)G_o(s)G_f(s), \quad (41)$$

其中:

$$\begin{aligned} G_d(s) &= [1 + \bar{D}(s)H(s)\bar{F}(s)]^{-1}, \\ G_o(s) &= 1 - K_p\bar{D}(s), G_f(s) = [1 + M(s)\bar{P}(s)]^{-1}\bar{P}(s), \\ \bar{F}(s) &= C_F[sI - F_0^{-1}B_F], M(s) = K_q[1 - q(s)D_\tau]^{-1}, \\ H(s) &= B^+L_1C + s^{-1}L_2C, \bar{P}(s) = C[sI - P_0]^{-1}B, \\ \bar{D}(s) &= [sI - A + L_1C + s^{-1}BL_2C]^{-1}B, \\ F_0 &= A_F + B_FC_F, P_0 = A + BK_p. \end{aligned}$$

图3所示系统可视为在控制系统中嵌入扰动抑制环节 $G_d(s)$ . 若 $\bar{D}(s), H(s)$ 和 $\bar{F}(s)$ 经过合理设计使得 $\|G_d\|_\infty \approx 0$ , 则可以消除扰动对输出的影响.

结合图2-3, 得到等效结构框图(图4), 在外部输入 $r(t)$ 和 $d_e(t)$ 作用下系统的跟踪误差为

$$E(s) = \frac{R(s) - G_d(s)G_o(s)\bar{P}(s)D_e(s)}{1 + M(s)\bar{P}(s)}. \quad (42)$$

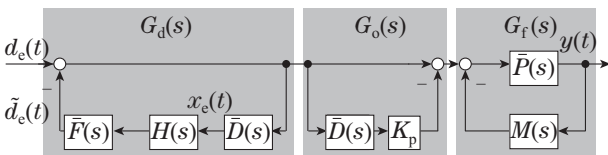


图3  $d_e(t)$ 到 $y(t)$ 的等效系统

Fig. 3 Equivalent system from  $d_e(t)$  to  $y(t)$

**注7** 由式(42)可知, 通过选取合适的观测器增益 $L_1$ 和 $L_2$ , 使得 $G_d(s)$ 趋于零, 可以减小非周期扰动对输出的影响.

### 4.3 控制器参数优化设计

本文选取PSO算法, 结合稳定性条件定理1和定理

2搜索优化可调参数 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ 和 $\beta_{22}$ , 然后代入LMI(35)和(38)获得反馈控制增益 $[K_p K_q]$ 和观测器增益 $[L_1 L_2]$ . 粒子的速度与位置更新公式为

$$\begin{cases} V_i^{k+1} = wV_i^k + c_1r_1(X_{p_i}^k - X_i^k) + c_2r_2(X_g^k - X_i^k), \\ X_i^{k+1} = X_i^k + V_i^{k+1}, \end{cases} \quad (43)$$

其中:  $X_i = [\alpha_{11i} \alpha_{12i} \alpha_{21i} \beta_{22i}] (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示第 $i$ 个粒子的位置;  $V_i^k$ 和 $X_i^k$ 分别表示第 $i$ 个粒子在第 $k$ 次迭代时的速度和位置;  $X_{p_i}^k$ 表示第 $i$ 个粒子在第 $k$ 次迭代时所处的个体最佳位置;  $X_g^k$ 是整个粒子群第 $k$ 次迭代时所处的群体最佳位置;  $r_1$ 和 $r_2$ 为区间(0, 1)之间的随机数;  $c_1, c_2$ 和 $w$ 分别为粒子的个体学习因子、群体学习因子和惯性权重

$$\begin{cases} c_1 = c_{\max} - \frac{(c_{\max} - c_{\min})k}{K}, \\ c_2 = c_{\min} + \frac{(c_{\max} - c_{\min})k}{K}, \\ w = w_{\max} - \frac{(w_{\max} - w_{\min})k}{K}, \end{cases} \quad (44)$$

其中:  $c_{\max}, c_{\min}, w_{\max}, w_{\min}$ 分别代表最大、最小学习因子和最大、最小惯性权重;  $K$ 为最大迭代次数.

