

# 时变不平衡有向图上分布式在线约束优化算法

李庆海<sup>1</sup>, 朱亚楠<sup>1†</sup>, 刘洪喆<sup>2</sup>

(1. 南京信息工程大学 自动化学院, 江苏 南京 210044; 2. 东南大学 数学学院, 江苏 南京 210096)

**摘要:** 本文研究了一类分布式在线约束优化问题, 其中每个智能体局部损失函数时变且为凸函数, 且仅对自身可知. 各智能体拥有不同的约束集, 且智能体间的通信通过一系列时变不平衡有向图表示. 本文的目标是以分布式方式求解这一在线优化问题. 针对该问题, 本文在推和的框架下结合投影反馈和消除不平衡性的思想, 提出了一种新的分布式在线优化算法. 当全局损失函数为强凸时, 证明了算法的网络静态悔界 $R(T)$ 以速率 $\mathcal{O}(\log(T))$ 收敛. 最后, 通过数值仿真实验验证了算法的有效性. 这些结果展示了该算法在解决分布式在线优化问题中的潜在应用前景.

**关键词:** 分布式在线优化; 时变有向图; 静态悔界; 次线性收敛; 非一致性约束

**引用格式:** 李庆海, 朱亚楠, 刘洪喆. 时变不平衡有向图上分布式在线约束优化算法. 控制理论与应用, 2026, 43(4): 893–904

DOI: 10.7641/CTA.2025.40387

## Distributed online constrained optimization algorithm over time-varying unbalanced digraphs

LI Qing-hai<sup>1</sup>, ZHU Ya-nan<sup>1†</sup>, LIU Hong-zhe<sup>2</sup>

(1. College of Automation, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing Jiangsu 210044, China;

2. College of Mathematics, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

**Abstract:** This paper investigates a class of distributed online constrained optimization problems, where each agent possesses a time-varying convex local loss function that is known only to itself. Each agent operates under a distinct constraint set, and communication between agents is modeled through a series of time-varying unbalanced directed graphs. The goal of this paper is to solve this online optimization problem in a distributed manner. To this end, we propose a novel distributed online optimization algorithm that leverages the push-sum framework and the principles of consensus and projection feedback, while also implementing a strategy to address the issue of imbalance. The theoretical analysis reveals that when the global loss function is strongly convex, the network static regret  $R(T)$  of the algorithm converges at a rate of  $\mathcal{O}(\log(T))$ . Finally, the effectiveness of the algorithm is further validated through numerical simulations. These results provide insights into the algorithm's potential practical value in solving distributed online optimization problems.

**Key words:** distributed online optimization; time-varying digraphs; static regret; sublinear convergence; nonidentical constraints

**Citation:** LI Qinghai, ZHU Yanan, LIU Hongzhe. Distributed online constrained optimization algorithm over time-varying unbalanced digraphs. *Control Theory & Applications*, 2026, 43(4): 893–904

## 1 引言

近年来, 随着科学技术的快速发展及大规模网络数据的出现, 以分布式的方式求解多智能体网络的优化问题引起了研究者的广泛关注<sup>[1–2]</sup>. 在这一研究框架中, 每个智能体仅掌握局部信息, 并通过通信网络与邻近智能体协作, 借助自身的梯度信息持续优化

状态, 目标是实现整个网络智能体状态的一致性最优. 分布式优化问题在现实世界的应用场景中极为普遍, 多种问题均可在此框架下找到解决方案. 典型的应用案例包括但不限于资源分配<sup>[3–4]</sup>、隐私保护<sup>[5–6]</sup>、智能电网<sup>[7]</sup>以及传感器网络跟踪<sup>[8]</sup>等.

至今, 分布式优化算法领域已取得了广泛而深入

收稿日期: 2024–07–22; 录用日期: 2025–01–16.

†通信作者. E-mail: ynzhu@nuist.edu.cn.

本文责任编辑: 杨辰光.

国家自然科学基金项目(62203224, 62203110, 12302032), 国家自然科学基金–联合基金重点项目(U22B2046)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (62203224, 62203110, 12302032) and the National Natural Science Foundation of China-Joint Fund Key Project (U22B2046).

的研究成果<sup>[9-15]</sup>. 上述的分布式优化算法主要针对具有静态或固定目标函数的优化问题. 然而, 在许多实际应用场景中, 由于动态因素的影响, 目标函数往往随时间变化. 例如, 在机器学习中, 新数据样本的出现会更新成本函数; 在传感器定位与跟踪网络中, 环境干扰和噪声导致传感器数据随时间变化. 这些挑战促使分布式优化算法自然延伸到分布式在线优化领域.

在现有的分布式在线优化算法中, 文献[16]推广了分布式在线次梯度下降和鞍点动力学, 并提出了一系列协调算法. 特别地, 当局部目标函数满足强凸性条件时, 所提出的算法实现了 $\mathcal{O}(\log(T))$ 的静态悔界. 在分布式数据源的在线学习场景中, 文献[17]提出的算法不仅在强凸函数条件下实现了与文献[16]相当的静态悔界, 还进一步证明了算法本身具备隐私保护的属性, 并探讨了网络隐私保护的充分和必要条件. 文献[18]通过整合正则化凸凹函数, 开发了一种基于共识机制的自适应分布式原始对偶子梯度算法, 有效解决了带有不等式约束的分布式在线优化问题. 针对具有时间间隔耦合不等式约束的分布式在线问题, 文献[19]提出了一种原始对偶镜像下降算法. 在此算法框架的基础上, 通过融合一点式和两点式强盗反馈机制, 文献[20]提出了分布式强盗在线算法. 此外, 文献[21-23]通过使用Frank-Wolfe步骤替代传统投影步骤, 也提出了多种优秀的无投影分布式在线优化算法.

上述的分布式优化算法均假设通信网络是处于平衡状态, 并且依赖于双随机矩阵来实现智能体间状态的最优一致性. 然而, 在现实世界的应用中, 智能体常受到外部环境的干扰和噪声影响, 导致通信网络的拓扑结构难以持续维持在平衡状态. 因此, 针对现有算法在双随机矩阵依赖性上的局限, 探索将这些算法扩展至非平衡图的分布式优化策略也引起了研究者的广泛探讨<sup>[24-30]</sup>. 在解决不平衡网络中的分布式在线凸优化问题方面, 文献[24]扩展了文献[9]的算法到分布式在线优化中, 并实现了 $\mathcal{O}(\log(T)^2)$ 的悔界. 进一步地, 文献[25]引入了强盗反馈机制和单点估计方法, 提出了一种新型分布式在线凸优化算法, 该算法为网络中每个节点提供了静态悔界. 为了获取更快的收敛速率, 文献[26]通过在推和的策略下结合动量加速技术, 使得所提算法达到了 $\mathcal{O}(\sqrt{1 + \log(T)})$ 的悔界. 文献[27]融合了推和策略与原始对偶算法, 有效解决了存在局部集合约束和耦合不等式约束的分布式在线优化问题. 此外, 文献[28]在盈余法<sup>[10]</sup>的基础上, 结合高斯近似和双点梯度估计技术, 提出了一种在线无梯度分布式投影梯度下降算法. 特别地, 针对存在耦合不等式约束的不平衡网络环境, 文献[29]开发了一种分布式对偶梯度跟踪算法(distributed dual subgradient tracking algorithm, DUST). 文献[30]则是通过构造行随机矩阵来应对网络的不平衡性, 提

出了一种基于共识机制和局部随机零阶预测方法的分布式在线优化算法.

根据文献[2]可知, 针对具有简单约束集的分布式在线优化问题, 当局部目标函数是强凸时, 最好的悔界是 $\log(T)$ . 尽管文献[16]和文献[17]的悔界都达到了最好的界, 但是其均在平衡通信网络上完成的工作. 同时文献[24-26]均是基于推和协议下的分布式在线优化算法, 但其所研究的均是无约束优化问题. 鉴于此, 本文研究时变不平衡网络上具有非一致性约束的分布式在线优化问题, 在推和协议的框架下开发新的分布式在线约束优化算法. 具体贡献如下:

1) 与文献[16]和文献[17]相比, 本文智能体之间的通信由一系列时变权重不平衡有向图构成, 相对应的邻接矩阵为列随机矩阵. 与文献[24-26]相比, 每个智能体的状态受不同的闭凸集约束;

2) 本文所提出的算法在满足至少一个局部损失函数是强凸的条件下, 通过严格的理论分析证明了网络静态悔界 $R(T)$ 为 $\log(T)$ . 这一理论成果与现有文献[2]中报道的具有简单约束集的分布式在线优化问题下的最佳静态悔界表现一致;

3) 通过与文献[17]中的静态悔界结果进行仿真实验对比, 验证了本文算法在静态悔界方面的有效性.

本文的其余部分安排如下: 第2节阐述本文的符号定义, 图论的基本概念以及支撑本文研究的相关引理; 第3节描述所研究的在线优化问题, 并给出了分布式在线约束优化算法的具体形式; 第4节对所提算法的性能进行了深入的理论分析, 并呈现了网络静态悔界 $R(T)$ 的结果; 第5节通过一系列数值仿真实验, 验证了所提算法悔界的有效性. 最后, 本文对研究成果做出全面总结, 并对未来的研究方向提出了展望.

## 2 预备知识

本节介绍本文所使用符号的定义, 图论的基础知识, 以及一些所需的基本引理.

### 2.1 基本符号定义

令 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Z}$ 分别表示实数集和整数集,  $\mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{Z}^+$ 分别表示正实数集和正整数集.  $m$ -维实数向量空间定义为 $\mathbb{R}^m$ , 而 $m \times n$ 维实数矩阵空间定义为 $\mathbb{R}^{m \times n}$ . 本文中的向量默认为列向量, 除非另有说明. 符号 $\mathbf{1}$ 表示元素全为1的单位列向量. 对于任意向量 $w \in \mathbb{R}^m$ ,  $\|w\|$ 表示向量 $w$ 的欧几里得范数(即二范数), 且 $w_i$ 表示向量 $w$ 的第 $i$ 个分量, 其中 $i = 1, 2, \dots, m$ . 对于任意闭凸集 $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\Pi_D(w)$ 表示向量 $w$ 在闭凸集 $D$ 上的投影点,  $\Pi_D$ 为闭凸集 $D$ 上的投影算子, 且 $\text{dist}(w, \Pi_D(w)) = \|w - \Pi_D(w)\|$ 表示向量 $w$ 到闭凸集 $D$ 的距离. 此外, 对于定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的函数 $f$ ,  $\partial f$ 表示函数 $f$ 的梯度. 对于任意矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A_{ij}$ 表示矩阵 $A$ 的第 $i$ 行、第 $j$ 列的元素,  $A^T$ 和 $\|A\|$ 分别表示矩阵 $A$ 的

转置矩阵和矩阵范数.

### 2.2 图论

本文研究由  $m$  个智能体组成的网络, 其中智能体之间的通信随时间变化, 可用时变有向图序列  $\{G^k\} = \{I, \varepsilon^k, Q^k\}$  表示. 这里,  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  代表节点集, 表示  $m$  个智能体.  $\varepsilon^k \subseteq I \times I$  为时变有向边集序列, 伴随有列随机邻接矩阵序列  $\{Q^k\}$ , 即  $Q^T \mathbf{1} = \mathbf{1}$ . 在  $k$  时刻, 若智能体  $i$  可以接收到智能体  $j$  的信息时, 智能体  $j$  称为智能体  $i$  的入邻居, 智能体  $i$  称为智能体  $j$  的出邻居, 此时有向边  $(i, j) \in \varepsilon^k$ , 且  $Q_{ij}^k > 0$ ; 若  $(i, j) \notin \varepsilon^k$ , 则  $Q_{ij}^k = 0$ . 特别对于任意的  $i \in I, (i, i) \in \varepsilon^k$ , 且  $Q_{ii}^k > 0$ .  $M_{i,k}^{\text{in}}$  和  $M_{i,k}^{\text{out}}$  分别表示智能体  $i$  在  $k$  时刻入邻居和出邻居的集合. 若在  $k$  时刻存在一组有向边序列  $(m_0, m_1), (m_1, m_2), \dots, (m_{n-1}, m_n)$ , 则称智能体  $m_n$  到智能体  $m_0$  之间存在有向路径. 若任意两个智能体之间均能找出一条有向路径, 则称有向图  $G^k$  为强连通图. 若存在一个正整数  $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ , 使得有向图  $G^k$  的联合图  $\bigcup_{r=k}^{k+k_0-1} G^r$  强连通, 则称有向图序列  $\{G^k\}$  为一致联合强连通图.

### 2.3 相关引理

此节给出后续算法分析中将会用到的相关引理.

**引理 1**<sup>[9]</sup> 假设  $\{\gamma^k\}$  是一个非负标量序列,  $d_0$  是满足  $0 < d_0 < 1$  的正常数, 有

a) 如果  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma^k = \gamma_0$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^k d_0^{k-r} \gamma^r = \frac{\gamma_0}{1-d_0}$ ;

b) 当  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k < \infty$  时,  $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{r=0}^k d_0^{k-r} \gamma^r) < \infty$ .

**引理 2**<sup>[11]</sup> 假设  $\{\gamma^k\}$  是一个严格正标量序列,  $d_0$  是满足  $0 < d_0 < 1$  的正常数, 对于  $t \geq 0$ , 有

$$\left(\sum_{k=0}^{t-1} d_0^{t-k-1} \gamma^k\right)^2 \leq \frac{1}{1-d_0} \sum_{k=0}^{t-1} d_0^{t-k-1} (\gamma^k)^2.$$

**引理 3**<sup>[31]</sup> 对于任意给定向量  $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n$  和  $s \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , 投影算子  $\Pi_{\Omega}$  满足如下性质:

- a)  $\|\Pi_{\Omega}(b) - \Pi_{\Omega}(c)\| \leq \|b - c\|$ ;
- b)  $(\Pi_{\Omega}(b) - b)^T (\Pi_{\Omega}(b) - s) \leq 0$ .

**注 1** 这些引理在处理闭凸约束集的分布式优化问题中十分常见. 引理1和引理2为后续理论分析奠定基础, 引理3则描述了投影操作的基本性质, 其中: a) 部分阐明了投影操作的非扩张性质; b) 部分则直接基于投影原理得出.

## 3 问题描述与算法设计

### 3.1 具有非一致性约束的分布式在线优化问题

本文研究以列随机矩阵为特征的时变有向图上具有  $m$  个智能体的分布式在线优化问题, 每个智能体  $i \in I$  拥有时变的损失函数序列  $f_i^1, f_i^2, \dots, f_i^T$  及约束集  $\Omega_i$ .  $f_i^k: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  代表着智能体  $i$  在  $k$  时刻的损失函

数, 并且该信息仅在智能体  $i$  提交其决策  $q_i^k$  后才会被显示. 目标是最小化所有智能体随时间  $T$  变化的累积成本函数

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m f_i^k(q), \\ & \text{s.t. } q \in \Omega = \bigcap_{i=1}^m \Omega_i, \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $q \in \mathbb{R}^n$  代表智能体的状态, 局部损失函数  $f_i^k$  是凸的, 仅智能体  $i$  知晓, 其他智能体通过网络通信获得相邻智能体的信息. 令  $\Omega^*$  和  $f^*$  分别表示最优解集和最优损失函数值. 此外, 局部约束集  $\Omega_i$  是闭凸集, 且所有智能体约束集的交集  $\Omega$  是非空的. 为求解该问题, 本文作出下述合理假设:

**假设 1** 所有局部损失函数  $f_i^k$  具有连续的梯度.

**假设 2** 所有局部损失函数  $f_i^k$  的闭凸约束集  $\Omega_i$  有界, 且最优解集  $\Omega^*$  非空.

**假设 3**<sup>[11]</sup> 对于任意的  $q \in \mathbb{R}^n$ , 存在一个正常数  $M$ , 使得下式恒成立:

$$\text{dist}(q, \Omega) \leq M \max_{1 \leq i \leq m} \text{dist}(q, \Omega_i). \quad (2)$$

**假设 4** 时变有向图序列  $\{G^k\}$  为一致联合强连通图.

**注 2** 为证明算法的收敛性, 关键性质之一是假设所有局部目标函数的梯度一致有界. 因此, 本文提出假设1和假设2, 以确保所研究问题的局部损失函数的梯度一致有界. 为简化分析, 假设所有的局部目标函数  $f_i^k$  的梯度值小于常数  $S$ , 即  $\|\partial f_i^k(u)\| \leq S$ . 同时, 最优解集  $\Omega^*$  非空确保优化问题有最优解. 假设4的提出旨在确保信息能够在网络中有效传播, 从而保证算法的收敛性、鲁棒性和全局一致性, 最终使分布式优化算法在时变不平衡的网络环境中稳定运行.

### 3.2 分布式在线约束优化算法

为求解问题(1), 本文提出一种基于推和协议的分布式在线约束优化算法. 算法1具体形式如下:

$$v_i^k = \frac{\sum_{j=1}^m Q_{ij}^k q_j^k}{\sum_{j=1}^m Q_{ij}^k \omega_j^k}, \quad (3)$$

$$\hat{q}_i^k = \sum_{j=1}^m Q_{ij}^k q_j^k + \kappa (u_i^k - v_i^k), \quad (4)$$

$$q_i^{k+1} = \hat{q}_i^k - \theta^k \partial f_i^k(u_i^k), \quad (5)$$

$$\omega_i^{k+1} = \sum_{j=1}^m Q_{ij}^k \omega_j^k, \quad (6)$$

其中:  $q_i^k \in \mathbb{R}^n$  表示第  $i$  个智能体的状态,  $\omega_i^k \in \mathbb{R}$  表示第  $i$  个智能体引入的辅助变量. 初始条件  $q_i^0$  可以任意选择,  $\omega_i$  的初始值取1以确保分母不会出现零值.  $u_i^k$  定义为状态  $v_i^k$  在闭凸约束集  $\Omega_i$  上的投影, 即  $u_i^k =$

$\Pi_{\Omega_i}(v_i^k)$ .  $\{\theta^k\}$  是满足  $\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k = \infty$  和  $\sum_{k=0}^{\infty} (\theta^k)^2 < \infty$  的非负衰减步长序列.  $\partial f_i^k(u_i^k)$  表示时变损失函数  $f_i^k$  在点  $u_i^k$  的梯度值.