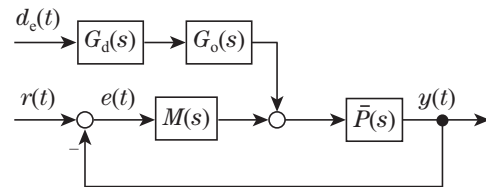


图4 外部输入信号到 $e(t)$ 的等效系统

Fig. 4 Equivalent system from input signal to  $e(t)$

**注8** 式(44)中的学习因子和惯性权重的表达式选取为线性函数, 在迭代前期设置较大的 $c_1$ 和 $w$ 来保证粒子充分搜索优化空间, 在迭代中后期逐渐提高 $c_2$ 的权重. 与选择固定的学习因子和惯性权重相比, 粒子能够更好地利用全局最优信息, 可以有效避免算法出现局部最优, 从而增强动态优化效果.

定义目标函数

$$J_i^k = J_1 + J_2 + J_3, \quad (45)$$

其中:

$$\begin{cases} J_1 = m_1 \int_0^{t_f} t|e_i^k(t)|dt, \\ J_2 = m_2 \cdot \max |e_i^k(t)|, 0 \leq t \leq t_f, \\ J_3 = m_3 \int_0^{t_f} t|x_i^k(t) - \hat{x}_i^k(t)|dt, \end{cases}$$

$t_f$ 为积分时间;  $J_i^k, x_i^k(t), \hat{x}_i^k(t)$ 和 $e_i^k(t)$ 分别为第 $i$ 个粒子在第 $k$ 次迭代时对应的适应度值、系统状态、状态估计值和系统跟踪误差,  $J_i^k$ 的各项权值为 $m_1, m_2$ 和 $m_3$ . 式(45)中,  $J_1$ 用于评估系统的动态性能和稳态性能,  $J_2$ 用于评估系统的平稳性,  $J_3$ 用于评估系统的扰

动估计性能. 引入优化精度参数  $\varepsilon_0 > 0$ , 以LMI(35)和(38)为约束条件, 通过求解优化问题

$$\min J_i^k < \varepsilon_0, \quad (46)$$

获得控制器参数优化组合.

### 5 仿真实验

本节将所提方法应用于卡盘-工件系统<sup>[25]</sup>速度控制, 假设系统参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad (47)$$

考虑跟踪位置相关时变周期参考输入

$$\tilde{r}(\theta(t)) = -10 \cos \theta(t) + 10, \quad (48)$$

其中

$$\theta(t) = \begin{cases} 0.075t^2, & 0 \leq t < 20 \text{ s}, \\ 3t - 30, & t \geq 20 \text{ s}, \end{cases} \quad (49)$$

于是  $T_\theta = 2\pi$ . 式(11)中时变周期  $\tau(t)$  的导函数为

$$\dot{\tau}(t) = \begin{cases} -\frac{40\pi}{3t^2}, & 0 \leq t < 20 \text{ s}, \\ 0, & t \geq 20 \text{ s}. \end{cases} \quad (50)$$

非周期外部扰动为  $d(t) = 0.1(\tanh(t-10) - \tanh(t-20)) + 0.1 \sin(0.4\pi t)$ .

选取  $q(s)$  的截止角频率为  $\omega_c = 100$ , 低通滤波器  $F(s)$  的参数为  $A_F = -25.1$ ,  $B_F = 25$  和  $C_F = 1$ .

应用第4.3节 PSO 算法求解控制器参数, 设  $m_1 = 0.1$ ,  $m_2 = 0.8$ ,  $m_3 = 0.1$ ,  $\varepsilon_0 = 10$ ,  $M = [-1 \ 0]^T$ ,  $n = 100$ ,  $K = 150$ , 搜索维度  $d_0 = 4$ , 学习因子  $c_{\max} = 1.2$ ,  $c_{\min} = 0.3$ , 惯性权重  $w_{\max} = 2$ ,  $w_{\min} = 0.4$ , 结合系统稳定性条件式(35)(38), 求解优化问题(46)得到参数

$$\begin{cases} \alpha_{11} = 851.695, \alpha_{12} = 484.062, \\ \alpha_{21} = 16.817, \beta_{22} = 15.882, \end{cases} \quad (51)$$

代入式(37)(40)得到控制器参数

$$\begin{cases} K_p = [-2.134 \ -1.785], K_q = 182.036, \\ L_1 = [2.161 \ 0.570]^T, L_2 = 0.859. \end{cases} \quad (52)$$

仿真结果如图5和表1所示, 其中:  $\max |e(t)|$  为最大跟踪误差,  $e_{ss}$  为系统稳态跟踪误差,  $u_{ss}$  为系统稳态控制输入. 系统在第3个位置域周期后进入稳态, 最大

稳态跟踪误差绝对值不超过  $3.788 \times 10^{-4}$ , 约为参考输入幅值的0.001 9%.