基于上述算法形式, 算法原理简述如下: 根据式(3)和式(6), 智能体之间先进行信息交互. 由于时变通信网络的邻接矩阵是列随机的, 仅通过通信交互, 智能体状态  $q_i^k$  无法收敛到平均状态  $\bar{q}^k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m q_i^k$ . 因此, 算法通过引入辅助变量  $\omega_i^k$  来估计转移矩阵  $\Phi(k : s) = Q(s)Q(s+1) \cdots Q(k-1)Q(k)$  特征值为1的随机向量  $\pi(k)$ , 从而确保新状态  $v_i^k$  收敛到平均状态  $\bar{q}^k$ . 更多细节可参考文献[9]. 根据式(4)–(5), 通过投影反馈处理非一致性约束, 以及梯度下降思想迭代出下一时刻的智能体状态  $q_i^{k+1}$ . 重复上述步骤, 最终使状态  $v_i^k$  收敛到问题(1)的最优解  $u^* \in \Omega^*$ .

**注3** 本文的工作受到了文献[9, 11, 16–17, 24–26]中理论分析的启发, 这些理论为选择合适的优化策略提供了科学依据. 针对时变不平衡有向图的挑战, 引入了推和框架来增强算法的鲁棒性. 在该框架下, 传统的投影方法无法直接应用于非一致性约束的处理. 因此, 基于对非一致性约束深入研究的理论分析, 本文利用投影反馈处理约束, 确保每次迭代都能满足约束条件.

为评估所提出分布式在线优化算法的性能, 本文引入常用性能指标, 即网络静态悔界  $R(T)$ . 具体而言,  $R(T)$  表示网络中所有智能体随时间  $T$  累积的损失函数之和与最终最优固定决策造成的总代价函数值之间的差, 其定义为

$$R(T) = \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m f_i^k(v) - \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m f_i^k(u^*), \quad (7)$$

其中  $u^* = \operatorname{argmin}_{v \in \Omega} \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m f_i^k(v)$ . 目标是使得网络静态悔界  $R(T)$  实现次线性收敛, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{R(T)}{T} \right) = 0.$$

#### 4 性能分析

为清晰地论证所提算法的网络遗憾界  $R(T)$  的收敛性能, 本节从以下几个方面逐步分析: 1) 首先给出平均状态  $\bar{q}$  的演化关系式, 如引理5所示; 2) 在引理5的基础上, 通过相关引理和放缩整理得出, 网络中所有智能体平均状态的投影值  $\bar{u}^k$  随时间  $T$  累积的损失函数之和与最终最优固定决策  $u^*$  造成的总代价函数值之间的差, 即  $\sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m f_i^k(\bar{u}^k) - \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m f_i^k(u^*)$ , 如引理6所示; 3) 引理7给出智能体状态  $v_i^k$  与智能体平均状态的投影  $\bar{u}^k$  的演化关系式; 4) 结合引理6和引理7, 整理得出网络静态悔界  $R(T)$ .

在分析平均状态  $\bar{q}$  的演化关系之前, 首先基于注

2中梯度的一致上界  $\|\partial f_i^k(u)\| \leq S$ , 先给出误差项  $\|v_i^k - \bar{q}^k\|$  的上界. 根据文献[11]中的引理6, 可直接推出如下引理4.

**引理4**<sup>[11]</sup> 假设1–4成立, 对任意  $i \in I$ , 有

$$\|v_i^k - \bar{q}^k\| \leq D_1 \lambda^k + D_2 \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} (S \theta^r + \kappa \|\delta_i^r\|), \quad (8)$$

其中:  $\delta_i^k = u_i^k - v_i^k$ ;  $D_1, D_2$  和  $\lambda$  都是正常数, 且  $0 < \lambda < 1$ .

平均状态  $\bar{q}$  的演化关系如引理5所示.

**引理5** 假设1–4成立, 对任意向量  $u^* \in \Omega^*$ , 有

$$\begin{aligned} \|\bar{q}^{k+1} - u^*\|^2 &\leq \\ \|\bar{q}^k - u^*\|^2 - \frac{\kappa(2 - C_3 \kappa)}{m} \phi^k + \\ a(\varphi^k - \varphi^{k+1}) - \frac{2\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) + \\ C_2(\theta^k)^2 + 4D_1^2 \lambda^{2k} + \frac{8D_2^2 S^2}{1 - \lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} (\theta^r)^2, \end{aligned} \quad (9)$$

其中:  $C_1 = \frac{4S}{m} + 2SM$ ,  $C_2 = 2S^2 + \frac{C_1^2 m^2}{4} + \frac{C_1^2 m^2}{4\kappa^2}$ ,  $C_3 = \frac{8D_2^2 m}{(1 - \lambda)^2} + 4$ ,  $a = \frac{8D_2^2 \kappa^2}{(1 - \lambda)^2}$ ,  $\phi^k = \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\|^2$ , 且  $\varphi^k = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \phi^r$ .

**证** 首先, 定义  $\bar{q}^k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{q}_i^k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m q_i^k + \frac{\kappa}{m} \times \sum_{i=1}^m (u_i^k - v_i^k)$ . 由式(4)–(5)及  $Q$  的列随机性, 可得

$$\bar{q}^{k+1} = \bar{q}^k + \frac{\kappa}{m} \sum_{i=1}^m \delta_i^k - \frac{\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m \partial f_i^k(u_i^k), \quad (10)$$

式(10)两边减去最优状态  $u^*$ , 再取范数的平方, 得

$$\begin{aligned} \|\bar{q}^{k+1} - u^*\|^2 &= \\ \frac{2\kappa}{m} \sum_{i=1}^m (\bar{q}^k - u^*)^T (u_i^k - v_i^k) + \\ \|\bar{q}^k - u^*\|^2 - \frac{2\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m (\bar{q}^k - u^*)^T \partial f_i^k(u_i^k) + \\ \left\| \frac{\kappa}{m} \sum_{i=1}^m \delta_i^k - \frac{\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m \partial f_i^k(u_i^k) \right\|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

对于式(11)右边第1项, 基于引理3, 有  $(u_i^k - u^*)^T \times (u_i^k - v_i^k) \leq 0$ , 并应用  $ab \leq \frac{1}{2\kappa} a^2 + \frac{\kappa}{2} b^2$ , 可得

$$\begin{aligned} (\bar{q}^k - u^*)^T (u_i^k - v_i^k) &= \\ (\bar{q}^k - v_i^k)^T (u_i^k - v_i^k) - \\ \|u_i^k - v_i^k\|^2 + (u_i^k - u^*)^T (u_i^k - v_i^k) &\leq \\ \frac{1}{2\kappa} \|v_i^k - \bar{q}^k\|^2 - \frac{2 - \kappa}{2} \|u_i^k - v_i^k\|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

对式(12)两边的*i*求和

$$\begin{aligned} & \frac{2\kappa}{m} \sum_{i=1}^m (\bar{q}^k - u^*)^T (u_i^k - v_i^k) \leq \\ & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|v_i^k - \bar{q}^k\|^2 - \frac{\kappa(2-\kappa)}{m} \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\|^2. \end{aligned} \tag{13}$$

对于式(11)右侧的第3项, 利用局部损失函数的凸性和梯度一致有界性, 有

$$\begin{aligned} & (\bar{q}^k - u^*)^T \partial f_i^k(u_i^k) \geq \\ & -S\|\bar{q}^k - u_i^k\|^2 + f_i^k(u_i^k) - f_i^k(u^*). \end{aligned} \tag{14}$$

进一步展开和放缩, 得到

$$\begin{aligned} & f_i^k(u_i^k) - f_i^k(u^*) \geq \\ & \partial f_i^k(\bar{u}^k)^T (u_i^k - \bar{u}^k) + f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*) \geq \\ & f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*) - S\|u_i^k - \bar{u}^k\|. \end{aligned} \tag{15}$$

结合假设3, 有

$$\begin{aligned} & \|u_i^k - \bar{u}^k\| \leq \|u_i^k - \bar{q}^k\| + M \sum_{i=1}^m \text{dist}(\bar{q}^k, \Omega_i) \leq \\ & \|u_i^k - \bar{q}^k\| + M \sum_{i=1}^m \|u_i^k - \bar{q}^k\|. \end{aligned} \tag{16}$$

利用三角不等式,  $\|u_i^k - \bar{q}^k\| \leq \|v_i^k - \bar{q}^k\| + \|u_i^k - v_i^k\|$ , 并结合式(14)–(16), 得到

$$\begin{aligned} & \frac{2\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m (\bar{q}^k - u^*)^T \partial f_i^k(u_i^k) \geq \\ & -C_1 \sum_{i=1}^m \theta^k \|\delta_i^k\| + \\ & \frac{2\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) - C_1 \sum_{i=1}^m \theta^k \|v_i^k - \bar{q}^k\|. \end{aligned} \tag{17}$$

对于式(11)右边第4项, 应用范数函数的凸性, 有

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\kappa}{m} \sum_{i=1}^m \delta_i^k - \frac{\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m \partial f_i^k(u_i^k) \right\|^2 \leq \\ & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|\kappa \delta_i^k - \theta^k \partial f_i^k(u_i^k)\|^2 \leq \\ & \frac{2\kappa^2}{m} \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\|^2 + 2S^2(\theta^k)^2. \end{aligned} \tag{18}$$

进一步, 结合式(13) (17)和式(18), 可得

$$\begin{aligned} & \|\bar{q}^{k+1} - u^*\|^2 \leq \\ & \|\bar{q}^k - u^*\|^2 - \\ & \frac{2\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) + 2S^2(\theta^k)^2 - \\ & \frac{\kappa(2-3\kappa)}{m} \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\|^2 + C_1 \sum_{i=1}^m \theta^k \|\delta_i^k\| + \\ & C_1 \sum_{i=1}^m \theta^k \|v_i^k - \bar{q}^k\| + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|v_i^k - \bar{q}^k\|^2. \end{aligned} \tag{19}$$

根据式(19), 利用不等式放缩, 对项  $C_1 \sum_{i=1}^m \theta^k \|v_i^k - \bar{q}^k\|$  可得到

$$\begin{aligned} & C_1 \sum_{i=1}^m \theta^k \|v_i^k - \bar{q}^k\| \leq \\ & C_1 \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{C_1 m} \|v_i^k - \bar{q}^k\|^2 + \frac{C_1 m}{4} (\theta^k)^2 \right) = \\ & \frac{C_1^2 m^2}{4} (\theta^k)^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|v_i^k - \bar{q}^k\|^2. \end{aligned} \tag{20}$$

对于项  $C_1 \sum_{i=1}^m \theta^k \|\delta_i^k\|$ , 有

$$\begin{aligned} & C_1 \sum_{i=1}^m \theta^k \|\delta_i^k\| \leq \\ & C_1 \sum_{i=1}^m \left( \frac{C_1 m}{4\kappa^2} (\theta^k)^2 + \frac{\kappa^2}{C_1 m} \|\delta_i^k\|^2 \right) = \\ & \frac{C_1^2 m^2}{4\kappa^2} (\theta^k)^2 + \frac{\kappa^2}{m} \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\|^2. \end{aligned} \tag{21}$$

将式(20)–(21)代入式(19)后, 得到

$$\begin{aligned} & \|\bar{q}^{k+1} - u^*\|^2 \leq \\ & \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m \|v_i^k - \bar{q}^k\|^2 - \frac{\kappa(2-4\kappa)}{m} \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\|^2 + \\ & \|\bar{q}^k - u^*\|^2 - \frac{2\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) + C_2(\theta^k)^2. \end{aligned} \tag{22}$$

为了进一步处理  $\sum_{i=1}^m \|v_i^k - \bar{q}^k\|^2$  的上界, 基于引理4, 有

$$\begin{aligned} & \|v_i^k - \bar{q}^k\|^2 \leq \\ & (D_1 \lambda^k + D_2 \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} (S\theta^r + \kappa \|\delta_i^r\|))^2 \leq \\ & 2D_1^2 \lambda^{2k} + 2D_2^2 \left( \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} (S\theta^r + \kappa \|\delta_i^r\|) \right)^2. \end{aligned} \tag{23}$$

其中  $(\sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} (S\theta^r + \kappa \|\delta_i^r\|))^2$  项由式(24)得出

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} (S\theta^r + \kappa \|\delta_i^r\|) \right)^2 \leq \\ & \frac{1}{1-\lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} (S\theta^r + \kappa \|\delta_i^r\|)^2 \leq \\ & \frac{2S^2}{1-\lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} (\theta^r)^2 + \frac{2\kappa^2}{1-\lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \|\delta_i^r\|^2. \end{aligned} \tag{24}$$

将式(24)代入式(23), 得到

$$\begin{aligned} & \|v_i^k - \bar{q}^k\|^2 \leq \\ & 2D_1^2 \lambda^{2k} + \frac{4D_2^2 S^2}{1-\lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} (\theta^r)^2 + \\ & \frac{4D_2^2 \kappa^2}{1-\lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \|\delta_i^r\|^2. \end{aligned} \tag{25}$$

将式(25)代入式(22), 得到

$$\begin{aligned} & \|\bar{q}^{k+1}-u^*\|^2 \leq \\ & \frac{8D_2^2\kappa^2}{1-\lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \sum_{i=1}^m \|\delta_i^r\|^2 + C_2(\theta^k)^2 + \\ & \|\bar{q}^k-u^*\|^2 - \frac{2\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) - 4D_1^2\lambda^{2k} + \\ & \frac{\kappa(2-4\kappa)}{m} \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\|^2 + \frac{8D_2^2S^2}{1-\lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1}(\theta^r)^2. \end{aligned} \tag{26}$$

进一步处理式(26)右边的第1项, 在此引入一个新变量, 定义: 对于任意  $k \geq 1$ ,  $\varphi^k = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \phi^r$ , 且  $\varphi^0 = 0$ . 其中,  $\phi^k = \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\|^2$ . 通过计算得到

$$\varphi^{k+1} \leq \lambda\varphi^k + \phi^k. \tag{27}$$

结合式(26)和式(27), 可以得出

$$\begin{aligned} & \|\bar{q}^{k+1}-u^*\|^2 + a\varphi^{k+1} \leq \\ & \frac{8D_2^2\kappa^2}{1-\lambda} \varphi^k + a(\lambda-1)\varphi^k + a\phi^k + \\ & \|\bar{q}^k-u^*\|^2 - \frac{2\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) + \\ & 4D_1^2\lambda^{2k} - \frac{\kappa(2-4\kappa)}{m} \phi^k + a\phi^k + C_2(\theta^k)^2 + \\ & \frac{8D_2^2S^2}{1-\lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1}(\theta^r)^2. \end{aligned} \tag{28}$$

当常数  $a$  取  $\frac{8D_2^2\kappa^2}{(1-\lambda)^2}$  时,  $\frac{8D_2^2\kappa^2}{1-\lambda} = a(1-\lambda)$ . 最后, 将常数  $a$  的取值代入式(28), 经过整理, 完成引理5的证明. 证毕.

根据引理5, 对式(9)右边最后一项进行整理, 得出  $\sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m f_i^k(\bar{u}^k) - \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m f_i^k(u^*)$  的上界结果. 为了得出引理6, 首先给出强凸函数的定义, 并作出一个重要假设.

**定义1** 对于任意  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 若存在一个正常数  $\mu$ , 使得  $f_i^k(x) - f_i^k(y) \geq \partial f_i^k(y)^T(x-y) + \frac{\mu}{2}\|x-y\|^2$  恒成立, 则称函数  $f_i^k: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  是  $\mu$  强凸.

**假设5** 至少存在一个局部时变损失函数  $f_i^k$  是  $\mu$  强凸的.

**引理6** 假设1-5成立, 衰减步长  $\theta^k$  取  $\frac{4}{\mu k}$ , 对于任意向量  $u^* \in \Omega^*$ , 有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) + C_4 \sum_{k=1}^T k\phi^k \leq \\ & C_5 \sum_{k=1}^T \phi^k + \frac{4C_2m}{\mu}(1+\log(T)) + \\ & C_6 + \frac{32D_2^2S^2m}{\mu(1-\lambda)} \sum_{k=1}^T k \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \tag{29}$$

其中:

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{\mu\kappa(2-C_3\kappa)}{4}, \\ C_5 &= 2mM^2\mu + \frac{am\mu}{4(1-\lambda)} + \frac{8D_2^2m^2M^2\kappa^2\mu}{(1-\lambda)^2}, \end{aligned}$$

且

$$C_6 = \frac{D_1^2m\mu\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} + \frac{4D_1^2m^2M^2\mu\lambda^2}{1-\lambda^2} + \frac{64D_2^2m^2M^2S^2\pi^2}{3\mu(1-\lambda)^2}.$$

**证** 令  $F^k(q) = \sum_{i=1}^m f_i^k(q)$ , 基于假设5可知,  $F^k(q)$  是强凸的且  $F^k(\bar{u}^k) - F^k(u^*) \geq \frac{\mu}{2}\|\bar{u}^k - u^*\|^2$ . 结合  $\bar{u}^k - u^* = \bar{u}^k - \bar{q}^k + \bar{q}^k - u^*$  和杨不等式有

$$\begin{aligned} & \|\bar{u}^k - u^*\|^2 \geq \\ & 2(\bar{u}^k - \bar{q}^k)^T(\bar{q}^k - u^*) + \|\bar{q}^k - u^*\|^2 \geq \\ & -2\|\bar{u}^k - \bar{q}^k\|^2 + \frac{1}{2}\|\bar{q}^k - u^*\|^2. \end{aligned} \tag{30}$$