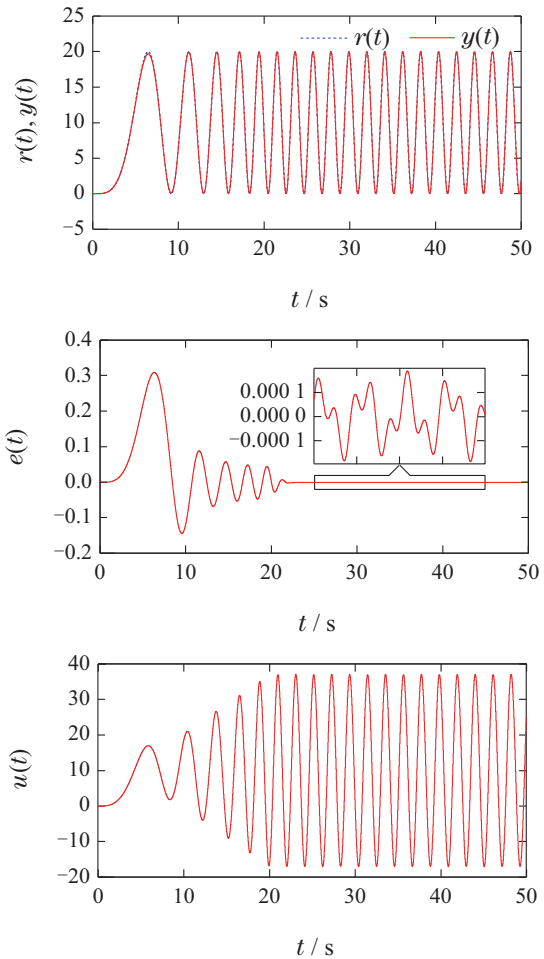


图5 基于EID补偿的时变周期重复控制系统的响应曲线  
Fig. 5 Response curves of the EID-compensation based time-varying periodic repetitive-control system

为了验证所提出的基于PIO的EID(简记为PIO-EID)方法的扰动抑制性能, 本文设计了文献[18]中基于LO的EID估计器, 对应  $d_e(t)$  到  $y(t)$  的传递函数为

$$\hat{G}_{dy}(s) = \hat{G}_d(s)\hat{G}_o(s)G_f(s), \quad (53)$$

其中

$$\begin{cases} \hat{G}_d(s) = [1 + \hat{D}(s)\hat{H}(s)\bar{F}(s)]^{-1}, \\ \hat{G}_o(s) = 1 - K_p\hat{D}(s), \\ \hat{D}(s) = (sI - A + L_1C)^{-1}B, \\ \hat{H}(s) = B^+L_1C. \end{cases}$$

表1 性能指标对比

Table 1 Comparison of performance indices

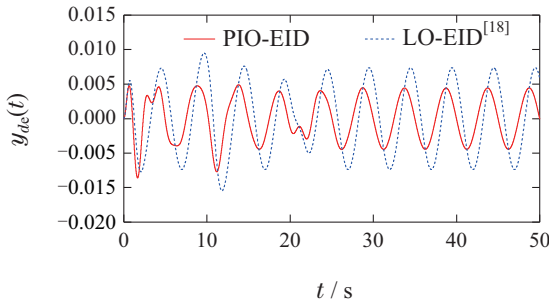
| 控制方法                        | $\max  e(t) _{0 < t \leq 20}$ | $e_{ss}$               | $u_{ss}$ | $J$    | $J_{ITAE_1}$ | $J_{ITAE_2}$          |
|-----------------------------|-------------------------------|------------------------|----------|--------|--------------|-----------------------|
| LO-EID-MRC <sup>[17]</sup>  | 0.255                         | $5.239 \times 10^{-4}$ | 54.114   | 10.530 | 24.08        | $1.24 \times 10^{-3}$ |
| PIO-EID-SRC <sup>[12]</sup> | 0.308                         | $2.998 \times 10^{-2}$ | 54.824   | 37.630 | 10.28        | $2.66 \times 10^{-3}$ |
| LO-EID <sup>[18]</sup>      | 0.310                         | $5.239 \times 10^{-4}$ | 54.114   | 9.509  | 13.49        | $1.24 \times 10^{-3}$ |
| 本方法                         | 0.310                         | $3.788 \times 10^{-4}$ | 54.114   | 9.421  | 13.49        | $7.94 \times 10^{-4}$ |

根据图6(a), 本方法的输出  $y_{de}(t)$  减小了 32.30%, 可见PIO-EID比LO-EID具有更好的扰动抑制性能.