再结合引理5和式(30), 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\theta^k}{m} \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) + \frac{\kappa(2-C_3\kappa)}{m} \phi^k \leq \\ & \|\bar{q}^k - u^*\|^2 - \|\bar{q}^{k+1} - u^*\|^2 - \\ & \frac{\mu\theta^k}{4m} \|\bar{q}^k - u^*\|^2 + \frac{\mu\theta^k}{m} \|\bar{u}^k - \bar{q}^k\|^2 + \\ & a(\varphi^k - \varphi^{k+1}) + C_2(\theta^k)^2 + \\ & 4D_1^2\lambda^{2k} + \frac{8D_2^2S^2}{1-\lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1}(\theta^r)^2. \end{aligned} \tag{31}$$

定义衰减步长  $\theta^k$  的初始值满足  $\frac{1}{\theta^0} = 0$ , 则有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) + \kappa(2-C_3\kappa) \sum_{k=1}^T \frac{\phi^k}{\theta^k} \leq \\ & \sum_{k=0}^T \frac{m}{\theta^k} (\|\bar{q}^k - u^*\|^2 - \|\bar{q}^{k+1} - u^*\|^2) + \\ & C_2m \sum_{k=1}^T \theta^k - \sum_{k=1}^T \frac{\mu m}{4} \|\bar{q}^k - u^*\|^2 + \\ & \sum_{k=1}^T \mu \|\bar{u}^k - \bar{q}^k\|^2 + am \sum_{k=1}^T \frac{1}{\theta^k} (\varphi^k - \\ & \varphi^{k+1}) + 4D_1^2m \sum_{k=1}^T \frac{\lambda^{2k}}{\theta^k} + \\ & \frac{8D_2^2S^2m}{1-\lambda} \sum_{k=1}^T \frac{1}{\theta^k} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1}(\theta^r)^2. \end{aligned} \tag{32}$$

对于式(32)右边第1项, 归纳整理得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^T \frac{m}{\theta^k} (\|\bar{q}^k - u^*\|^2 - \|\bar{q}^{k+1} - u^*\|^2) = \\ & \sum_{k=1}^T \|\bar{q}^k - u^*\|^2 \left( \frac{m}{\theta^k} - \frac{m}{\theta^{k-1}} \right) + \\ & \frac{m}{\theta^0} \|\bar{q}^0 - u^*\|^2 - \frac{m}{\theta^T} \|\bar{q}^T - u^*\|^2 \leq \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^T \|\bar{q}^k - u^*\|^2 \left( \frac{m}{\theta^k} - \frac{m}{\theta^{k-1}} \right). \quad (33)$$

结合式(32)右边第3项, 对于  $k \geq 1$ , 令  $\frac{m}{\theta^k} - \frac{m}{\theta^{k-1}} - \frac{m\mu}{4} = 0$ , 即  $\theta^k = \frac{4}{\mu k}$ , 则消去式(32)右边第13项. 将不等式  $\sum_{k=1}^T \frac{1}{k} \leq 1 + \log(T)$ ,  $\sum_{k=1}^T k\lambda^{2k} \leq \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}$  和  $\sum_{k=1}^T k(\varphi^k - \varphi^{k+1}) \leq \frac{1}{1-\lambda} \sum_{k=1}^T \phi^k$  代入式(32), 可以得出

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) + C_4 \sum_{k=1}^T k\phi^k \leq \\ & \frac{D_1^2 m \mu \lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} + \sum_{k=1}^T \mu \|\bar{u}^k - \bar{q}^k\|^2 + \\ & \frac{32D_2^2 S^2 m}{\mu(1-\lambda)} \sum_{k=1}^T k \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \frac{1}{r^2} + \\ & \frac{am\mu}{4(1-\lambda)} \sum_{k=1}^T \phi^k + \frac{4C_2 m}{\mu} (1 + \log(T)). \quad (34) \end{aligned}$$

对于式(34)右边的第2项, 根据假设3, 有

$$\begin{aligned} & \|\bar{u}^k - \bar{q}^k\|^2 \leq \\ & mM^2 \sum_{i=1}^m \text{dist}^2(\bar{q}^k, \Omega_i) \leq \\ & 2mM^2 \sum_{i=1}^m \|v_i^k - \bar{q}^k\|^2 + 2mM^2 \phi^k. \quad (35) \end{aligned}$$

随后, 结合式(25), 对  $k$  从1到  $T$  求和得到

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{k=1}^T \|\bar{u}^k - \bar{q}^k\|^2 \leq \\ & 4D_1^2 m^2 M^2 \mu \sum_{k=1}^T \lambda^{2k} + 2mM^2 \mu \sum_{k=1}^T \phi^k + \\ & \frac{8D_2^2 m^2 M^2 \kappa^2 \mu}{1-\lambda} \sum_{k=1}^T \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \phi^r + \\ & \frac{8D_2^2 m^2 M^2 S^2 \mu}{1-\lambda} \sum_{k=1}^T \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} (\theta^r)^2. \quad (36) \end{aligned}$$

对式(36)右边第3-4项, 根据不等式

$$\sum_{k=1}^T \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} (\theta^r)^2 \leq \frac{1}{1-\lambda} \sum_{k=1}^T (\theta^k)^2$$

和  $\sum_{k=1}^T \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \phi^r \leq \frac{1}{1-\lambda} \sum_{k=1}^T \phi^k$ , 得

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{k=1}^T \|\bar{u}^k - \bar{q}^k\|^2 \leq \\ & 4D_1^2 m^2 M^2 \mu \sum_{k=1}^T \lambda^{2k} + \\ & 2mM^2 \mu \sum_{k=1}^T \phi^k + \frac{8D_2^2 m^2 M^2 S^2 \mu}{(1-\lambda)^2} \sum_{k=1}^T (\theta^k)^2 + \\ & \frac{8D_2^2 m^2 M^2 \kappa^2 \mu}{(1-\lambda)^2} \sum_{k=1}^T \phi^k. \quad (37) \end{aligned}$$

将  $\theta^k = \frac{4}{\mu k}$  代入式(37), 根据如下求和结果  $\sum_{k=1}^T \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$  和  $\sum_{k=1}^T \lambda^{2k} \leq \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}$ , 得

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{k=1}^T \|\bar{u}^k - \bar{q}^k\|^2 \leq \\ & (2mM^2 \mu + \frac{8D_2^2 m^2 M^2 \kappa^2 \mu}{(1-\lambda)^2}) \sum_{k=1}^T \phi^k + \\ & \frac{4D_1^2 m^2 M^2 \mu \lambda^2}{1-\lambda^2} + \frac{64D_2^2 m^2 M^2 S^2 \pi^2}{3\mu(1-\lambda)^2}. \quad (38) \end{aligned}$$

最后, 结合式(34)和式(38), 整理得到引理6的证明. 证毕.

接下来, 进一步给出智能体状态  $v_i^k$  与所有智能体平均状态的投影值  $\bar{u}^k$  的演化关系.

**引理7** 假设1-5成立, 且衰减步长  $\theta^k$  取  $\frac{4}{\mu k}$ , 则对于任意  $i \in I$ , 有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^T \|v_i^k - \bar{u}^k\| \leq \\ & \frac{(M+1)D_1 m \lambda}{1-\lambda} + \frac{C_4}{2} \sum_{k=1}^T k\phi^k + \\ & \left( \frac{4(M+1)D_2 m S}{\mu(1-\lambda)} + \frac{mC_7^2}{2C_4} \right) (1 + \log(T)), \quad (39) \end{aligned}$$

其中  $C_7 = \left( \frac{(M+1)D_2 \kappa}{1-\lambda} + M \right)$ .

**证** 基于假设3, 可将  $\|v_i^k - \bar{u}^k\|$  放缩为

$$\begin{aligned} & \|v_i^k - \bar{u}^k\| \leq \|v_i^k - \bar{q}^k\| + \|\bar{q}^k - \bar{u}^k\| \leq \\ & \|v_i^k - \bar{q}^k\| + M \sum_{i=1}^m \|\bar{q}^k - u_i^k\| \leq \\ & (M+1) \sum_{i=1}^m \|v_i^k - \bar{q}^k\| + M \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\|. \end{aligned}$$

对上述不等式两边对  $k$  求和, 并结合引理4的结果得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^T \|v_i^k - \bar{u}^k\| \leq \\ & (M+1) D_2 m S \sum_{k=1}^T \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \theta^r + \\ & (M+1) D_1 m \sum_{k=1}^T \lambda^k + M \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\| + \\ & (M+1) D_2 \kappa \sum_{k=1}^T \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \sum_{i=1}^m \|\delta_i^r\|. \quad (40) \end{aligned}$$

利用  $\theta^k = \frac{4}{\mu k}$  和不等式  $\sum_{k=1}^T \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \theta^r \leq \frac{1}{1-\lambda} \times \sum_{k=1}^T \theta^k$ , 得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^T \|v_i^k - \bar{u}^k\| \leq \\ & \frac{4(M+1)D_2 m S}{\mu(1-\lambda)} (1 + \log(T)) + \end{aligned}$$

$$\frac{(M+1)D_1m\lambda}{1-\lambda} + \left(\frac{(M+1)D_2\kappa}{1-\lambda} + M\right) \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\|.$$

令  $\eta^k = \sum_{i=1}^m \|\delta_i^k\|$ , 可得  $\eta^k \leq \frac{1}{4k\tau} + k\tau(\eta^k)^2 \leq \frac{1}{4k\tau} + k\tau m\phi^k$ . 代入上式, 得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^T \|v_i^k - \bar{u}^k\| \leq \\ & \frac{(M+1)D_1m\lambda}{1-\lambda} + \frac{1}{4\tau} \left(\frac{(M+1)D_2\kappa}{1-\lambda} + M\right) \sum_{k=1}^T \frac{1}{k} + \\ & \tau m C_7 \sum_{k=1}^T k\phi^k + \frac{4(M+1)D_2mS}{\mu(1-\lambda)} (1 + \log(T)). \end{aligned} \quad (41)$$

令  $\tau = \frac{C_4}{2mC_7}$ , 同时根据  $\sum_{k=1}^T \frac{1}{k} \leq 1 + \log(T)$ , 通过整理, 最终完成引理7的证明. 证毕.

接下来给出本文网络静态悔界  $R(T)$  的主要定理.

**定理 1** 令假设 1-5 成立, 且衰减步长  $\theta^k$  取  $\frac{4}{\mu k}$ , 对于每个智能体  $i \in I$ , 当  $u^* \in \Omega^*$  时, 有

$$R(T) \leq \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 (1 + \log(T)), \quad (42)$$

其中:  $\tilde{C}_1 = (S+1)C_{11}$ ,  $\tilde{C}_2 = (S+1)C_{12}$ . 常数  $C_{11}$  和  $C_{12}$  会在定理1的证明中详细给出.

**证** 结合引理6和引理7的结果, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^T \|v_i^k - \bar{u}^k\| + \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) \leq \\ & \frac{(M+1)D_1m\lambda}{1-\lambda} + C_6 + \\ & C_8 (1 + \log(T)) + C_5 \sum_{k=1}^T \phi^k - \frac{C_4}{2} \sum_{k=1}^T k\phi^k + \\ & \frac{32D_2^2S^2m}{\mu(1-\lambda)} \sum_{k=1}^T k \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (43)$$

其中  $C_8 = \frac{4C_2m}{\mu} + \frac{4(M+1)D_2mS}{\mu(1-\lambda)} + \frac{mC_7^2}{2C_4}$ . 对于不等式(43)右边的第4项和第5项, 存在一个正整数  $k_1$ , 当  $k \geq k_1$  时,  $C_5\phi^k \leq \frac{C_4}{2}k\phi^k$ . 对于不等式(43)右边的最后一项, 令  $\xi^k = k \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r-1} \frac{1}{r^2}$ , 得

$$\begin{aligned} \xi^{k+1} &= \\ & (k+1) \left( \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{k^2} \right) = \\ & \frac{k+1}{k} k \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{k-r} \frac{1}{r^2} + \frac{k+1}{k^2} = \frac{k+1}{k} \lambda \xi^k + \frac{k+1}{k^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

已知  $0 < \lambda < 1$ , 当  $k \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1$ . 因此, 存在一个正整数  $k_2 \geq k_1$  以及  $\lambda < \lambda_1 < 1$ , 使得当  $k \geq k_2$  时,  $\frac{k+1}{k} \lambda \leq \lambda_1 \leq 1$  恒成立. 此时, 式(44)可以重

写为

$$\xi^{k+1} \leq \lambda_1 \xi^k + \frac{k+1}{k^2}. \quad (45)$$

对  $k$  从  $k_2$  到  $T-1$  求和, 得到

$$\sum_{k=k_2}^{T-1} \xi^{k+1} \leq \sum_{k=k_2}^{T-1} \lambda_1 \xi^k + \sum_{k=k_2}^{T-1} \frac{k+1}{k^2}. \quad (46)$$

经过变换可得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=k_2+1}^T \xi^k \leq \\ & \sum_{k=k_2+1}^T \lambda_1 \xi^k + \sum_{k=k_2+1}^T \frac{k+1}{k^2} + \lambda_1 \xi^{k_2} + \frac{k_2+1}{k_2^2}. \end{aligned}$$

根据  $\sum_{k=k_2+1}^T \frac{1}{k} \leq 1 + \log(T)$  和  $\sum_{k=k_2+1}^T \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$  得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=k_2+1}^T \xi^k \leq \\ & \frac{1}{1-\lambda_1} \sum_{k=k_2+1}^T \frac{k+1}{k^2} + \frac{\lambda_1 \xi^{k_2} + \frac{k_2+1}{k_2^2}}{1-\lambda_1} \leq \\ & \frac{1}{1-\lambda_1} (1 + \log(T)) + C_9, \end{aligned} \quad (47)$$

其中  $C_9 = \frac{1}{1-\lambda_1} \left( \frac{\pi^2}{6} + \lambda_1 \xi^{k_2} + \frac{k_2+1}{k_2^2} \right)$ . 将式(47)

代入式(43), 可得出当  $k \geq k_2 + 1$  时,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=k_2+1}^T \|v_i^k - \bar{u}^k\| + \sum_{k=k_2+1}^T \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) \leq \\ & \frac{(M+1)D_1m\lambda}{1-\lambda} + C_6 + \frac{32D_2^2S^2m}{\mu(1-\lambda)} C_9 + \\ & \left( C_8 + \frac{32D_2^2S^2m}{\mu(1-\lambda)(1-\lambda_1)} \right) (1 + \log(T)). \end{aligned} \quad (48)$$

令  $C_{10} = \sum_{k=1}^{k_2} \|v_i^k - \bar{u}^k\| + \sum_{k=1}^{k_2} \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*))$ , 得到

$$\sum_{k=1}^T \|v_i^k - \bar{u}^k\| + \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m (f_i^k(\bar{u}^k) - f_i^k(u^*)) \leq C_{11} + C_{12} (1 + \log(T)), \quad (49)$$

其中:  $C_{11} = \frac{(M+1)D_1m\lambda}{1-\lambda} + C_6 + \frac{32D_2^2S^2m}{\mu(1-\lambda)} C_9 +$

$C_{10}$ ,  $C_{12} = C_8 + \frac{32D_2^2S^2m}{\mu(1-\lambda)(1-\lambda_1)}$ . 根据局部损失函数的凸性, 直接得到  $\sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m |f_i^k(v_i^k) - f_i^k(u^*)| \leq \tilde{C}_1 +$

$\tilde{C}_2 (1 + \log(T))$ . 最后根据绝对值不等式  $R(T) \leq \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m |f_i^k(v_i^k) - f_i^k(u^*)|$ , 完成定理1的证明.

证毕.

**注 4** 根据定理1的结论, 算法1具有  $O(\log(T))$  的悔界. 即在通信网络拓扑呈现时变且不平衡的情况下, 仍实现了与文献[16]和文献[17]中相同的静态悔界. 该结果在具有

简单集约束的分布式在线优化问题中, 针对强凸局部损失函数代表了最佳的静态海界, 而且算法1仅要求至少一个局部损失函数为强凸, 而非所有局部损失函数均为强凸.

### 5 数值仿真

在本节, 通过传感器网络定位问题和分布式岭回归问题两个案例来验证算法的平均遗憾  $\frac{R(T)}{T}$  能够趋于0, 并且能够达到最好的海界.

#### 5.1 传感器网络定位问题

考虑由  $m$  个传感器构成的网络, 这些传感器用于观测一个向量  $e \in \mathbb{R}^n$ . 每个时刻  $k$ , 传感器  $i$  接收到观测向量  $c_i^k \in \mathbb{R}^{n_i}$ . 由于观测噪声, 观测结果随时间变化, 即  $c_i^k$  是时变的. 假设每个传感器  $i$  具有线性模型  $p_i(e) = P_i e$ , 其中  $P_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$ , 仅当  $e$  取零值时,  $p_i(e) = 0$ . 假设  $\hat{e}$  是对所要观测向量  $e$  的最好估计, 为了获取  $\hat{e}$ , 目标是最小化下列时间成本函数之和到对观测向量  $e$  的最佳估计  $\hat{e}$ ,

$$f(\hat{e}) = \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m \|c_i^k - P_i \hat{e}\|_2^2. \quad (50)$$

假设系统维度  $n = 1$ , 传感器数量  $m = 6$ , 每个传感器  $i$  观测的实际值  $e_i$  取  $\frac{1}{4}$ , 且每个传感器  $i$  无法知晓实际值. 在每个时刻  $k \in \{1, 2, \dots, T\}$ , 传感器  $i$  只能获取一个观测信息  $c_i^k$ , 且  $c_i^k = a_i^k e + b_i^k$ , 其中  $a_i^k$  和  $b_i^k$  从均匀分布中随机选取. 此外, 每个传感器  $i$  的  $P_i = 1$ .

为验证所提算法的性能, 基于静态平衡图和时变不平衡有向图两种通信拓扑进行了实验. 在静态平衡图拓扑下, 通过对比实验评估本文提出的算法 (push-sum distributed online constrained optimization, PSDOCO) 与文献 [17] 中最优悔界算法 (distributed autonomous online learning, DAOL) 的性能. 假设静态平衡图如图1所示, 所有传感器约束集为  $\Omega = \{\hat{e} : 0 < \hat{e} < 1/2\}$ , 步长  $\theta^k$  取  $4/k$ . 为验证所提算法 PSDOCO 性能,  $a_i^k$  在  $[0, 2]$  上均匀分布,  $b_i^k$  在  $A : [-0.25, 0.25]$  和  $B : [-0.5, 0.5]$  上均匀分布. 在不同  $b_i^k$  误差条件下, 平均遗憾  $R(T)/T$  的收敛结果如图2-3所示. 结果表明, PSDOCO 算法与算法 DAOL 在平均遗憾  $R(T)/T$  上的表现几乎一致, 验证了 PSDOCO 能够达到已知的最佳遗憾界.