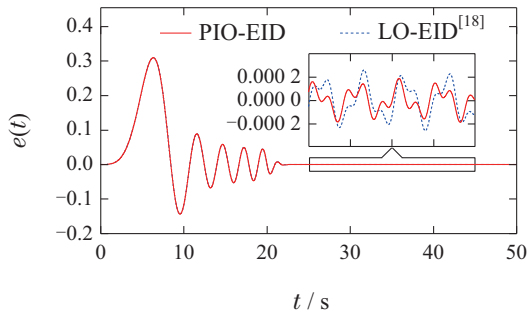
定义性能指标

$$J_{ITAE_1} = \int_0^{20} t|e(t)|dt, J_{ITAE_2} = \int_{30}^{40} t|e(t)|dt, \quad (54)$$

其中:  $J_{ITAE_1}$  评价系统在 0 ~ 20 s 变速运行的控制性能,  $J_{ITAE_2}$  评价系统在 30 ~ 40 s 匀速运行的控制性能. 图6(b)和表1对基于PIO-EID和LO-EID<sup>[18]</sup>的时变周期重复控制系统的暂态和稳态性能进行了比较, 可见本文所提方法同时具有更好的跟踪性能.



(a)  $d_e(t)$ 作用下的输出



(b) 与时变周期重复控制器结合的系统跟踪误差

图6 与基于LO的EID<sup>[18]</sup>方法比较

Fig. 6 Comparisons with LO-EID<sup>[18]</sup>

为了进一步验证所提方法的控制性能, 本文将基于LO-EID的定周期改进型重复控制<sup>[17]</sup>(modified repetitive control, MRC)和基于PIO-EID的空间域重复控制<sup>[12]</sup>(spatial repetitive control, SRC)方法进行对比. 为了保证比较的公平性, 低通滤波器、状态观测器增益和反馈控制增益均与式(52)一致. 仿真结果图7和表1所示: 1) 在变速运行阶段, 本方法和SRC方法的性能指标明显优于MRC方法; 2) 在匀速运行阶段, 虽然本文所提方法的超调量偏大一点, 但闭环系统收敛速度更快, 稳态跟踪误差更小; 3) 本文提出的时变周期重复控制方法具有最好的暂态和稳态控制性能.

此外, 实际系统中不可避免地存在测量噪音等因素影响, 为了验证所提方法的实用性, 本文在系统输出通道加入白噪声(峰值:  $\pm 0.02$ ), 仿真结果如图8所示, 表明系统的稳态跟踪误差仍然维持在较小的范围, 可见所提方法能够很好地抑制噪声对系统性能的影响.

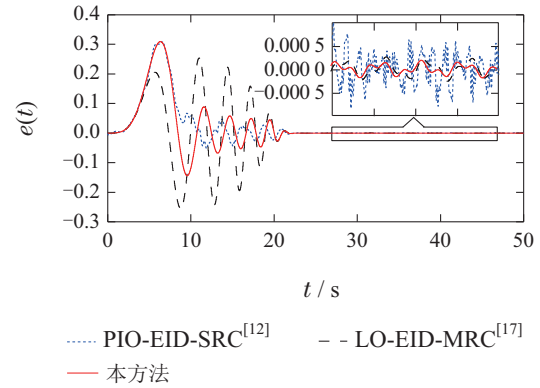


图7 与PIO-EID-SRC<sup>[12]</sup>和LO-EID-MRC<sup>[17]</sup>跟踪误差对比  
Fig. 7 Comparisons of tracking error between PIO-EID-SRC<sup>[12]</sup> and LO-EID-MRC<sup>[17]</sup>