当通信拓扑为时变不平衡有向图时, 算法<sup>[17]</sup>无法求解问题(50). 本文算法不仅能够克服这一挑战, 还能使每个传感器的状态  $v_i^k$  在其约束集  $\Omega_i = \{\hat{e} : 0 - 0.01i < \hat{e} < 1/2 + 0.01i\}$  上投影, 最终达到全局最优. 时变不平衡图由3个基本图  $g_1, g_2, g_3$  组成, 如图4所示. 传感器间的通信在这3个图之间轮换.

当  $a_i^k$  和  $b_i^k$  分别在  $[0, 2]$  和  $[-0.25, 0.25]$  上均匀分布, 步长  $\theta^k$  取  $4/k$ , 传感器  $i$  的状态  $v_i^k$  如图5所示. 平均

遗憾  $R(T)/T$  的收敛结果见图6. 图5-6表明6个传感器的状态在迭代70次后基本趋于稳定, 算法 PSDOCO 的平均遗憾  $R(T)/T$  最终会收敛到0.

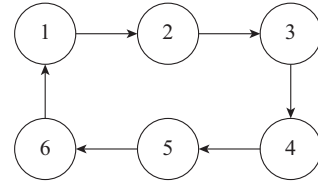


图 1 静态平衡有向图

Fig. 1 Static balanced digraph

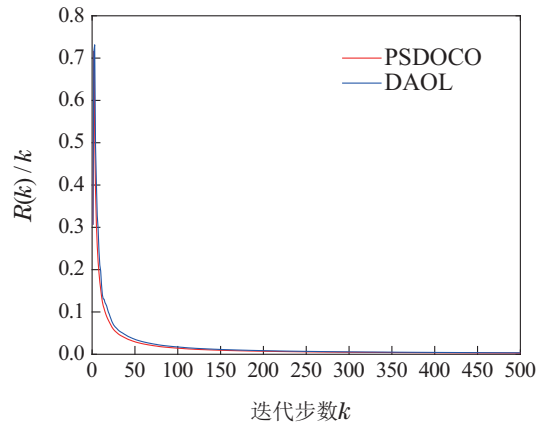


图 2 当  $b_i^k \in A$  时, 平均遗憾  $R(T)/T$  的收敛性

Fig. 2 Convergence of average regrets  $R(T)/T$  with  $b_i^k \in A$

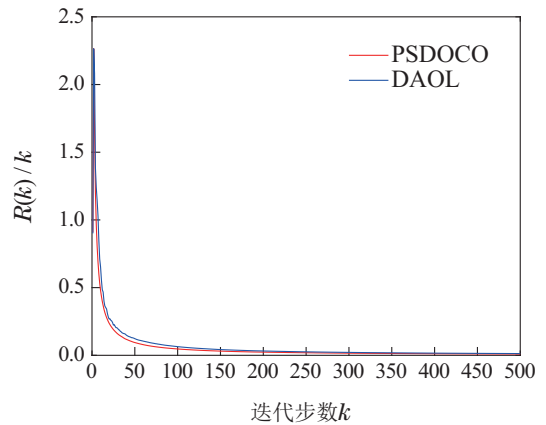


图 3 当  $b_i^k \in B$  时, 平均遗憾  $R(T)/T$  的收敛性

Fig. 3 Convergence of average regrets  $R(T)/T$  with  $b_i^k \in B$

#### 5.2 分布式岭回归问题

分布式岭回归问题表示为

$$\min_{q \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^m \left[ \frac{1}{2} (a_i^{kT} q - l_i^k)^2 + \lambda_1 \|q\|_2^2 \right], \quad (51)$$

其中,  $\lambda_1$  为正则化参数. 公共约束集  $\mathcal{X} = \{q \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d q_i = 1, q_i > 0\}$ .  $a_i^k \in \mathbb{R}^d$  为智能体  $i$  在时刻  $k$  的特征,  $l_i^k = a_i^{kT} q_0 + b_i^k / (dk)$  为相应的标签信息, 其中

$q_0 \in \mathbb{R}^d$ 为目标权重向量. 仿真中, 假设网络中智能体个数 $m = 6$ , 状态维数 $d = 3$ .  $a_i$ 在 $[-5, 5]$ 上均匀分布,  $b_i^k \in [0, 1]$ 随机生成. 正则化参数 $\lambda_1 = 5 \times 10^{-6}$ , 目标权重向量 $q_0 = [1/3 \ 1/3 \ 1/3]^T$ .

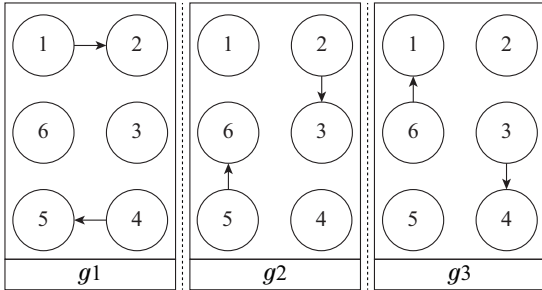


图4 时变不平衡有向图

Fig. 4 Time-varying unbalanced digraphs

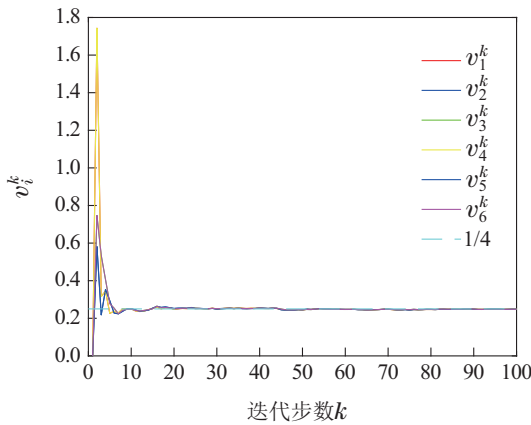


图5 6个传感器状态 $v_i^k$ 的收敛性

Fig. 5 Convergence of state  $v_i^k$  for all six sensors

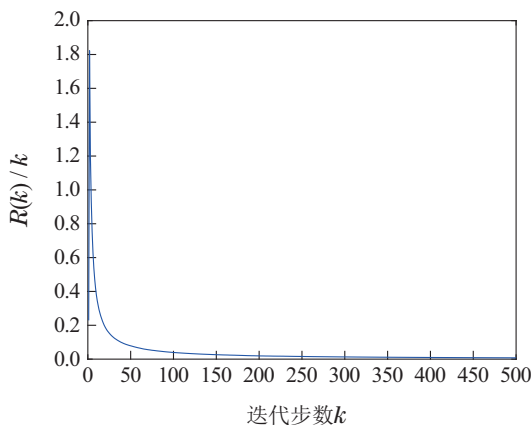


图6 平均遗憾 $R(T)/T$ 的收敛性

Fig. 6 Convergence of average regrets  $R(T)/T$

与第5.1节传感器网络定位问6题相似, 针对智能体之间不同的通信拓扑, 探讨本文算法能否解决问题(51)并评估平均遗憾 $R(T)/T$ 的收敛性能. 在静态平衡有向图1下, 文章比较了PSDOCO算法与DAOL算

法的平均遗憾 $R(T)/T$ 的收敛性能, 如图7所示. 结果表明, 二者的平均遗憾最终都收敛于0, 变化趋势相似, 验证了本文算法能达到最佳悔界.

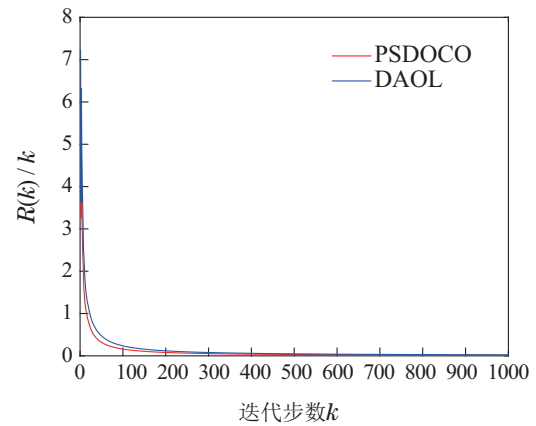


图7 静态平衡有向图上平均遗憾 $R(T)/T$ 的收敛性

Fig. 7 Convergence of average regrets  $R(T)/T$  over a static balanced digraph

当通信拓扑为时变不平衡有向图4时, 重新定义智能体的约束集:  $\mathcal{X} = \{q \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d q_i = 1, 0 < q_i < 0.88 + 0.02i\}$ . 此时, 智能体权重估计  $v_i^k$  和平均遗憾  $R(T)/T$  的收敛结果分别如图8-9所示. 结果表明所有权重估计最终收敛于 $q_0$ , 且算法PSDOCO的平均遗憾 $R(T)/T$ 也收敛于0.