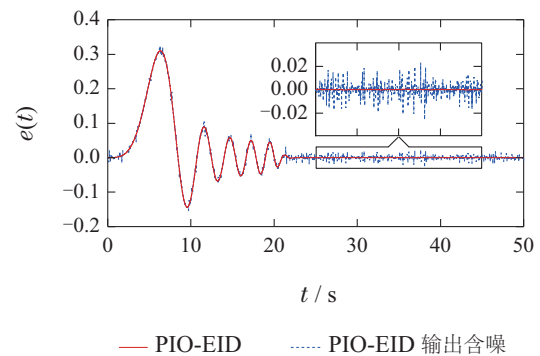


图8 输出中有白噪声(峰值:  $\pm 0.02$ )基于PIO-EID的时变周期重复控制系统的跟踪误差  
Fig. 8 Tracking error of PIO-EID-based time-varying periodic repetitive-control system with whitenoise (peak value:  $\pm 0.02$ ) in output

## 6 结论

本文针对一类同时具有位置相关的时变周期参考输入信号和非周期扰动的旋转机械系统, 提出基于PIO-EID的时变周期重复控制方法, 建立了基于PIO的EID估计器对非周期扰动的作用效果进行实时估计和前馈补偿. 基于分离设计原理, 建立了系统稳定性条件, 采用PSO算法对时变周期重复控制器和EID估计器参数进行寻优. 最后将本文所提出的方法应用于卡盘-工件系统的转速控制, 通过与基于传统EID估计器的时域定周期重复控制方法和基于PIO-EID的空间域重复控制方法进行对比, 说明本文方法具有更好的暂态和稳态抗扰及跟踪控制性能.

## 参考文献:

- [1] TSAI M C, LEE Y H. Tracking control of a software cam machining system. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1999, 121(4): 729 – 735.
- [2] INOUE T, NAKANO M, KUBO T, et al. High accuracy control of a proton synchrotron magnet power supply. *IFAC Proceedings Volumes*, 1981, 14(2): 3137 – 3142.
- [3] FRANCIS B A, WONHAM W M. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 1976, 12(5): 457 – 465.

- [4] HARA S, OMATA T, NAKANO M. Synthesis of repetitive control systems and its application. *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, Fort Lauderdale, USA: IEEE, 1985: 1387 – 1392.
- [5] PANOMRUTTANARUG B. Position control of robotic manipulator using repetitive control based on inverse frequency response design. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2020, 18(11): 2830 – 2841.
- [6] XIE Z, XIE F, LIU X J, et al. Tracking error prediction informed motion control of a parallel machine tool for high-performance machining. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2021, 164: 103714.
- [7] ZHOU L, LIAO C, SHE J, et al. Command-filtered backstepping repetitive control for a class of uncertain nonlinear systems based on additive state decomposition. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 70(5): 5150 – 5160.
- [8] PIPELEERS G, DEMEULENAERE B, DE SCHUTTER, et al. Robust high-order repetitive control: Optimal performance trade-offs. *Automatica*, 2008, 44(10): 2628 – 2634.
- [9] LIU Z, ZHOU K, YANG Y, et al. Frequency-adaptive virtual variable sampling-based selective harmonic repetitive control of power inverters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 68(11): 11339 – 11347.
- [10] HERRAN M A, FISCHER J R, GONZALEZ S A, et al. Repetitive control with adaptive sampling frequency for wind power generation systems. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, 2013, 2(1): 58 – 69.
- [11] NAKANO M, SHE J H, MASTUO Y, et al. Elimination of position-dependent disturbances in constant-speed-rotation control systems. *Control Engineering Practice*, 1996, 4(9): 1241 – 1248.
- [12] LIU Q, HUO X, LIU K Z, et al. Accurate cycle aligned repetitive control for the rejection of spatially cyclic disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2021, 69(6): 6173 – 6181.
- [13] HUO X, WANG M, LIU K Z, et al. Attenuation of position-dependent periodic disturbance for rotary machines by improved spatial repetitive control with frequency alignment. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2019, 25(1): 339 – 348.
- [14] LAN Y H, ZHAO L. Integral sliding mode disturbance observer based preview repetitive control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2024, 146(4): 45001.
- [15] XU J, WEI Z, WANG S. Active disturbance rejection repetitive control for current harmonic suppression of PMSM. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2023, 38(11): 14423 – 14437.
- [16] TIAN S, LIU K Z, ZHANG M, et al. Two-dimensional repetitive control of uncertain Takagi-Sugeno systems based on a new equivalent-input-disturbance estimator. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2024, 32(4): 2366 – 2377.
- [17] LIAO Changchao, ZHOU Lan, PAN Changzhong, et al. Parameter optimization design of an improved repetitive control system based on equivalent input disturbance compensation. *Control Theory & Applications*, 2022, 39(4): 653 – 662. (廖常超, 周兰, 潘昌忠, 等. 基于等价输入干扰补偿的改进型重复控制系统参数优化设计. *控制理论与应用*, 2022, 39(4): 653 – 662.)
- [18] SHE J, FANG M, OHYAMA Y, et al. Improving disturbance-rejection performance based on an equivalent-input-disturbance approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2008, 55(1): 380 – 389.
- [19] LI M, SHE J, ZHANG C K, et al. Active disturbance rejection for time-varying state-delay systems based on equivalent-input-disturbance approach. *ISA Transactions*, 2021, 108: 69 – 77.
- [20] JIN H, GAO Z. On the notions of normality, locality, and operational stability in ADRC. *Control Theory and Technology*, 2023, 21(1): 97 – 109.
- [21] DU Y, CAO W, SHE J, et al. Disturbance rejection and control system design using improved equivalent input disturbance approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 67(4): 3013 – 3023.
- [22] HARA S, YAMAMOTO Y, OMATA T, et al. Repetitive control system: A new type servo system for periodic exogenous signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(7): 659 – 668.
- [23] HO D, LU G. Robust stabilization for a class of discrete-time nonlinear systems via output feedback: The unified LMI approach. *International Journal of Control*, 2003, 76(2): 105 – 115.
- [24] KHARGONEKAR P, PETERSEN I, ZHOU K. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and H infinity-control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(3): 356 – 361.
- [25] DOI M, MASUKO M, ITO Y, et al. A study on parametric vibration in chuck work. *Bulletin of JSME*, 1985, 28(245): 2774 – 2780.

## 附录A(定理1证明)

证 选取Lyapunov候选函数

$$V(\chi_1(t)) = \chi_1^T(t) \bar{P}_1 \chi_1(t), \quad (A1)$$

其中  $\bar{P}_1 = X^{-1}$ ,  $X$  是对称正定矩阵, 设定为

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_{11} X_{11} & \alpha_{12} X_{11} M & 0 \\ * & X_{12} & 0 \\ * & * & X_{13} \end{bmatrix}. \quad (A2)$$

$V(\chi_1(t))$  沿系统(29)的时间导数为

$$\dot{V}(\chi_1(t)) = \chi_1^T(t) (\bar{P}_1 \bar{A}_1 + \bar{A}_1^T \bar{P}_1) \chi_1(t), \quad (A3)$$

如果  $\Sigma_1 = \bar{P}_1 \bar{A}_1 + \bar{A}_1^T \bar{P}_1 < 0$  成立, 那么子系统1渐近稳定.

将  $\Sigma_1$  分别左乘和右乘对角矩阵  $X = \bar{P}_1^{-1}$ , 得到

$$\Xi_1 = \bar{A}_1 X + X \bar{A}_1^T < 0. \quad (A4)$$

进而由式(A2)得到LMI(35). 由于  $X_{11} = V \text{diag}\{X_\alpha, X_\beta\} V^T$ , 根据引理2和式(36)得  $C X_{11} = \bar{X}_{11} C$ , 且  $\bar{X}_{11} = U S X_\alpha S^{-1} U^T$ .

令  $W_{11} = L_1 \bar{X}_{11}$ ,  $W_{12} = L_2 \bar{X}_{11}$ , 于是得到观测器增益(37). 证毕.

## 附录B(定理2证明)

证 构造如下所示的Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$V(t, \chi_2(t)) = \chi_2^T(t) \bar{P}_2 \chi_2(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \chi_2^T(s) \bar{Q}_2 \chi_2(s) ds, \quad (B1)$$

其中:  $X_{21} = P_{21}^{-1}$ ,  $X_{22} = P_{22}^{-1}$ ,  $Y_{21} = Q_{21}^{-1}$ ,  $Y_{22} = Q_{22}^{-1}$ ,  $\bar{P}_2 = \text{diag}\{\frac{1}{\alpha_{21}} P_{21}, P_{22}\}$ ,  $\bar{Q}_2 = \text{diag}\{Q_{21}, \frac{1}{\beta_{22}} Q_{22}\}$ .