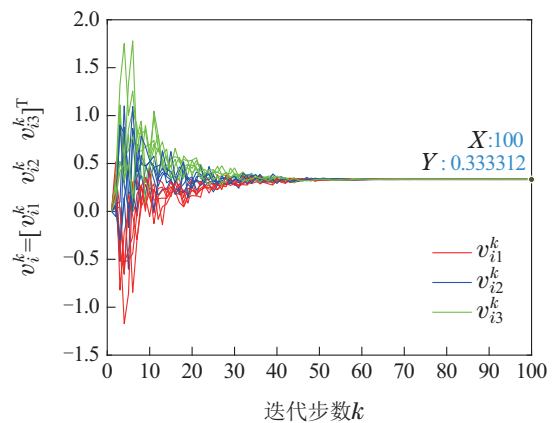


图8 权重估计参数 $v_i^k$ 的收敛性

Fig. 8 Convergence of the weight estimation parameters  $v_i^k$

综上, 算法PSDOCO不仅在静态平衡图中有效, 在时变不平衡有向图中也展现出优异的性能和鲁棒性.

## 6 结论

本文研究了时变不平衡有向图上具有非一致性约束的分布式在线优化问题. 为了解决此类问题, 提出了一种基于推和协议的分布式在线优化算法. 通过严格的理论分析, 当至少一个局部损失函数为强凸时, 网络静态悔界  $R(T)$  以速率  $\mathcal{O}(\log(T))$  收敛, 达到了

该类在线优化问题的最佳静态悔界. 数值仿真结果验证了算法性能的有效性. 未来的工作将基于此, 进一步研究算法的动态悔界等问题.

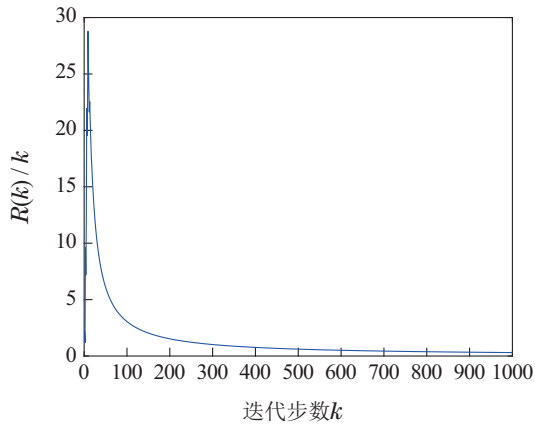


图9 时变不平衡有向图上平均遗憾 $R(T)/T$ 的收敛性

Fig. 9 Convergence of average regrets  $R(T)/T$  over time-varying unbalanced digraphs

## 参考文献:

- [1] XIE Pei, YOU Keyou, HONG Yiguang, et al. A survey of distributed convex optimization algorithms over networks. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(7): 918 – 927.  
(谢佩, 游科友, 洪奕光, 等. 网络化分布式凸优化算法研究进展. 控制理论与应用, 2018, 35(7): 918 – 927.)
- [2] LI X X, XIE L H, LI N. A survey on distributed online optimization and online games. *Annual Reviews in Control*, 2023, 56: 100904.
- [3] CHEN T Y, LING Q, GIANNAKIS G B. An online convex optimization approach to proactive network resource allocation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(24): 6350 – 6364.
- [4] ZHANG J Q, YOU K Y, CAI K. Distributed dual gradient tracking for resource allocation in unbalanced networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, 68: 2186 – 2198.
- [5] WANG H J, LIU K, HAN D Y, et al. Privacy-preserving distributed online stochastic optimization with time-varying distributions. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2023, 10(2): 1069 – 1082.
- [6] XIONG Y Y, XU J M, YOU K Y, et al. Privacy-preserving distributed online optimization over unbalanced digraphs via subgradient rescaling. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2020, 7(3): 1366 – 1378.
- [7] ZHONG W F, XIE K, LIU Y, et al. Online control and near-optimal algorithm for distributed energy storage sharing in smart grid. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2020, 11(3): 2552 – 2562.
- [8] WU Sunyong, WANG Li, LI Tiancheng, et al. Multi-bernoulli target tracking based on distributed limited sensing network. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(5): 1370 – 1384.  
(吴孙勇, 王力, 李天成, 等. 基于分布式有限感知网络的多伯努利目标跟踪. 自动化学报, 2022, 48(5): 1370 – 1384.)
- [9] NEDIĆ A, OLSHEVSKY A. Distributed optimization over time-varying directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(3): 601 – 615.
- [10] XI C G, KHAN U A. Distributed subgradient projection algorithm over directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8): 3986 – 3992.
- [11] YU W W, LIU H Z, ZHENG W X, et al. Distributed discrete-time convex optimization with nonidentical local constraints over time-varying unbalanced directed graphs. *Automatica*, 2021, 134: 109899.
- [12] NGUYEN D T A, NGUYEN D T, NEDIĆ A. Accelerated AB/push-pull methods for distributed optimization over time-varying directed networks. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2024, 11(3): 1395 – 1407.
- [13] NIE R, DU W L, WANG T, et al. Distributed asynchronous optimization of multiagent systems: convergence analysis and its application. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2024, 20(6): 8983 – 8992.
- [14] FANG X J, ZHANG B Y, YUAN D M. Gossip-based distributed stochastic mirror descent for constrained optimization. *Neural Networks*, 2024, 175: 106291.
- [15] GAO Juan, LIU Xinwei. Barzilai-Borwein gradient tracking method for distributed optimization over directed networks. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(9): 1637 – 1645.  
(高娟, 刘新为. 有向网络分布式优化的Barzilai-Borwein梯度跟踪方法. 控制理论与应用, 2023, 40(9): 1637 – 1645.)
- [16] MATEOS-NÚÑEZ D, CORTÉS J. Distributed online convex optimization over jointly connected digraphs. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2014, 1(1): 23 – 37.
- [17] YAN F, SUNDARAM S, VISHWANATHAN S V N, et al. Distributed autonomous online learning: Regrets and intrinsic privacy-preserving properties. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2013, 25(11): 2483 – 2493.
- [18] YUAN D M, HO D W C, JIANG G P. An adaptive primal-dual subgradient algorithm for online distributed constrained optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(11): 3045 – 3055.
- [19] YI X L, LI X X, XIE L H, et al. Distributed online convex optimization with time-varying coupled inequality constraints. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, 68: 731 – 746.
- [20] YI X L, LI X X, YANG T, et al. Distributed bandit online convex optimization with time-varying coupled inequality constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(10): 4620 – 4635.
- [21] ZHANG W T, SHI Y, ZHANG B Y, et al. Dynamic regret of distributed online Frank-Wolfe convex optimization. *ArXiv Preprint*, 2023, arXiv: 2302.00663.
- [22] ZHANG W T, SHI Y, ZHANG B Y, et al. Quantized distributed online projection-free convex optimization. *IEEE Control Systems Letters*, 2023, 7: 1837 – 1842.
- [23] ZHANG W T, SHI Y, ZHANG B Y, et al. Improved dynamic regret of distributed online multiple Frank-Wolfe convex optimization. *ArXiv Preprint*, 2023, arXiv: 2305.12957.
- [24] NEDIĆ A, OZDAGLAR A, PARRILO P A. Constrained consensus and optimization in multi-agent networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 922 – 938.
- [25] AKBARI M, GHARESIFARD B, LINDER T. Distributed online convex optimization on time-varying directed graphs. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2017, 4(3): 417 – 428.
- [26] WANG C, XU S Y, YUAN D M, et al. Push-sum distributed online optimization with bandit feedback. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(4): 2263 – 2273.

- [27] FANG R Y, LI D Q, SHEN X Y. An accelerated distributed online gradient push-sum algorithm in time-varying networks. *The 40th Chinese Control Conference (CCC)*. Shanghai, China: IEEE, 2021: 5269 – 5274.
- [28] LI X X, YI X L, XIE L H. Distributed online optimization for multi-agent networks with coupled inequality constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(8): 3575 – 3591.
- [29] PANG Y P, HU G Q. Randomized gradient-free distributed online optimization via a dynamic regret analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, 68(11): 6781 – 6788.
- [30] WANG D D, ZHU D K, SOU K C, et al. Distributed online optimization with coupled inequality constraints over unbalanced directed networks. *The 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Singapore: IEEE, 2023: 1162 – 1169.
- [31] XIONG Y Y, LI X, YOU K Y, et al. Distributed online optimization in time-varying unbalanced networks without explicit subgradients. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 4047 – 4060.

#### 作者简介:

**李庆海** 硕士研究生, 目前研究方向为多智能体系统、分布式优化和复杂网络, E-mail: 202212490051@nuist.edu.cn;

**朱亚楠** 副教授, 目前研究方向为多智能体系统、分布式优化和博弈论, E-mail: ynzhu@nuist.edu.cn;

**刘洪喆** 博士后研究员, 目前研究方向为分布式优化、多智能体系统和复杂网络, E-mail: 101300130@seu.edu.cn.