注意到上式由于  $\tau(t)$  存在导致  $V(t, \chi_2(t))$  显含  $t$ . 根据式(12)可知, 时变周期  $\tau(t)$  满足条件  $\dot{\tau}(t) \leq h < 1$ , 即为变化缓慢的时变时滞. 将  $V(t, \chi_2(t))$  沿系统(30)对时间求导

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \chi_2(t)) &= 2\chi_2^T(t) \bar{P}_2 \dot{\chi}_2(t) + \chi_2^T(t) \bar{Q}_2 \chi_2(t) - \\ & (1 - \dot{\tau}(t)) \chi_2^T(t - \tau(t)) \bar{Q}_2 \chi_2(t - \tau(t)) < \\ & \chi_2^T(t) (\bar{P}_2 \bar{A}_2 + \bar{A}_2^T \bar{P}_2 + \bar{Q}_2) \chi_2(t) + \\ & \chi_2^T(t) \bar{P}_2 \bar{A}_d \chi_2(t - \tau(t)) + \chi_2^T(t - \tau(t)) \bar{A}_d^T \bar{P}_2 \chi_2(t) - \\ & (1 - h) \chi_2^T(t - \tau(t)) \bar{Q}_2 \chi_2(t - \tau(t)) = \\ & \bar{\Psi}^T(t) \Xi \bar{\Psi}(t), \end{aligned} \quad (B2)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(t) &= [\chi_2^T(t) \quad \chi_2^T(t - \tau(t))]^T, \\ \Xi &= \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11} + Q_{21} & \bar{\Psi}_{12} & 0 & \bar{\Psi}_{14} \\ * & \bar{\Psi}_{22} + \frac{1}{\beta_{22}} Q_{22} & 0 & \bar{\Psi}_{24} \\ * & * & (h-1)Q_{21} & 0 \\ * & * & * & \frac{(h-1)}{\beta_{22}} Q_{22} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Psi}_{11} = \frac{1}{\alpha_{21}} (P_{21}A + A^T P_{21} + P_{21}B F_p + F_p^T B^T P_{21}),$$

$$\bar{\Psi}_{12} = -\omega_c C^T P_{22}, \bar{\Psi}_{14} = \frac{1}{\alpha_{21}} P_{21} B F_q,$$

$$\bar{\Psi}_{22} = -2\omega_c P_{22}, \bar{\Psi}_{24} = \omega_c P_{22}.$$

如果矩阵不等式  $\Xi < 0$  成立, 那么子系统 II 是渐近稳定的. 根据引理 3,  $\Xi < 0$  等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11} & \bar{\Psi}_{12} & 0 & \bar{\Psi}_{14} & Q_{21} & 0 \\ * & \bar{\Psi}_{22} & 0 & \bar{\Psi}_{24} & 0 & \frac{1}{\beta_{22}} Q_{22} \\ * & * & (h-1)Q_{21} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \frac{(h-1)}{\beta_{22}} Q_{22} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_{21} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\beta_{22}} Q_{22} \end{bmatrix} < 0.$$

(B3)

定义

$$W_{21} = F_p X_{21}, W_{22} = F_q Y_{22}. \tag{B4}$$

将式 (B3) 左乘和右乘  $\text{diag}\{\alpha_{21} X_{21}, X_{22}, Y_{21}, \beta_{22} Y_{22}, Y_{21}, \beta_{22} Y_{22}\}$ , 得到 LMI(38), 并根据式 (B4) 得到式 (40) 的控制器参数. 证毕.

作者简介:

**贾奉溢** 硕士研究生, 目前研究方向为主动扰动抑制和重复控制理论及其应用, E-mail: jiafy303@163.com;

**周 兰** 教授, 博士, 目前研究方向为非线性控制和重复控制理论及其应用, E-mail: zhoulun75@163.com;

**李美柳** 讲师, 博士, 目前研究方向为通信网络技术和网络化系统扰动抑制, E-mail: limeiliu@hnust.edu.cn;

**肖文彬** 讲师, 博士, 目前研究方向为分布式协同控制和智能控制及其应用, E-mail: xiaowb992@163.com.